

# Moderne Mechanik

Teil 11  
Drehimpuls

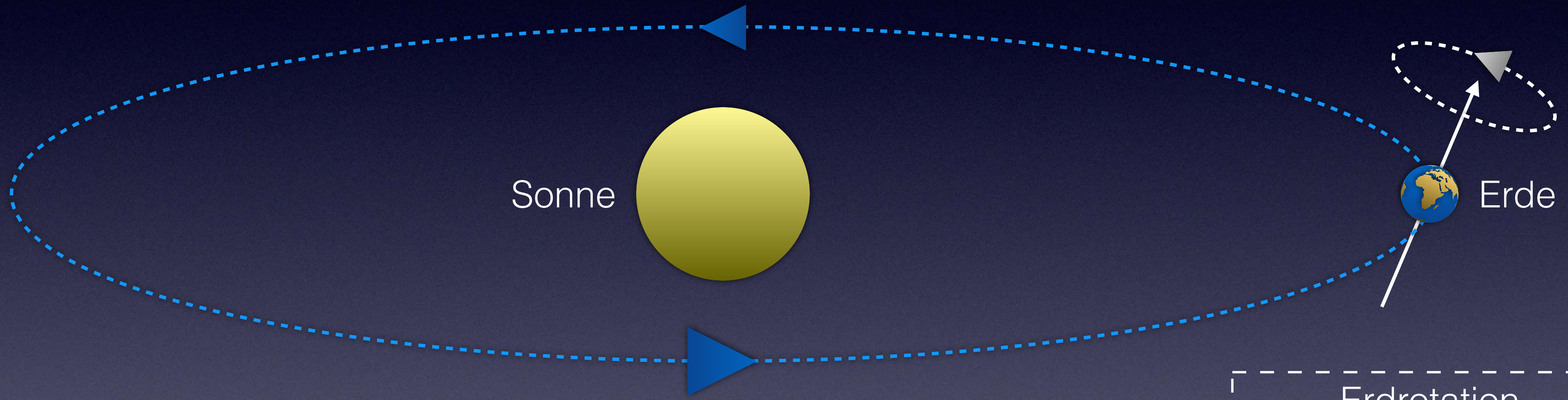
# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- den Bahn- und Eigen-Drehimpuls in 3D zu berechnen.
- Das Prinzip Drehimpuls zur Vorhersage des neuen Drehimpulses eines Systems, das einem Drehmoment ausgesetzt ist, einzusetzen.
- Das Prinzip Drehimpuls auf ein System anzuwenden, das aus mehr als einem Teilchen besteht.
- Die neue Position eines rotierenden Objekts vorherzusagen.

Der Drehimpuls ist ein Maß für die Rotationsbewegung. Der **Bahndrehimpuls** („*orbital momentum*“ oder „*translational angular momentum*“) beschreibt Bewegungen wie die Umlaufbahn der Erde um die Sonne. Der **Eigendrehimpuls** („*rotational angular momentum*“) beschreibt eine Bewegung wie die Drehung der Erde um ihre eigene Achse. So wie das Prinzip Impuls eine Änderung des Impulses mit der Nettokraft auf ein System in Beziehung setzt, setzt das Prinzip Drehimpuls eine Änderung des Drehimpulses mit dem Nettodrehmoment, das auf ein System ausgeübt wird, in Beziehung.

Umlauf der Erde um die Sonne  
→ **Bahndrehimpuls**



Erdrotation  
→ **Eigendrehimpuls**

# Übersicht

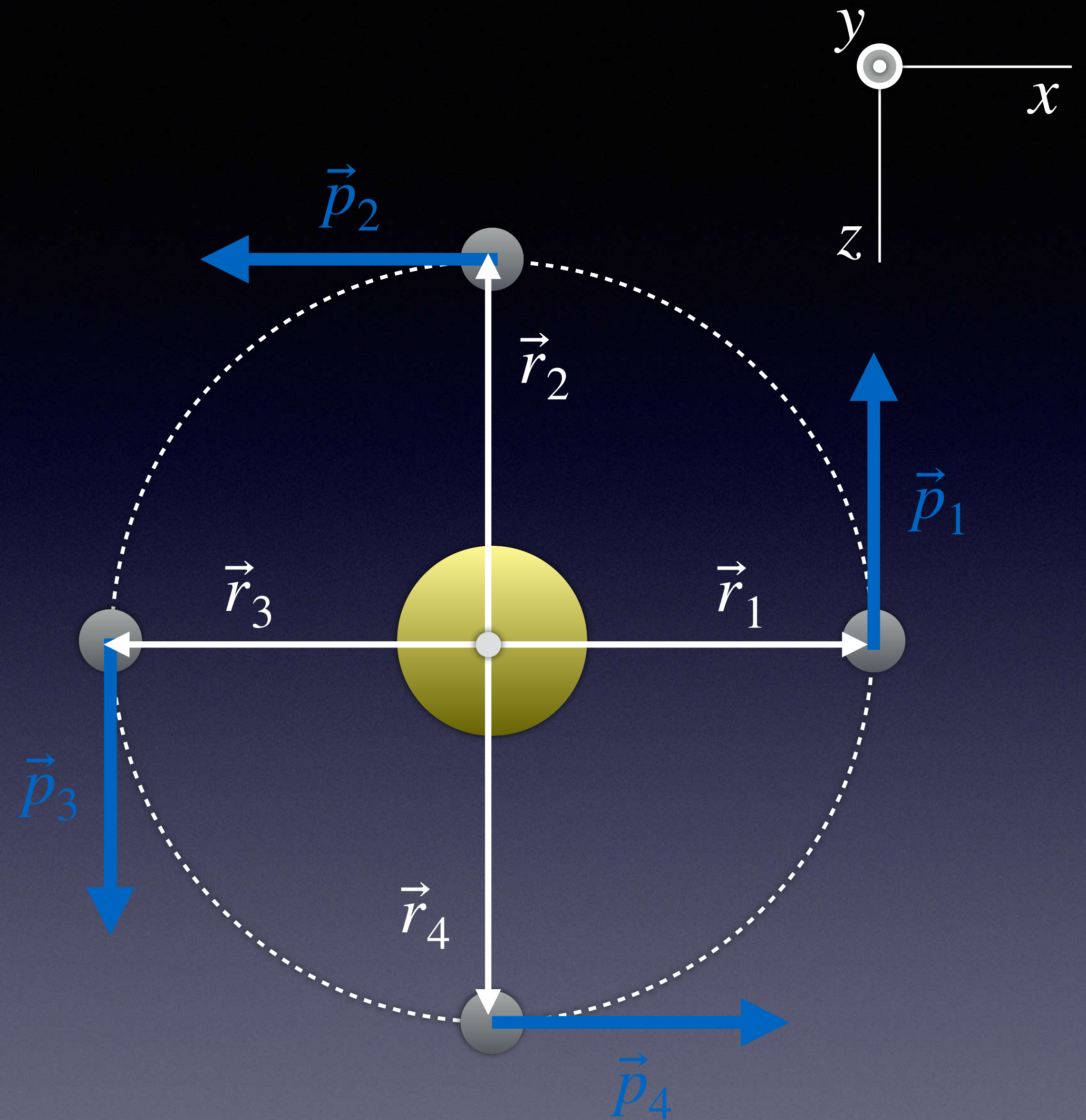
- Bahndrehimpuls
- Eigendrehimpuls
- Gesamt-Drehimpuls
- Drehmoment
- Das Prinzip Drehimpuls
- Systeme aus mehreren Teilchen
- Systeme ohne einwirkendes (Netto-) Drehmoment
- Systeme mit einwirkendem (Netto-) Drehmoment
- Vorhersage der Position bei vorhandener Rotation
- Iterative Berechnungen mit einem Computer
- Quantisierung des Drehimpulses
- Gyroskop
- Mehr zum Thema Trägheitsmoment
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

# Bahndrehimpuls

Wenn die Erde auf einer kreisförmigen Bahn um die Sonne kreist, ändert sich der Ortsvektor  $\vec{r}$  (von der Sonne zur Erde) ständig in seiner Richtung, und auch der Impuls  $\vec{p}$  der Erde ändert sich ständig in seiner Richtung. Allerdings bleiben ihre Beträge (fast) konstant.

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \langle 0, 0, -mv \rangle, & \vec{r}_1 &= \langle r, 0, 0 \rangle \\ \vec{p}_2 &= \langle -mv, 0, 0 \rangle, & \vec{r}_2 &= \langle 0, 0, -r \rangle \\ \vec{p}_3 &= \langle 0, 0, mv \rangle, & \vec{r}_3 &= \langle -r, 0, 0 \rangle \\ \vec{p}_4 &= \langle mv, 0, 0 \rangle, & \vec{r}_4 &= \langle 0, 0, r \rangle\end{aligned}$$

Dennoch hat man das „Gefühl“, dass hier etwas konstant ist. Zum Beispiel ist der Winkel zwischen dem Positionsvektor und dem Impulsvektor bei dieser Kreisbahn immer gleich  $90^\circ$ . Auch die Drehrichtung der Kreisbewegung bleibt unverändert.



Die Größe, die im vorgestellten Fall konstant ist, ist der Bahndrehimpuls  $\vec{L}_{\text{trans,sonne}}$  der Erde relativ zur Sonne. Allgemein gilt:

$$\vec{L}_{\text{trans}} = \vec{r} \times \vec{p} = \langle r_y p_z - r_z p_y, r_z p_x - r_x p_z, r_x p_y - r_y p_x \rangle .$$

Für die auf der vorhergehenden Folie genannten Werte  $\vec{r}_i$  und  $\vec{p}_i$  erhalten wir jeweils

$$\vec{L}_{\text{trans,sonne}} = \langle 0, mvr, 0 \rangle .$$

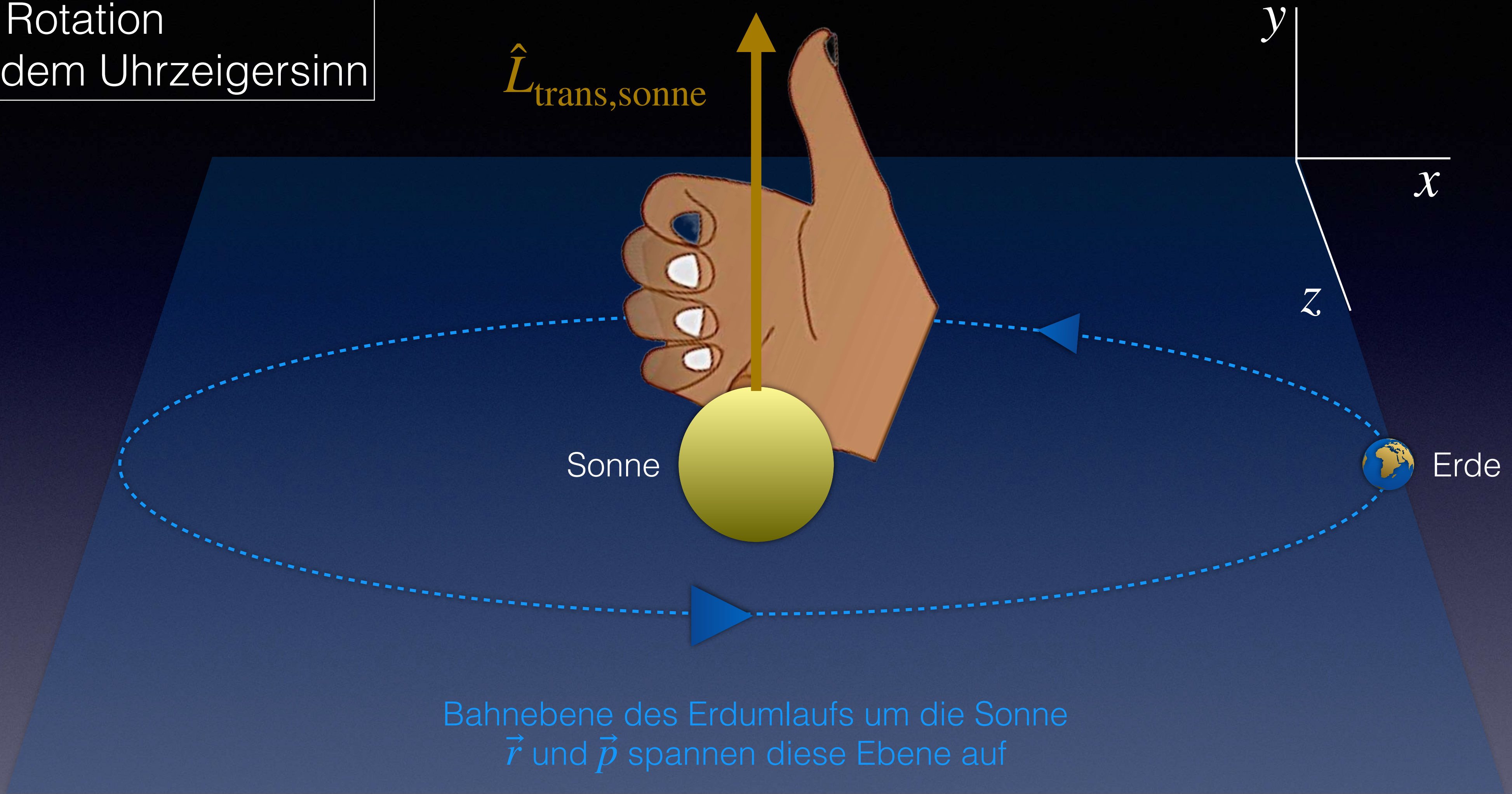
Wir sehen, dass sich der Bahndrehimpuls der Erde relativ zur Sonne für den Fall einer kreisförmigen Bahn und konstanter Bahngeschwindigkeit nicht verändert.



Rotation  
entgegen dem Uhrzeigersinn

$\hat{L}_{\text{trans}}$  steht senkrecht auf der Bahnebene

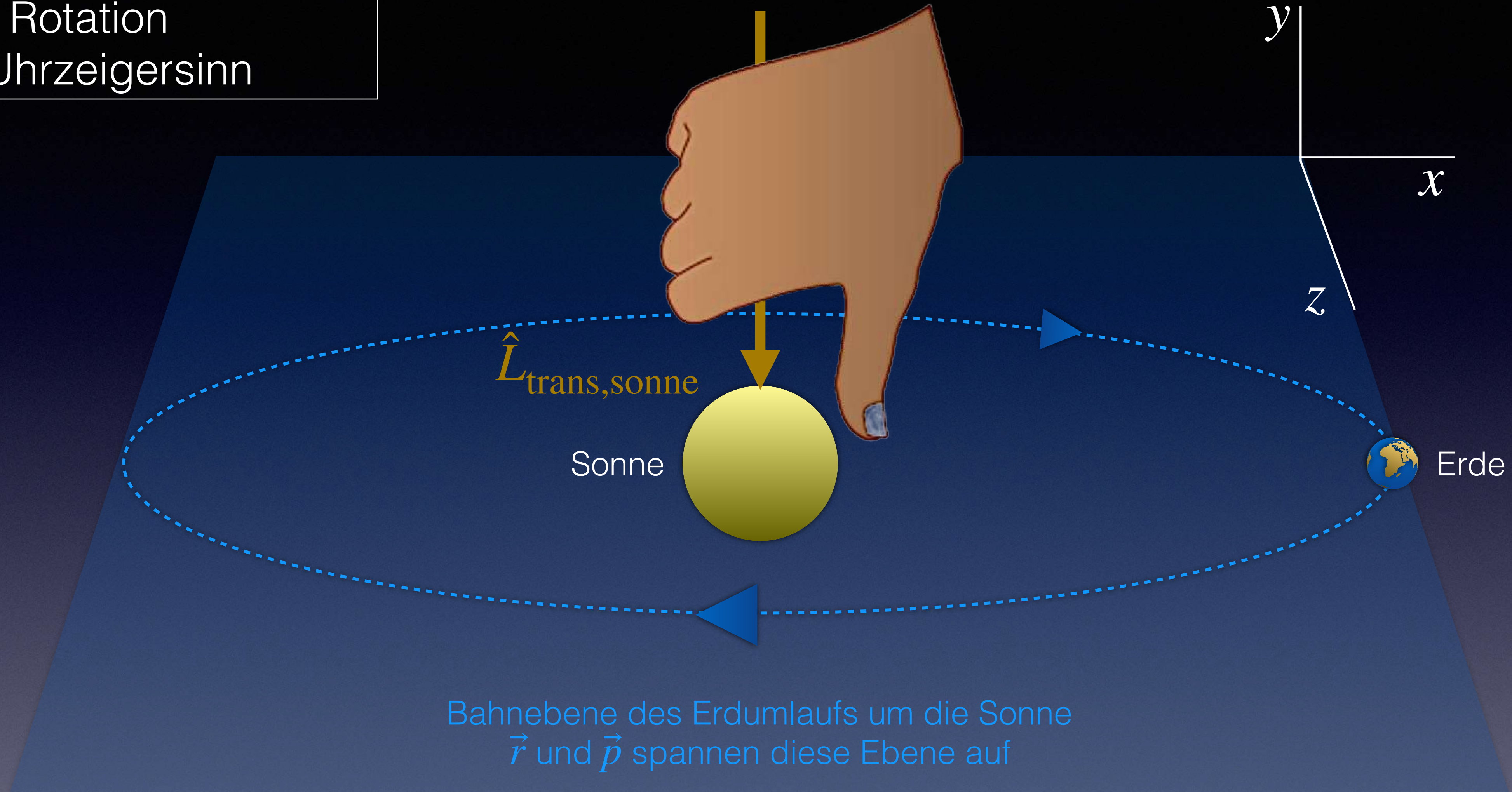
$\hat{L}_{\text{trans,sonne}}$



Regel der rechten Hand: Krümme die Finger der rechten Hand in Richtung der Drehbewegung in der Bahnebene und strecken den Daumen aus, wie gezeigt. Der Einheitsvektor  $\hat{L}_{\text{trans,sonne}}$ , der die Richtung des Drehimpulses repräsentiert, ist so definiert, dass er dann in die Richtung des Daumens zeigt.

Rotation  
im Uhrzeigersinn

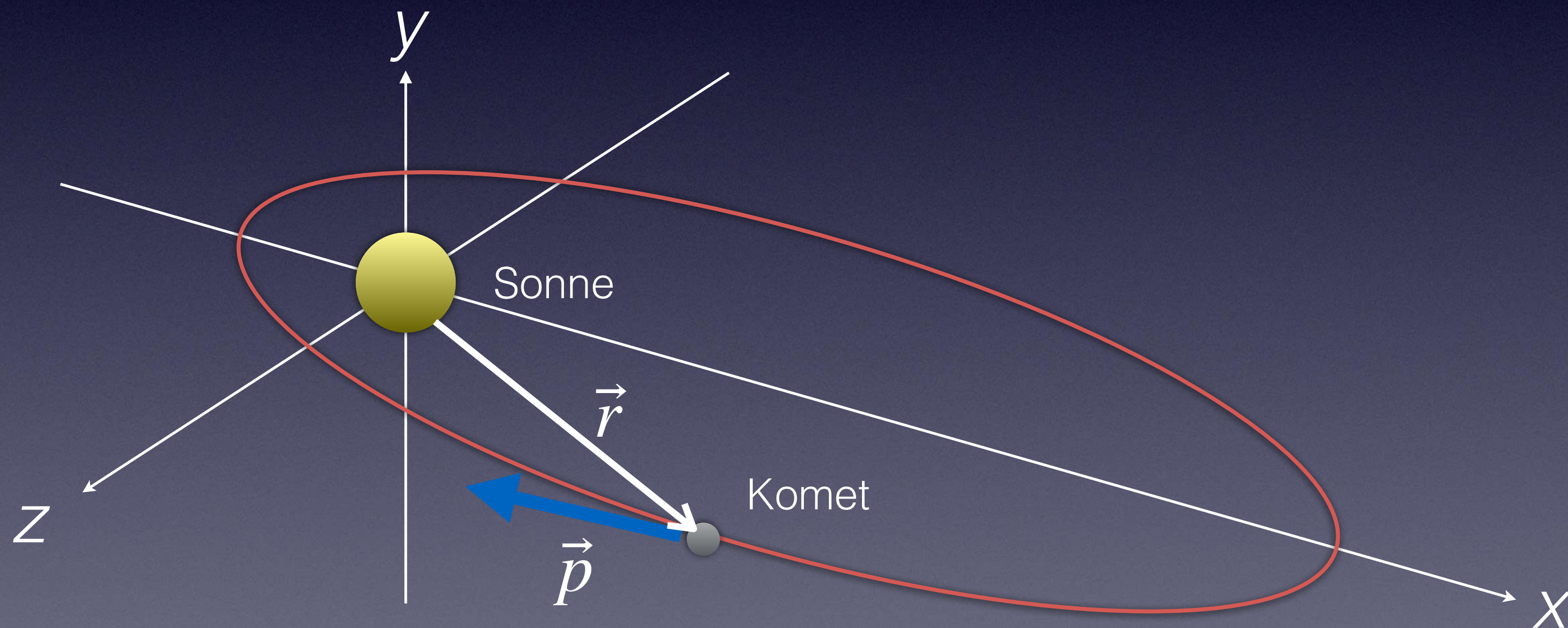
$\hat{L}_{\text{trans}}$  steht senkrecht auf der Bahnebene



Regel der rechten Hand: Krümme die Finger der rechten Hand in Richtung der Drehbewegung in der Bahnebene und strecken den Daumen aus, wie gezeigt. Der Einheitsvektor  $\hat{L}_{\text{trans,sonne}}$ , der die Richtung des Drehimpulses repräsentiert, ist so definiert, dass er dann in die Richtung des Daumens zeigt.

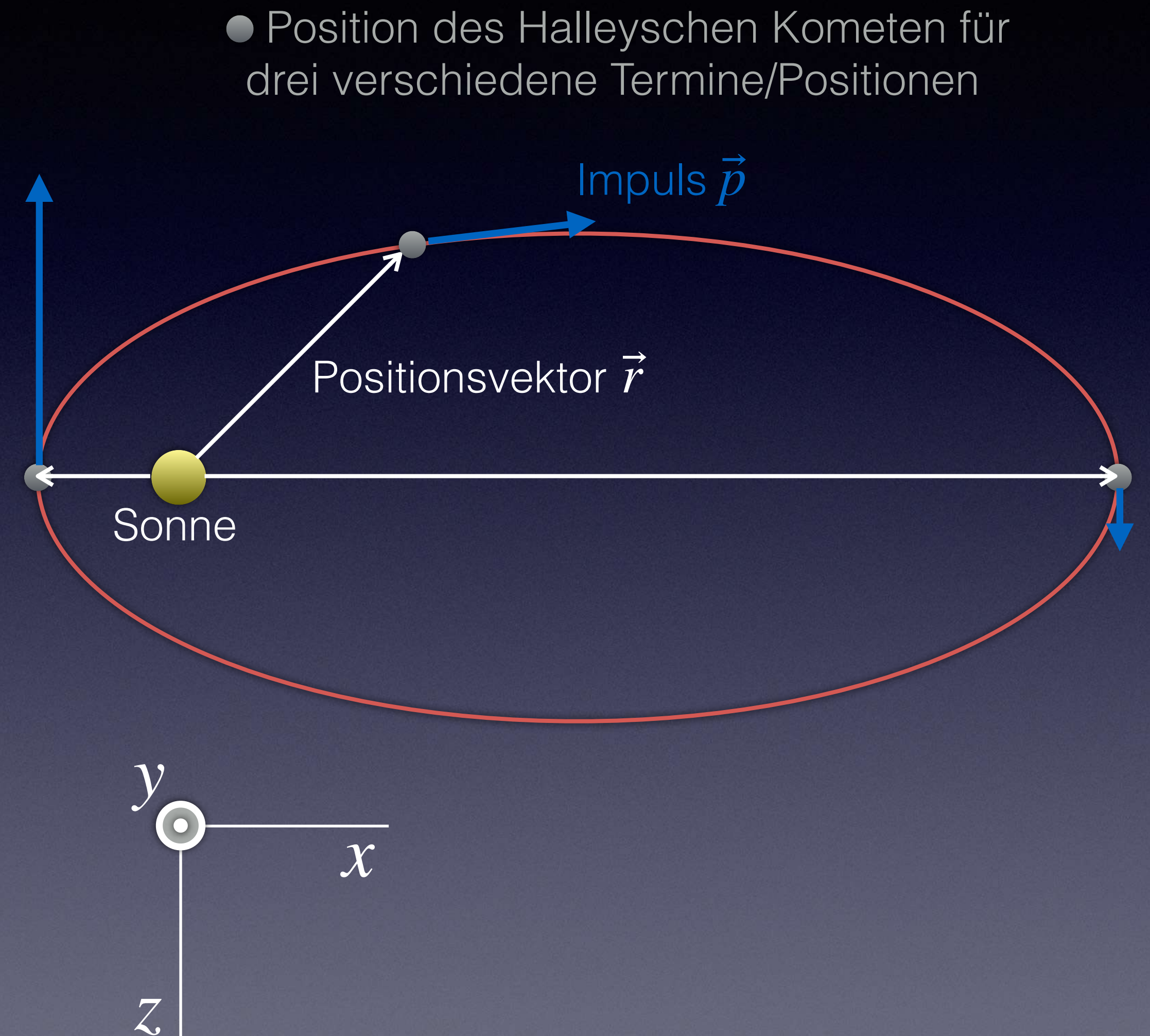
# Kontrollpunkt 1

K1.1: Welche Richtung hat der Bahndrehimpuls des hier dargestellten Kometen (Bahnebene =  $xz$ -Ebene) im Verhältnis zur Sonne?



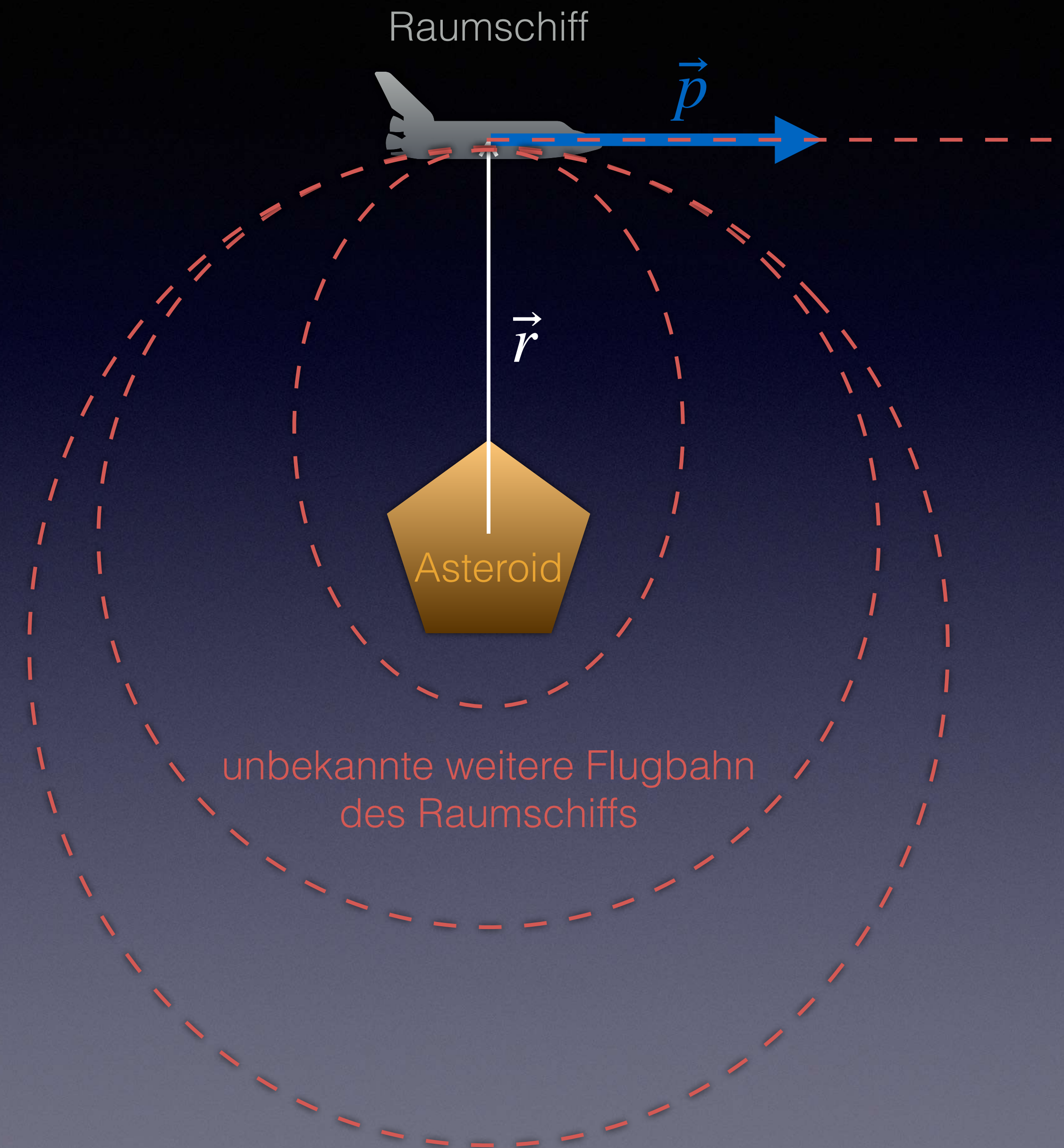
Der Halleysche Komet umkreist die Sonne mit einer Periode von ca. 75,3 y und wird auf der Erde das nächste Mal im Jahr 2061 sichtbar sein.

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische Ansicht seiner Umlaufbahn, hier in der  $xz$ -Ebene. Da die Bahn elliptisch ist, ändern sich  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  nach Richtung und Betrag kontinuierlich entlang der Bahn. Aus den verfügbaren Beobachtungsdaten können wir den Bahndrehimpuls  $\vec{L}_{\text{trans,sonne}}$  des Halleyschen Kometen relativ zur Sonne an verschiedenen Orten berechnen. Selbst auf dieser stark elliptischen Bahn ist der Bahndrehimpuls des Kometen während der gesamten Umlaufzeit konstant, obwohl sich seine Position, sein Impuls und der Winkel zwischen ihnen ständig ändern. Es waren Beobachtungen wie diese, die erstmals darauf hindeuteten, dass der (Bahn-) Drehimpuls eine Erhaltungsgröße sein könnte und sich nicht ändern sollte, wenn auf das System kein äußeres Drehmoment einwirkt.



Bei der Berechnung des Bahndrehimpulses  $\vec{L}_{\text{trans}}$  verwenden wir die Position  $\vec{r}$  und den Impuls  $\vec{p}$  eines Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Dabei kennen wir oft weder die zurückliegende noch die zukünftige Bahn des Objekts. Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht diesen Sachverhalt, indem sie viele mögliche Bahnen eines Raumschiffs zeigt, das einen Asteroiden passiert. So ist es möglich, dass das Raumschiff von dem Asteroiden nahezu unbeeinflusst bleibt und sich (fast) in einer geraden Linie weiter bewegt. Trotzdem können wir seinen Bahndrehimpuls jederzeit berechnen. Zum Beispiel in Bezug auf den Massenmittelpunkt des Asteroiden.



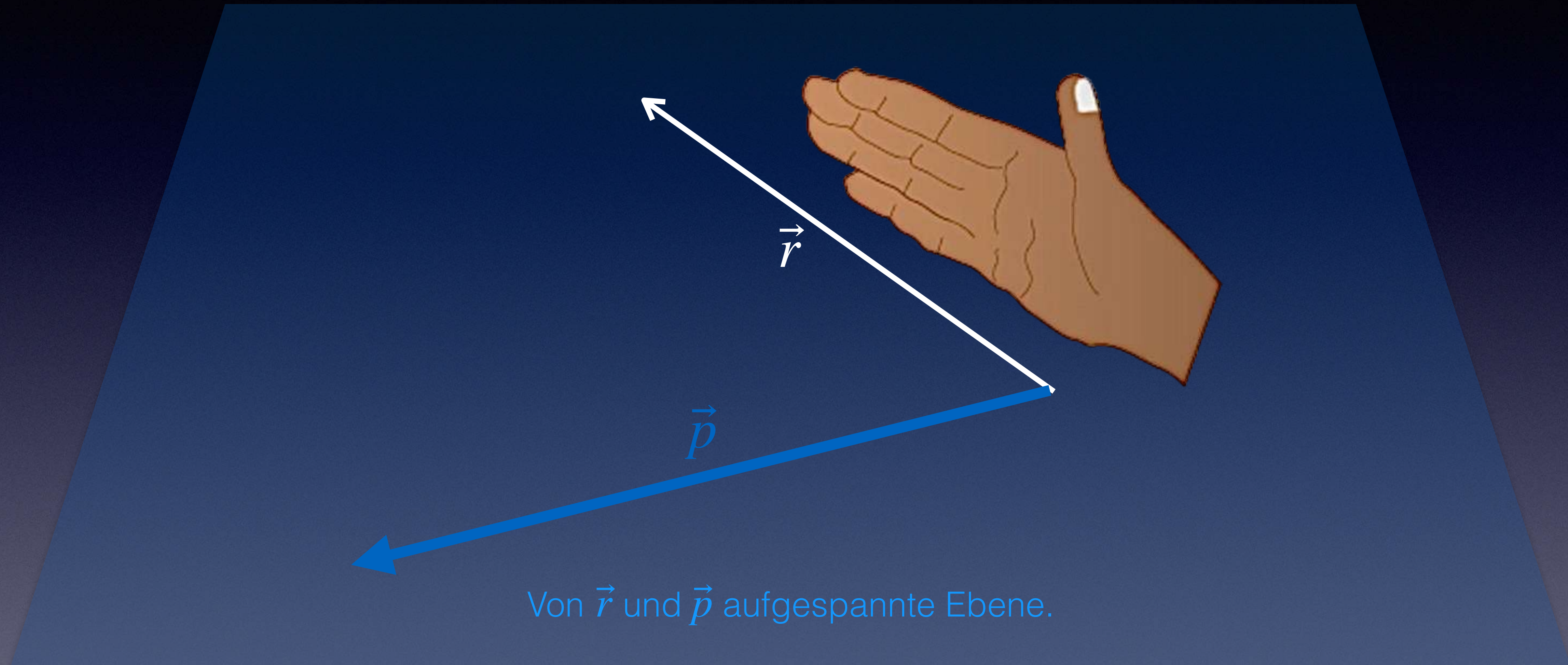
Die formale Definition des Bahndrehimpulses beinhaltet, wie wir schon gesehen haben, ein Vektor-Kreuzprodukt. Das Kreuzprodukt ist eine Operation, bei der zwei Vektoren kombiniert werden, um einen dritten Vektor zu erzeugen, der senkrecht zu der durch die ursprünglichen Vektoren definierten Ebene steht:

$$\vec{L}_{\text{trans}} = \vec{r} \times \vec{p} = \left\langle r_y p_z - r_z p_y, r_z p_x - r_x p_z, r_x p_y - r_y p_x \right\rangle .$$

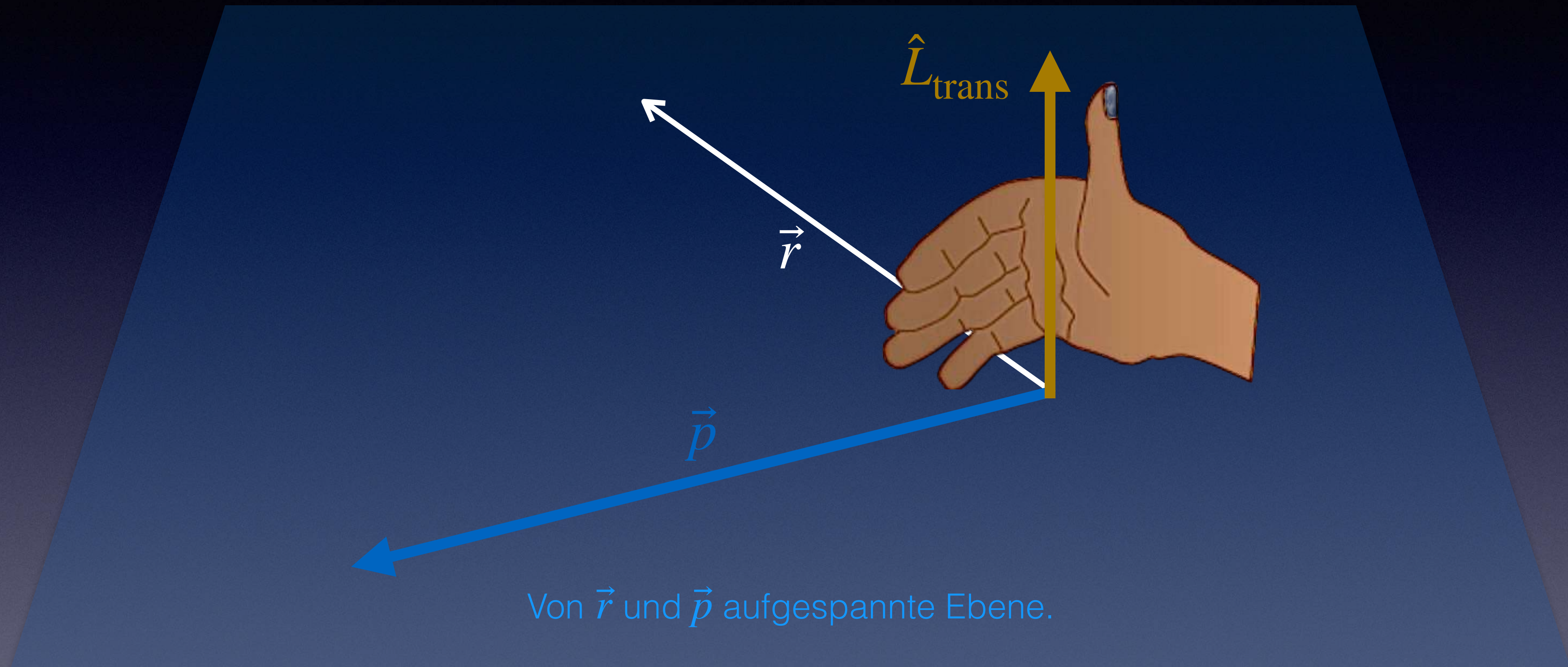
Die Größe

$$\left| \vec{L}_{\text{trans}} \right| = \left| \vec{r} \times \vec{p} \right| = \left| \vec{r} \right| \left| \vec{p} \right| \sin \angle(\vec{r}, \vec{p}) \equiv \left| \vec{r} \right| \left| \vec{p} \right| \sin \theta$$

bezeichnet den Betrag, mit dem Winkel  $\theta$  zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$ .



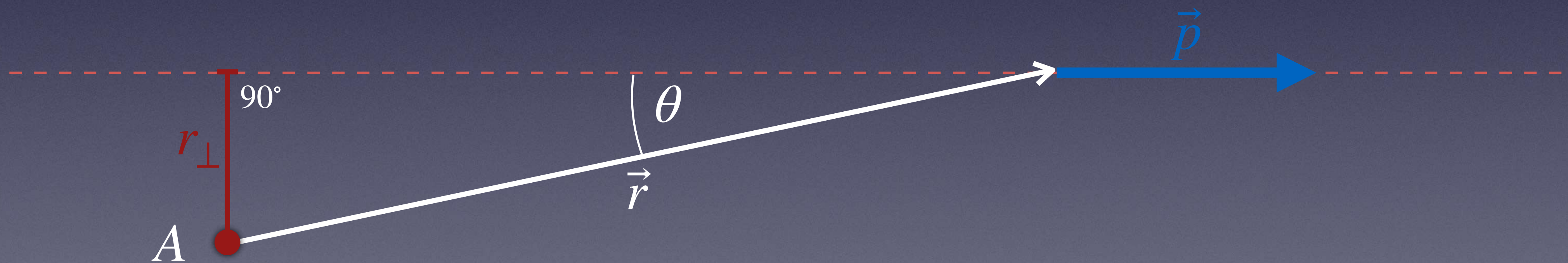
Regel der rechten Hand: Zeichne die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  so, dass sich ihre Enden an der gleichen Stelle befinden.  
Richte die Finger der rechten Hand in die Richtung von  $\vec{r}$  aus und ...



Regel der rechten Hand: ... verdrehe dann die Finger in Richtung von  $\vec{p}$  - möglicherweise musst du deine Hand umdrehen, um dies tun zu können. Strecke jetzt noch deinen Daumen aus. Dein Daumen zeigt dann in die Richtung des Bahn-Drehimpulsvektors  $\hat{L}_{\text{trans}}$ .



Die Größe  $|\vec{r}| \sin \theta$  (im Betrag des Kreuzprodukts) hat eine geometrische Bedeutung. Wie unten dargestellt, ist sie die Komponente von  $\vec{r}$  senkrecht zu  $\vec{p}$ . Zieht man eine Linie senkrecht zu  $\vec{p}$  durch den Punkt  $A$ , um den  $\vec{L}$  berechnet werden soll, so ist  $r_{\perp} = |\vec{r}| \sin \theta$  der Abstand entlang dieser Linie vom „Schwanz“ von  $\vec{r}$  zu der Linie, die in Verlängerung des Impulses (oder der Geschwindigkeit) liegt.  $r_{\perp}$  steht in engem Zusammenhang mit dem Stoßparameter  $b$ , der im vorangegangenen Kapitel über Kollisionen eingeführt wurde.



Ausgehend von den Komponenten zweier Vektoren, lässt sich das Kreuzprodukt in Form von Einheitsvektoren  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  und  $\hat{k}$  entlang der drei Achsen berechnen. Man beachte, dass

$$\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0}, \hat{j} \times \hat{j} = \vec{0} \text{ und } \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0},$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \text{ und } \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \text{ sowie}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \text{ und } \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

gilt.

Falls  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  in der  $xy$ -Ebene liegen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{p} &\equiv (r_x \hat{i} + r_y \hat{j}) \times (p_x \hat{i} + p_y \hat{j}) \\ &= (r_x p_x) \hat{i} \times \hat{i} + (r_y p_y) \hat{j} \times \hat{j} + (r_x p_y) \hat{i} \times \hat{j} + (r_y p_x) \hat{j} \times \hat{i} \\ &= \hat{0} + \hat{0} + (r_x p_y - r_y p_x) \hat{k}.\end{aligned}$$

Für beliebige Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  folgt das bekannte Ergebnis

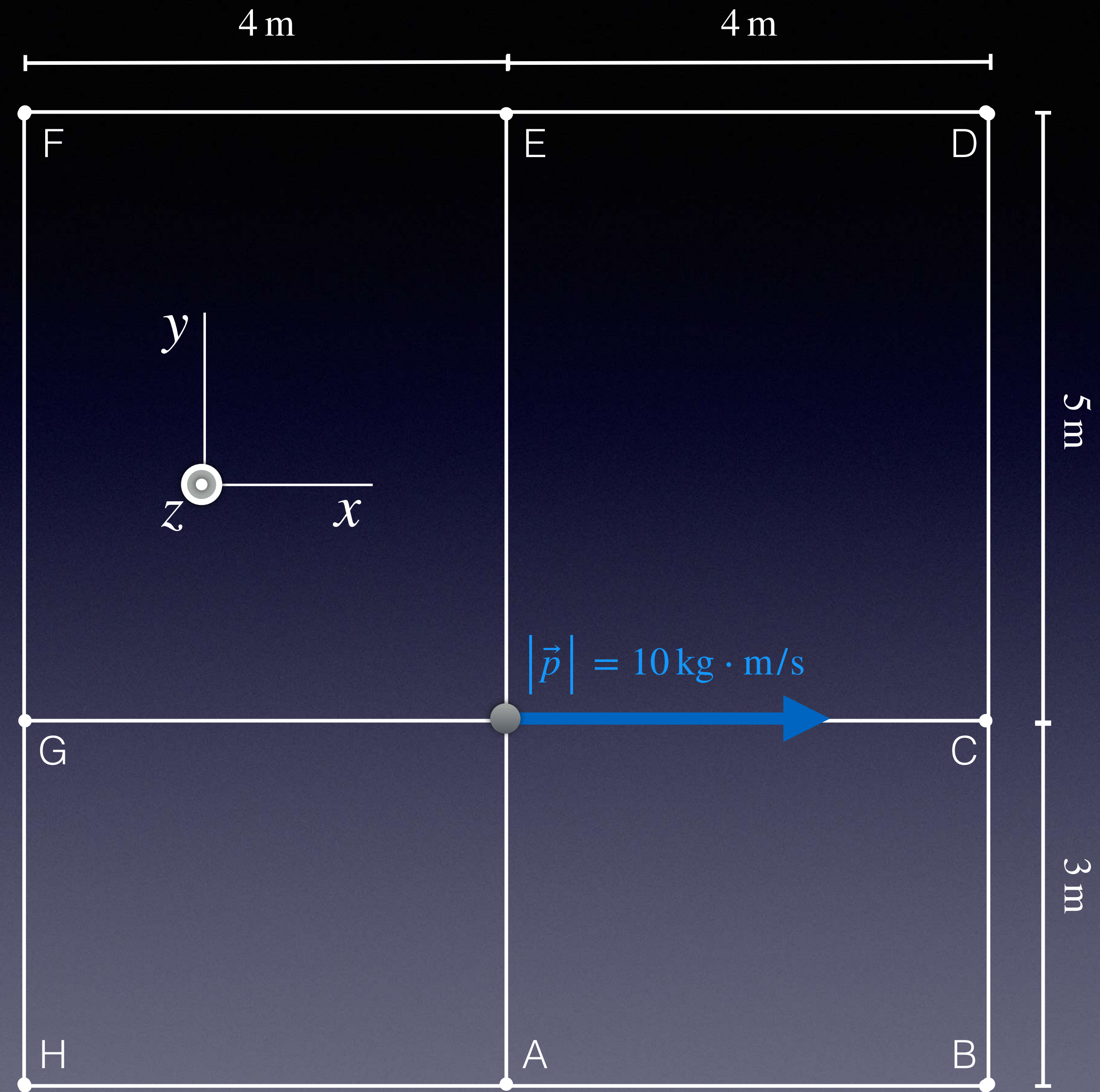
$$\vec{r} \times \vec{p} = \left\langle r_y p_z - r_z p_y, r_z p_x - r_x p_z, r_x p_y - r_y p_x \right\rangle.$$

Man beachte den zyklischen Charakter der Indizes:  $x : yz, y : zx, z : xy$ .

Da es schwieriger ist, eine Situation in drei Dimensionen zu skizzieren, werden wir, wann immer möglich, mit zweidimensionalen Projektionen auf eine Ebene arbeiten. Wenn z.B.  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  in der  $xy$ -Ebene liegen, zeigt  $\vec{r} \times \vec{p}$  entweder in  $+z$ -Richtung (aus der Seite heraus,  $\odot$ ) oder in die  $-z$ -Richtung (in die Seite hinein,  $\otimes$ ). Das Symbol  $\odot$  soll die Spitze eines Pfeils andeuten, der sich auf dich zubewegt (der Drehimpuls zeigt zu dir hin). Das Symbol  $\otimes$  soll an die Federn am Ende eines Pfeils erinnern, der sich von dir wegbewegt (der Drehimpuls zeigt von dir fort).

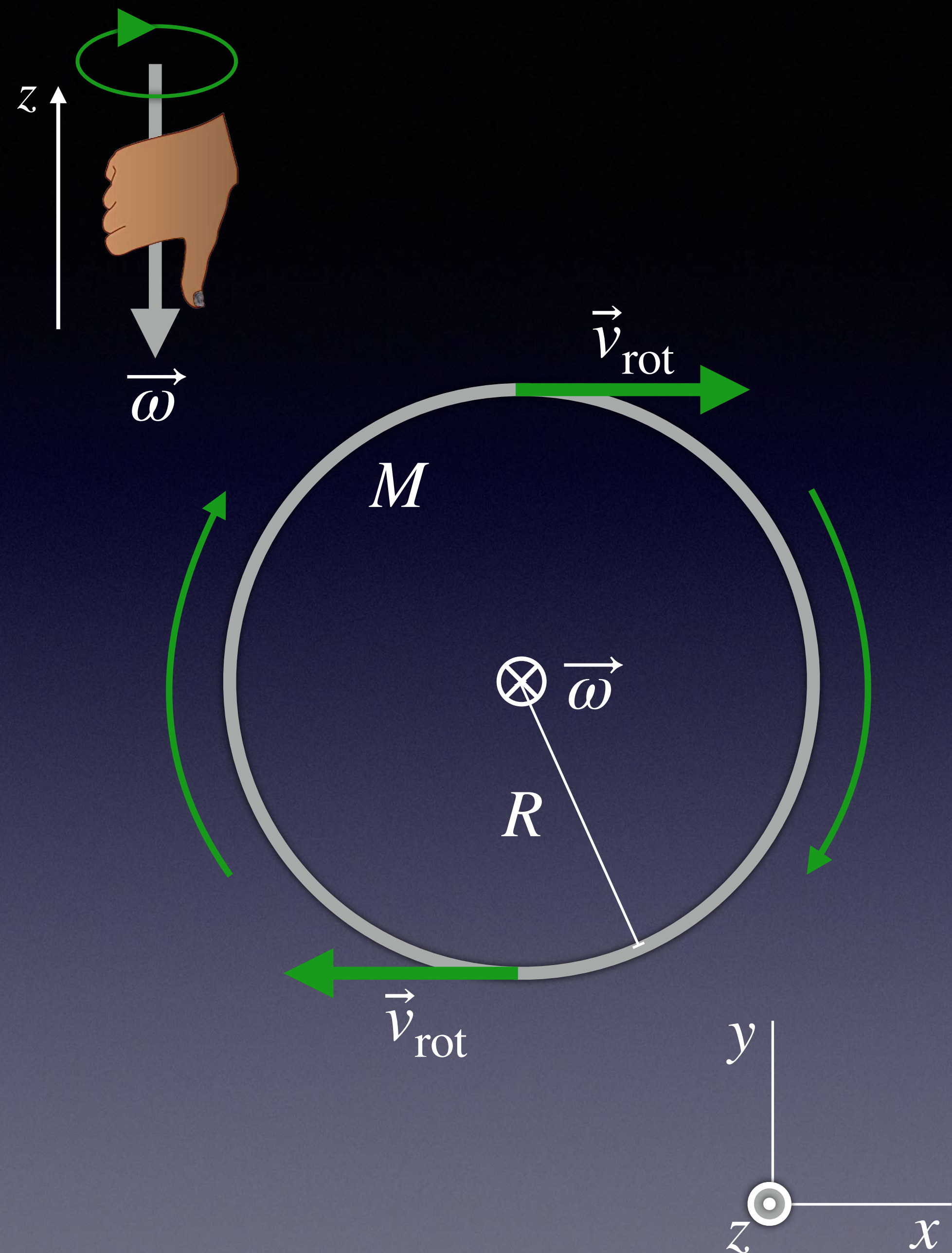
# Kontrollpunkt 2

(1) Berechne mit drei verschiedenen Methoden (Kreuzprodukt, mit  $|\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$ , mit  $r_{\perp}$ ) den Drehimpuls des Teilchens relativ zum Ort B. (2) Wie verhält sich dieser Wert zum Drehimpuls desselben Teilchens relativ zum Ort A und zum Ort C? (3) Und wie zum Ort D? (4) Für welche Positionen ist der Drehimpuls jeweils gleich (und weshalb)



# Eigendrehimpuls

Wir haben gerade gesehen, wie man den Bahndrehimpuls eines Punktteilchens berechnet. Ein ausgedehntes Objekt, das sich um seine eigene Achse dreht (wie die Erde), kann jedoch nicht als Punktteilchen modelliert werden. Indem wir ein solches Objekt als eine Ansammlung von Punktteilchen modellieren und ihren Bahndrehimpuls addieren, werden wir sehen, dass es einen einfachen Weg gibt, den (Eigen-) Drehimpuls eines Systems wie eines sich drehenden Reifens zu berechnen.



In Kapitel 9 haben wir festgestellt, dass es sinnvoll ist, die kinetische Energie eines Mehrteilchensystems als  $E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}$  zu schreiben (keine Vibration). Wir werden sehen, dass es in ähnlicher Weise sinnvoll ist, den (gesamten) Drehimpuls eines Mehrteilchensystems als Bahndrehimpuls  $\vec{L}_{\text{trans,A}}$  auszudrücken, der mit der Bewegung des Massenschwerpunkts relativ zu einem Ort A verbunden ist, plus einem Rotationsteil  $\vec{L}_{\text{rot}}$ , der den Eigendrehimpuls relativ zum Massenschwerpunkt des Systems darstellt.



Betrachten wir den Reifen, das sich mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  um eine durch seinen Schwerpunkt (siehe vor-vorangehende Folie) gehende, feste Achse dreht. Der größte Teil der Masse  $M$  befindet sich in dem dünnen Reifen, so dass wir Speichen und Nabe vernachlässigen können. Dann erhalten wir mit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ für den Reifen } |\vec{v}| = |\vec{\omega}| R,$$

$$\vec{L}_{\text{rot}} = M |\vec{\omega}| R^2 \hat{\omega}.$$

Mit dem Trägheitsmoment\*  $I_z = MR^2$  erhalten wir schließlich

$$\vec{L}_{\text{rot}} = I_z \vec{\omega}.$$

\* im allgemeinsten Fall ist  $I$  ein Tensor.

Das Ergebnis  $\vec{L}_{\text{rot}} = I\vec{\omega}$  ist allgemein gültig und gilt für jedes Objekt, dessen Atome alle die gleiche Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ , aber unterschiedliche lineare Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  aufweisen, abhängig von ihren jeweiligen Abständen zur Achse.

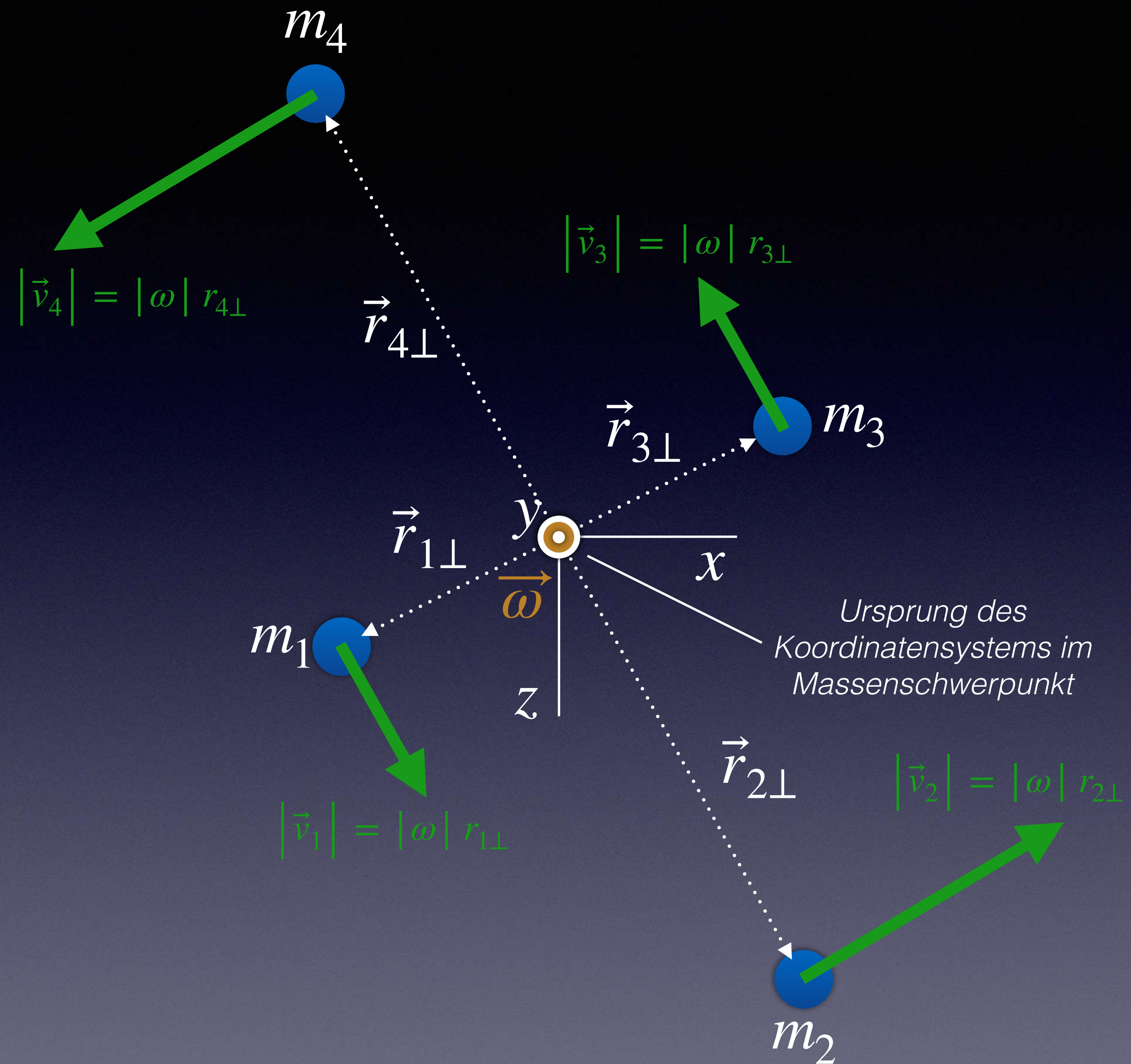
$$|\vec{L}_{\text{rot}}| = \sum_{i=1}^4 m_i |\vec{r}_{i\perp}| |\vec{v}_i|,$$

$$|\vec{L}_{\text{rot}}| = \sum_{i=1}^4 m_i |\vec{r}_{i\perp}|^2 |\vec{\omega}|, \text{ oder}$$

$$|\vec{L}_{\text{rot}}| = |\vec{\omega}| \sum_{i=1}^4 m_i |\vec{r}_{i\perp}|^2 \equiv I_y |\vec{\omega}|.$$

Darin bezeichnet  $I_y = \sum_{i=1}^4 m_i |\vec{r}_{i\perp}|^2$  das

Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse, die hier mit der Rotationsachse zusammenfällt.



Diese Art der Berechnung des Eigendrehimpulses  $\vec{L}_{\text{rot}}$  ist oft einfacher zu handhaben als der einfachere Ausdruck  $\vec{L}_{\text{rot}} = \vec{r} \times \vec{p}$  in Form von Kreuzprodukten. Dies ist vor allem deshalb so, weil die Trägheitsmomente  $I$  für gängige Objekte in Tabellen nachgeschlagen werden können.

In Kapitel 9 haben wir zum Beispiel gesehen, dass das Trägheitsmoment um eine Achse, die durch den Mittelpunkt einer festen Scheibe mit gleichmäßiger Dichte und Radius  $R$  geht  $I = \frac{1}{2}MR^2$  ist, während das Trägheitsmoment um eine Achse, die durch den Mittelpunkt einer festen Kugel gleichmäßiger Dichte und Radius  $R$  geht  $I = \frac{2}{5}MR^2$  ist.

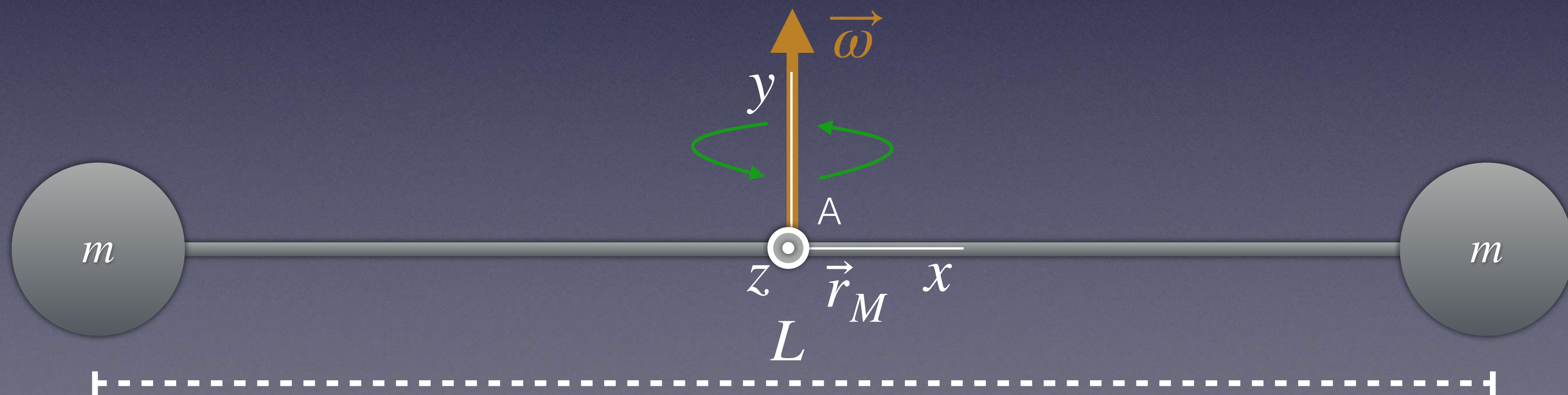
Da  $\left| \vec{L}_{\text{rot}} \right| = I \left| \vec{\omega} \right|$  ist, können wir die mit der Eigenrotation verbundene kinetische Energie  $E_{\text{kin,rot}}$  durch

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} I \left| \vec{\omega}^2 \right| = \frac{1}{2} \frac{\left( I \left| \vec{\omega} \right| \right)^2}{I} = \frac{\left| \vec{L}_{\text{rot}} \right|^2}{2I}$$

ausdrücken. In der bisherigen Diskussion haben wir nur einfache, symmetrische rotierende Systeme betrachtet. In einem später folgenden Abschnitt befassen wir uns mit komplizierteren Situationen.

# Kontrollpunkt 3

K3.1: Eine Hantel dreht sich um ihren Massenschwerpunkt  $\vec{r}_M$  in ihrer Mitte. Die Hantel besteht aus zwei identischen, sehr kleinen Kugeln mit der Masse  $m = 800 \text{ g}$  (für jede Kugel), die an den Enden eines Stabes mit sehr geringer Masse und einer Länge von  $L = 35 \text{ cm}$  angebracht sind. Die Hantel führt 360 Umdrehungen in der Minute aus. (1) Berechne  $\vec{L}_{\text{trans}}$  für eine und beide Kugeln bezüglich A. (2) Berechne  $I_y$ . (3) Berechne  $\vec{L}_{\text{rot}}$  für beide Kugeln. (4) Berechne  $E_{\text{kin,rot}}$ .



# Gesamt-Drehimpuls

Die kinetische Energie kann sinnvollerweise als

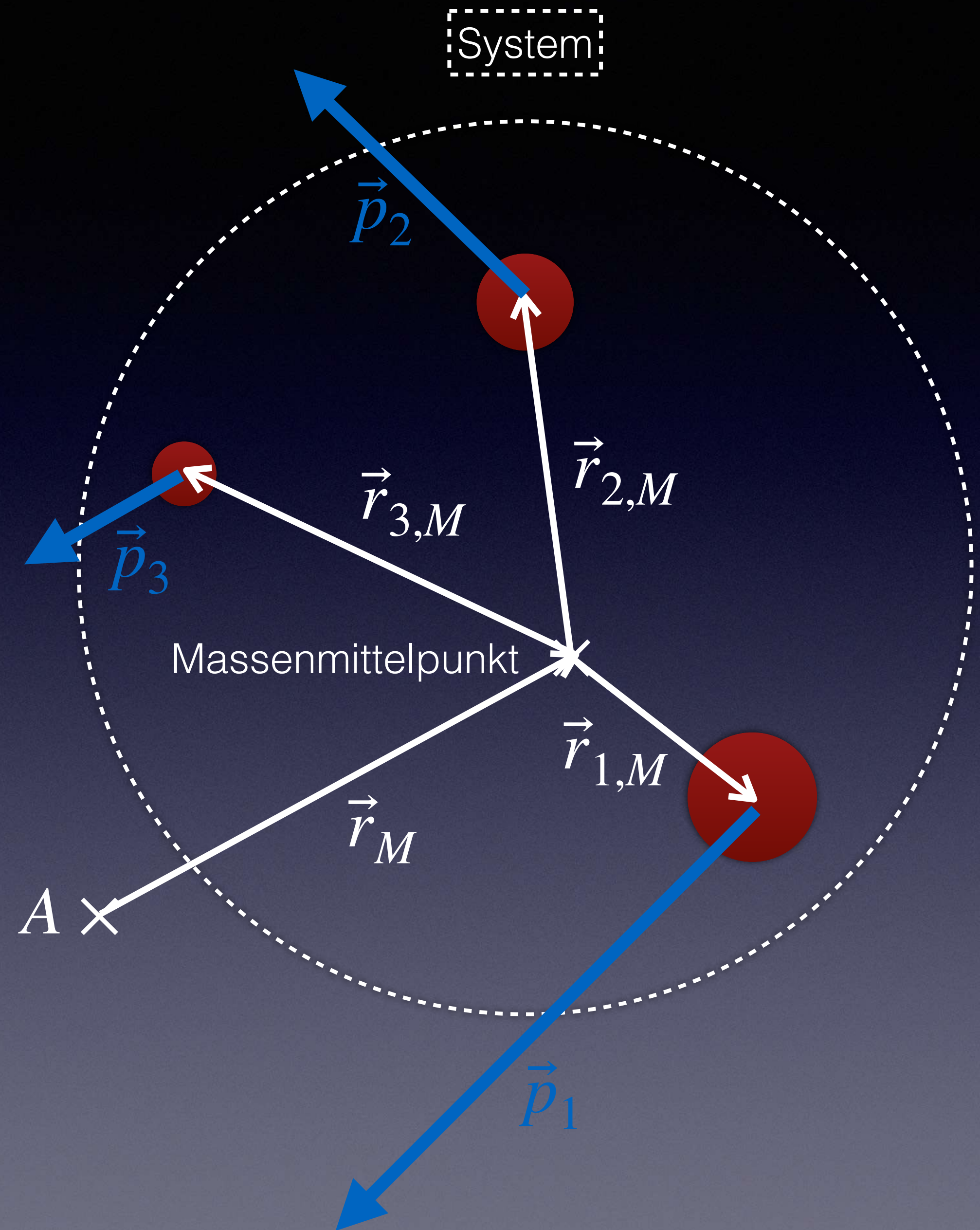
$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rel}}$$

ausgedrückt werden, wobei „rel“ für „relativ zum Massenmittelpunkt“ steht und Rotations- und Vibrationsenergie zusammenfasst (siehe Kapitel 9). In ähnlicher Weise kann der Drehimpuls bezüglich Position  $A$  sinnvollerweise ausgedrückt werden als

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rel}},$$

wobei wir den Anteil, der relativ zum Massenschwerpunkt  $\vec{r}_M$  ist, als Eigendrehimpuls (oder Rotationsdrehimpuls)  $\vec{L}_{\text{rot}}$  bezeichnen.

Wir berechnen den Gesamtdrehimpuls relativ zum Ort  $A$  eines aus drei Massen bestehenden Systems und beweisen, dass  $\vec{L}_A = \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rel}}$  ist, wobei das System nicht starr sein muss. Wir geben die Positionen der einzelnen Massen relativ zum Ort  $A$  an, indem wir von  $A$  zunächst zum Massenschwerpunkt (Vektor  $\vec{r}_M$ ) und von dort weiter zu den einzelnen Massen (Vektoren  $\vec{r}_{i,M}$ ) gehen. Position  $A$  muss dabei nicht in der gleichen Ebene liegen wie die Massen, und auch die Impulsvektoren  $\vec{p}_i$  müssen nicht unbedingt in der Ebene der Massen liegen.





$$\vec{L}_A = (\vec{r}_M + \vec{r}_{1,M}) \times \vec{p}_1 + (\vec{r}_M + \vec{r}_{2,M}) \times \vec{p}_2 + (\vec{r}_M + \vec{r}_{3,M}) \times \vec{p}_3$$

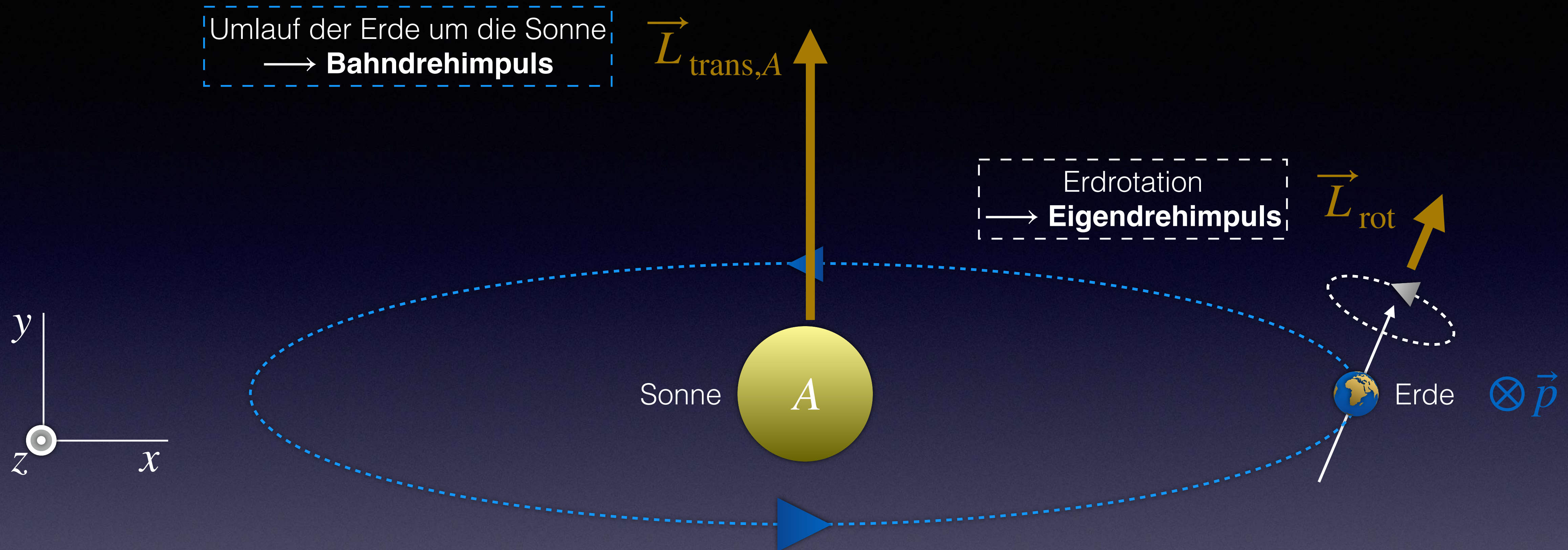
$$\vec{L}_A = (\vec{r}_M \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)) + (\vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_{3,M} \times \vec{p}_3)$$

$$\vec{L}_A = \vec{r}_M \times \vec{p}_{\text{tot}} + (\vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_{3,M} \times \vec{p}_3)$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rel}}$$

Der erste Term ist der Drehimpuls bezüglich  $A$ , den das System hätte, wenn die gesamte Masse im Zentrum  $\vec{r}_M$  der Masse konzentriert wäre.

Der zweite Term ist der Drehimpuls des Systems relativ zum Massenschwerpunkt  $\vec{r}_M$  des Systems, den wir auch als Eigendrehimpuls bezeichnen.



Bahndrehimpuls der Erde (bezogen auf die Sonne) und Eigendrehimpuls der Erde (bezogen auf den Massenschwerpunkt der Erde). In dem dargestellten Zeitpunkt zeigt der Impuls  $\vec{p}$  der Erde in die Folie hinein (-z-Richtung). Die Erdachse ist von der Senkrechten zur Ebene der Umlaufbahn weggekippt, so dass die beiden

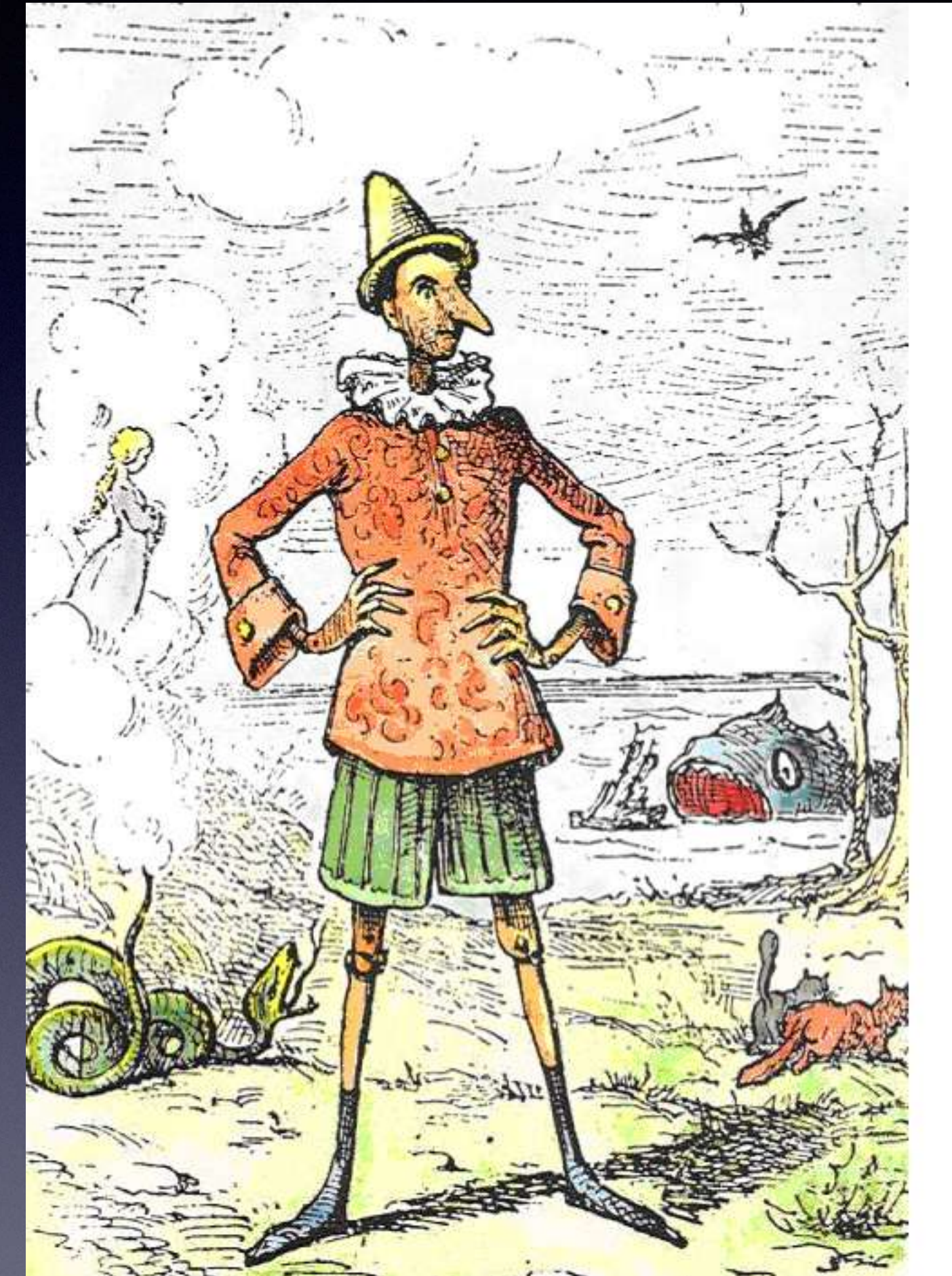
Drehimpulse nicht parallel sind:  $\vec{L}_A = \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rot}}$ .

Für ein ideales Punktteilchen oder die „kollabierte“ Version mehrerer Punktteilchen eines Mehrteilchensystems ist der Bahndrehimpuls die einzige Art von Drehimpuls, die es gibt, ebenso wie die translatorische kinetische Energie die einzige Art von kinetischer Energie ist, die ein Punktteilchen haben kann.

In Kapitel 9 haben wir gesehen, dass ein starres Objekt, das sich um eine Achse (hier die z-Achse) dreht, die vom Massenschwerpunkt um  $\vec{r}_M$  entfernt ist, eine kinetische Energie von  $\frac{1}{2}I_g\omega^2$ , mit  $I_g = Mr_M^2 + I_z$ , besitzt (Steinerscher Satz). Es ist leicht zu zeigen, dass der (Gesamt-) Drehimpuls eines solchen rotierenden starren Objekts durch  $I_g\vec{\omega}$  gegeben ist.

# Kontrollpunkt 4

K4.1: Pinocchio reitet auf einem Pferd auf einem Karussell, das sich von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn dreht, wobei seine lange Nase immer nach vorne, in Richtung seiner momentanen Geschwindigkeit, zeigt. (1) Ist Pinocchios Bahndrehimpuls in Bezug auf den Mittelpunkt des Karussells gleich Null oder ungleich Null? (2) Sollte er ungleich Null sein, welche Richtung hat er? (3) Ist sein Eigendrehimpuls Null oder ungleich Null? (4) Falls er ungleich Null ist, welche Richtung hat er?



Pinocchio nach Enrico Mazzanti (1852-1910) - dem ersten Illustrator der „*Storia di un burattino*“.

# Drehmoment

Der (lineare) Impuls  $\vec{p}_{\text{sys}}$  eines Systems kann durch eine von der Umgebung ausgeübte Kraft  $\vec{F}_{\text{net}}$  verändert werden.

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  eines Systems kann durch ein Moment - eine Kraft, die außerhalb des Zentrums wirkt - verändert werden. Eine solche Wirkung wird als „Drehmoment“  $\vec{M}$  bezeichnet. Die Wirksamkeit des Drehmoments hängt davon ab, wo die Kraft angreift. Daher umfasst die Definition des Drehmoments nicht nur die Größe und Richtung der Kraft, sondern auch die Position, an der die Kraft wirkt, bezogen auf einen bestimmten Bezugspunkt, den wir zwar frei wählen dürfen, aber angeben müssen.

Generell ist das Drehmoment  $\vec{M}$  als vektorielles Kreuzprodukt definiert. Hierbei gibt die Richtung des Drehmomentvektors den Drehsinn des Drehmoments an:

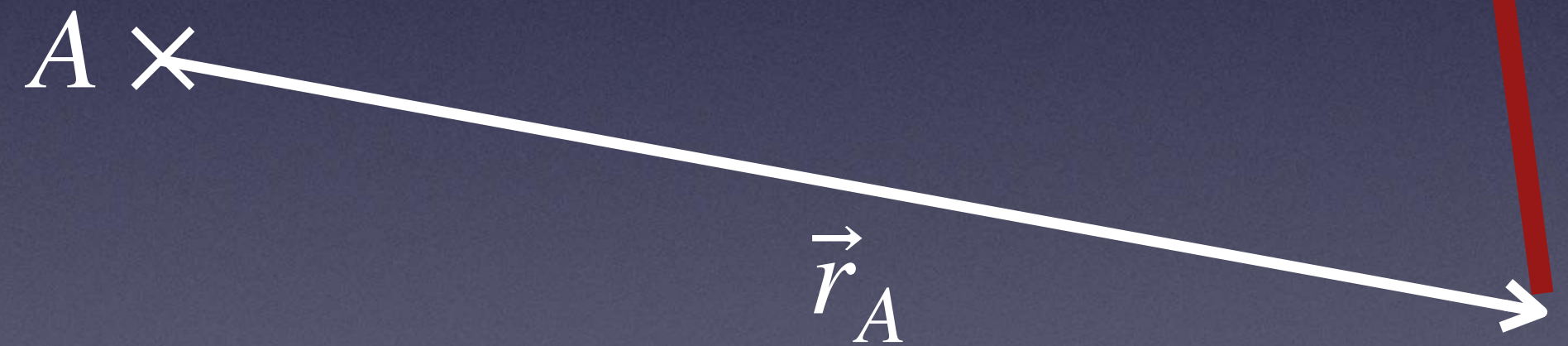
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} .$$

Wirken mehrere Kräfte  $\vec{F}_i$  auf verschiedene Punkte  $\vec{r}_i$  ein, so ist das gesamte Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net}}$  die vektorielle Summe der einzelnen Drehmomente  $\vec{M}_i$ .

Drehmoment bezüglich A  
 $\longrightarrow \vec{M}_A$

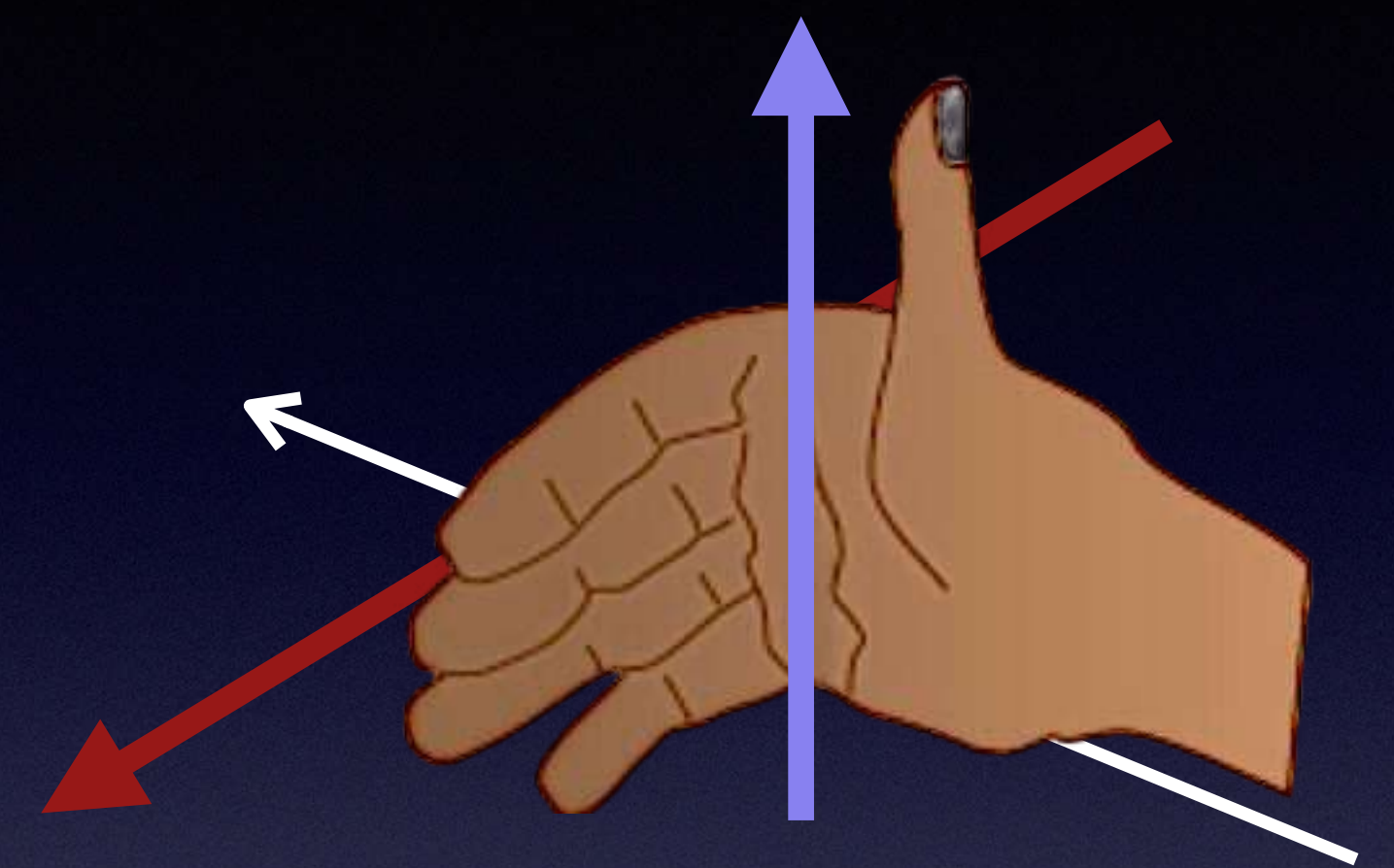
$$\odot \vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

frei wählbarer Referenzpunkt  
 $\longrightarrow A$



Kraft  
 $\longrightarrow \vec{F}$

Angriffspunkt der Kraft  
 $\longrightarrow \vec{r}_A$



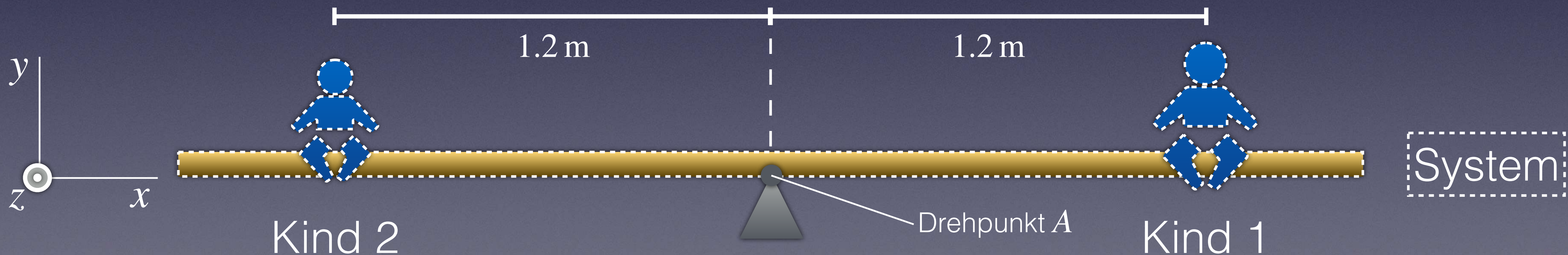


Die Maßeinheit des Drehmoments  $\vec{M}$  ist das Newtonmeter  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

Die Einheit der mechanischen Arbeit ist ebenfalls das Newtonmeter und hat den Namen „Joule“ ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ). Für das Drehmoment darf der Einheitenname „Joule“ aber nicht verwendet werden, denn Drehmoment und Arbeit sind unterschiedliche physikalische Größen, die sich nicht ineinander umrechnen lassen. Außerdem ist das Drehmoment ein Pseudovektor (Richtung bleibt bei Punktspiegelungen erhalten), während die mechanische Arbeit eine skalare Größe ist.

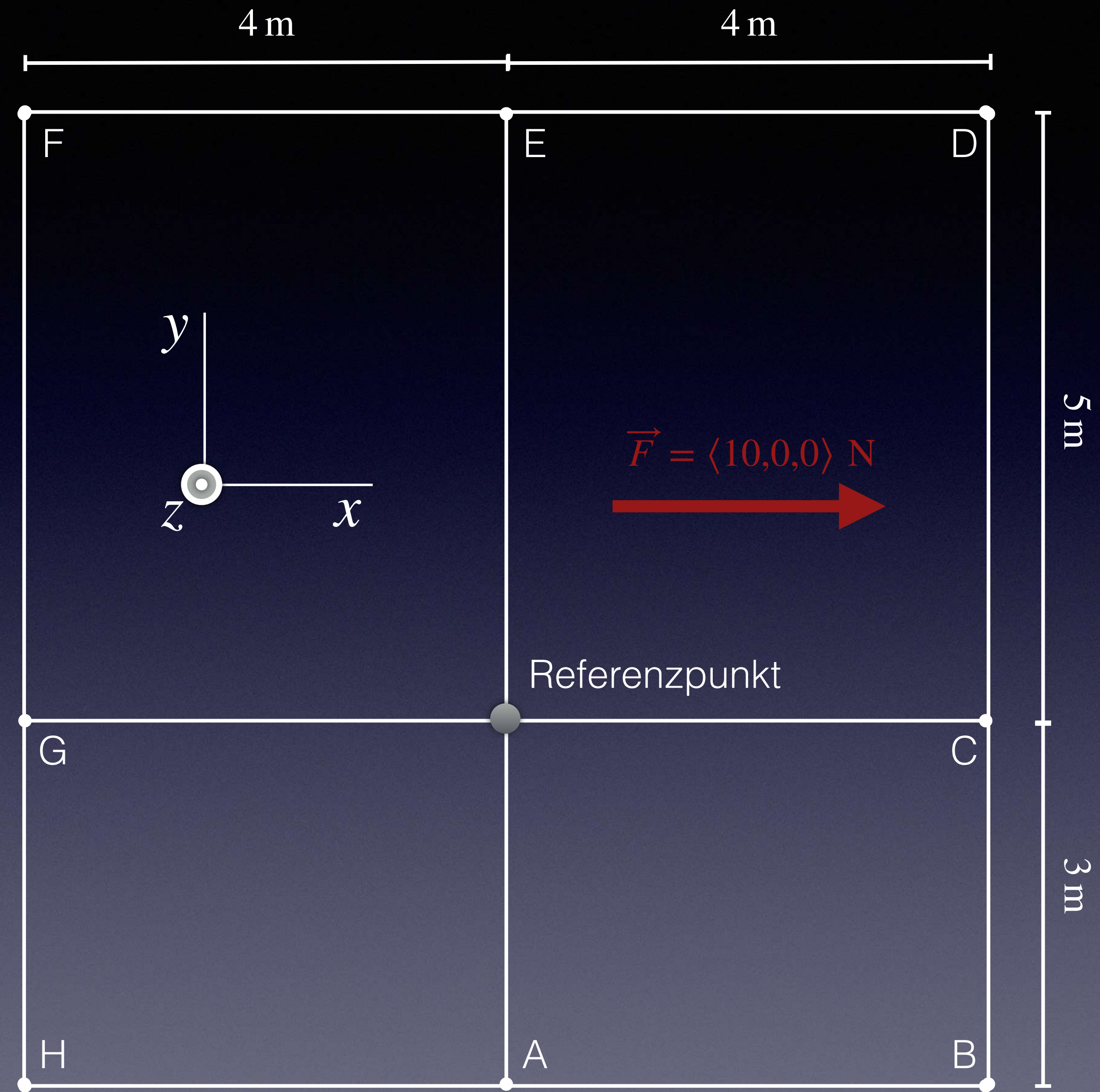
# Kontrollpunkt 5

K5.1: Zwei Kinder sitzen jeweils in einem Abstand von **1.2 m** zum Drehpunkt (Auflagepunkt) auf einer Wippe. Die Masse von Kind 1 ist **30 kg**, und die Masse von Kind 2 ist **20 kg**. Nehmen wir zusätzlich an, dass die Masse der Wippe selbst klein ist. (1) Welche Kräfte wirken auf das aus Wippe und Kindern bestehende System? (2) Wie groß ist das (Netto-) Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net}}$  des Systems aus Kindern und Wippe um den Drehpunkt?



# Kontrollpunkt 6

K6.1: (1) Berechne die von der Kraft  $\vec{F}$  hervorgerufenen Drehmomente  $\vec{M}_i$  für die Positionen A bis H (Angriffspunkte) mit Bezug auf den Referenzpunkt. (2) Wie groß ist das (Netto-) Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net}}$  in Bezug auf den Referenzpunkt?



# Das Prinzip Drehimpuls

Das Prinzip Drehimpuls setzt die Änderung des Drehimpulses eines Systems mit dem Nettodrehmoment in Beziehung, das auf das System aufgrund der Umgebung einwirkt. Wie das Impulsprinzip kann es in verschiedenen Formen formuliert werden:

$$\vec{L}_{f,A} = \vec{L}_{i,A} + \vec{M}_{\text{net},A} \Delta t ,$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{\text{net},A} ,$$

$$\Delta \vec{L}_{A,\text{sys}} + \Delta \vec{L}_{A,\text{umg}} = \vec{0} .$$

In jedem Fall sind Drehimpuls und Drehmoment relativ zum Ort  $A$  definiert. Diese Formulierungen gelten für ein System, das als ein einzelnes Teilchen modelliert wird.

Betrachtet man die Ableitungsform des Prinzips Drehimpuls, kann man zeigen, dass es mit dem Prinzip Impuls übereinstimmt:

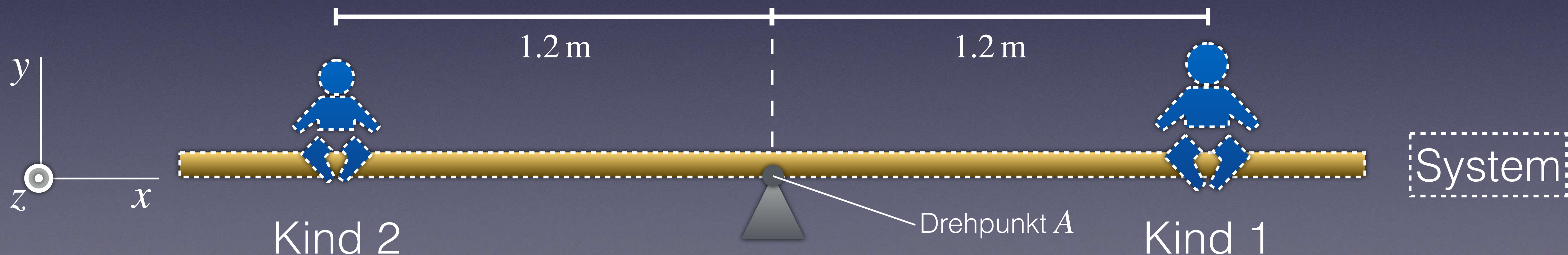
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d(\vec{r}_A \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{v} \times \gamma m \vec{v} + \vec{r}_A \times \vec{F}_{\text{net},A},$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{0} + \vec{M}_{\text{net},A}.$$

# Kontrollpunkt 7

K7.1: Zwei Kinder sitzen jeweils in einem Abstand von  $1.2\text{ m}$  zum Drehpunkt (Auflagepunkt) auf einer Wippe. Die Masse von Kind 1 ist  $30\text{ kg}$ , und die Masse von Kind 2 ist  $20\text{ kg}$ . Nehmen wir zusätzlich an, dass die Masse der Wippe selbst klein ist. (1) Berechne den Drehimpuls des Systems für  $\Delta t = 0.4\text{ s}$ , nachdem es aus der Ruhelage entlassen wurde. (2) In welche Richtung weist der Drehimpulsvektor?



Es gibt Parallelen zwischen den drei Grundprinzipien, die wir bisher kennengelernt haben. Jedes Prinzip setzt eine Änderung einer Eigenschaft des Systems (Impuls, Energie oder Drehimpuls) in Beziehung zu Wechselwirkungen mit Objekten in der Umgebung:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{net}} \Delta t ,$$

$$\Delta E = W + Q ,$$

$$\Delta \vec{L}_A = \vec{M}_{\text{net},A} \Delta t .$$



Impuls, Energie und Drehimpuls sind allesamt Erhaltungsgrößen:

$$\Delta \vec{p}_{\text{sys}} + \Delta \vec{p}_{\text{umg}} = \vec{0} ,$$

$$\Delta E_{\text{sys}} + \Delta E_{\text{umg}} = 0 ,$$

$$\Delta \vec{L}_{\text{sys},A} + \Delta \vec{L}_{\text{umg},A} = \vec{0} .$$

Alle drei Grundprinzipien gelten für jedes beliebige System und jede beliebige Umgebung. In komplizierten Situationen kann es notwendig sein, alle drei Prinzipien anzuwenden, um das Verhalten eines Systems vorherzusagen oder zu erklären.

# Systeme aus mehreren Teilchen

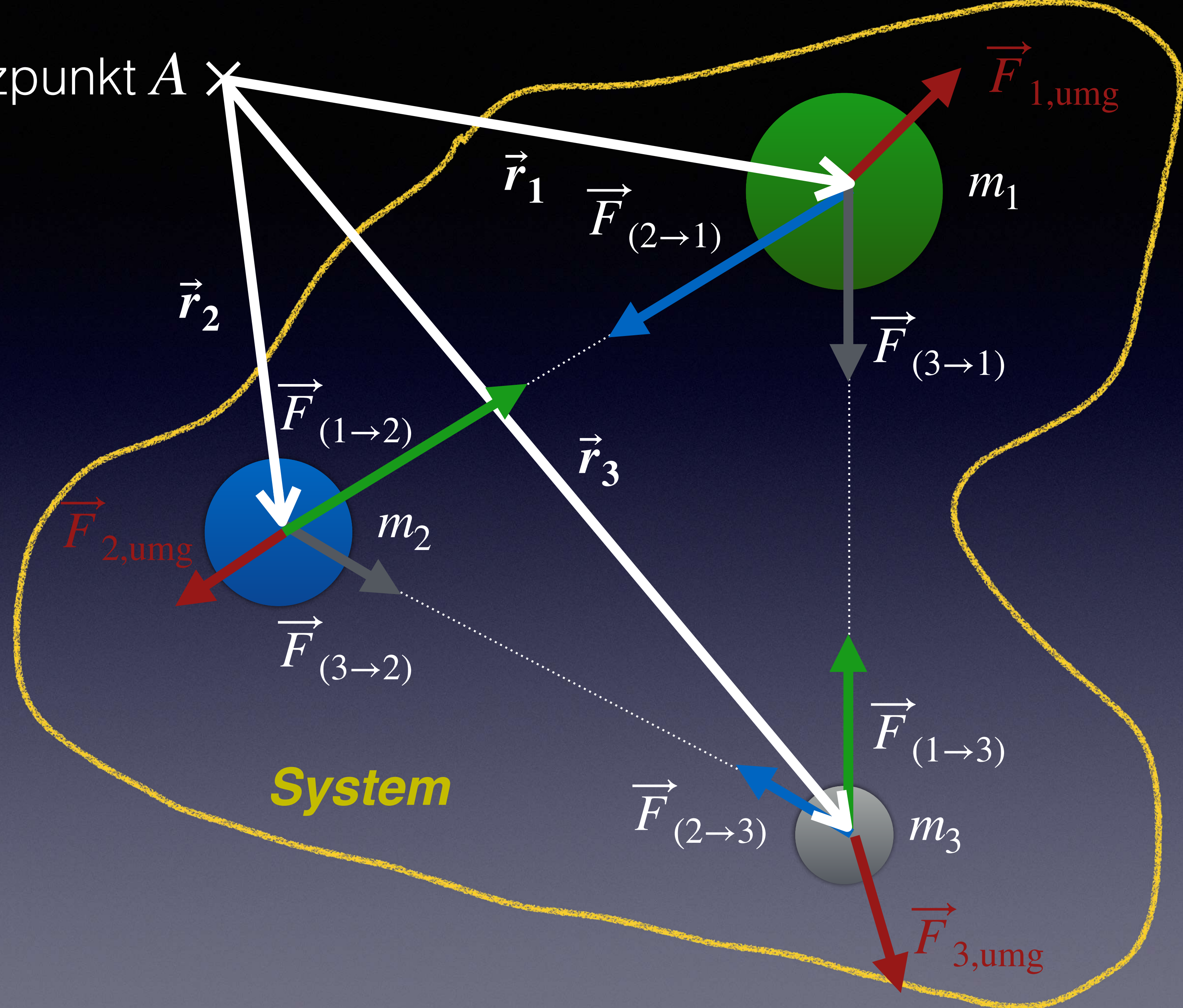
Das Prinzip Drehimpuls hat uns bereits neue Einblicke in die Bewegung eines einzelnen Teilchens gegeben, auf das ein Drehmoment aufgrund einer einzelnen Kraft einwirkt. Das Prinzip wird zu einem wirklich mächtigen Werkzeug, wenn wir es auf Mehrteilchensysteme ausdehnen, auf die mehrere Drehmomente einwirken. So werden wir beispielsweise in der Lage sein, das nicht unbedingt intuitive Verhalten von Kreisel und Gyroskopen zu verstehen.

Bei der Herleitung lehnen wir uns eng an die Herleitung einer Mehrteilchenversion des Impulsprinzips in Kapitel 3 an. Der Grundgedanke ist, dass sich aufgrund der Reziprozität der Kräfte die Drehmomente innerhalb eines Mehrteilchensystems aufheben und nur die von Objekten in der Umgebung ausgehenden Drehmomente den Drehimpuls des Systems verändern können.

Vereinfachend betrachten wir ein System, das nur aus drei Teilchen besteht. Der Ansatz kann auf Systeme mit beliebig vielen Teilchen übertragen werden.

Referenzpunkt  $A$

Wir schreiben nachfolgend das Prinzip Drehimpuls für jedes der drei Teilchen auf. Wir messen Drehimpulse und Drehmomente relativ zum Ort  $A$ . Aber um das Ganze übersichtlich zu halten, vernachlässigen wir den tiefgestellten Index  $A$  in allen Gleichungen.  $\vec{L}_1$  ist also der Drehimpuls von  $m_1$  in Bezug auf  $A$ .



$$\Delta \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \left( \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} \right) \Delta t$$

$$\Delta \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \left( \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} \right) \Delta t$$

$$\Delta \vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \left( \vec{F}_{3,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 3)} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 3)} \right) \Delta t$$

$$\vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} = -\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)}, \quad \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} = -\vec{F}_{(1 \rightarrow 3)} \quad \text{und} \quad \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} = -\vec{F}_{(2 \rightarrow 3)}.$$

Wir addieren die drei Gleichungen unter Verwendung der Reziprozität der Kräfte.

$$\Delta \left( \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 \right) = \left( \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{3,\text{umg}} \right) \Delta t + \dots$$

$$\dots + \left( (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} \right) \Delta t$$

Da elektrische und gravitative Kräfte entlang der Verbindungslinie zwischen den Teilchen wirken, also in Richtung des jeweiligen relativen Positionsvektors, sind alle Kreuzprodukte der zweiten Zeile Null. Folglich heben sich alle mit den inneren Kräften verbundenen Drehmomente auf. Somit erhalten wir (siehe nächste Folie)

$$\Delta \left( \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 \right) = \left( \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{3,\text{umg}} \right) \Delta t$$

Oder, jetzt wieder mit Index A:

$$\Delta \vec{L}_{\text{sys},A} = \vec{M}_{\text{umg},A} \Delta t ,$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{sys},A}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},A} .$$

In Worten: Die Änderungsrate des (Gesamt-) Drehimpulses eines Systems in Bezug auf eine Referenzposition, ist gleich dem Nettodrehmoment der einwirkenden äußeren Kräfte. Oder: Die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Winkelimpuls - man vergleiche mit Kraftstoß beim linearen Impuls.

Oft lohnt es sich, den Ort  $A$  so zu wählen, dass er mit dem aktuellen Massenschwerpunkt  $\vec{r}_M$  zusammenfällt. In diesem Fall vereinfacht sich das Prinzip Drehimpuls wie folgt:

$$\Delta \vec{L}_{\text{sys},M} \equiv \Delta \vec{L}_{\text{rot},M} = \vec{M}_{\text{umg},M} \Delta t ,$$

oder

$$\frac{d\vec{L}_{\text{sys},M}}{dt} \equiv \frac{d\vec{L}_{\text{rot},M}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},M} .$$



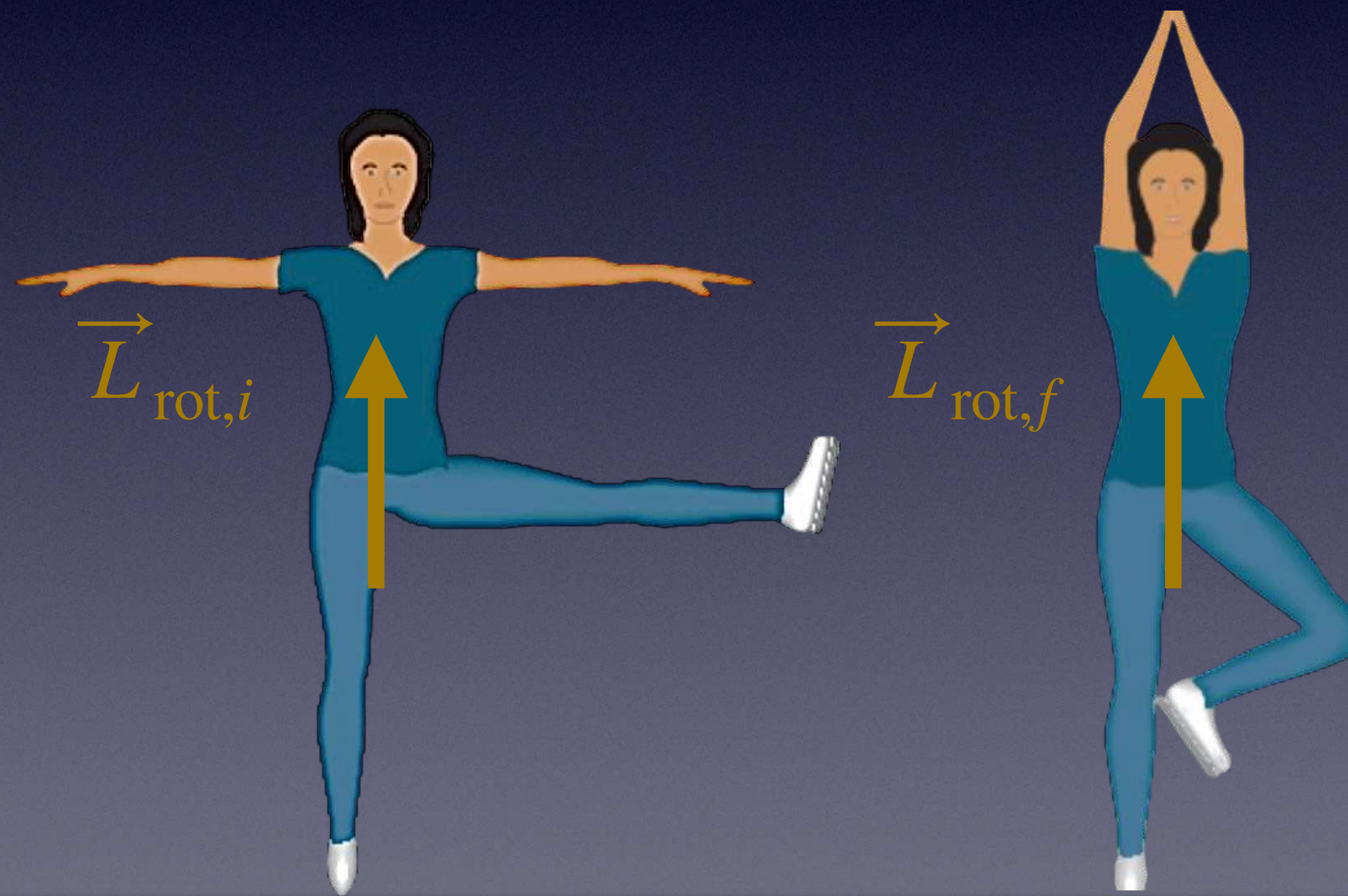
Systeme ohne einwirkendes  
(Netto-) Drehmoment

In einer Situation, in der es kein externes Drehmoment  $\vec{M}_{\text{umg}}$  gibt, ändert sich der Drehimpuls  $\vec{L}_{\text{sys}}$  eines Systems nicht, auch wenn sich das Trägheitsmoment  $I$  des Systems aufgrund einer Änderung der Form oder Konfiguration des Systems ändert. Sportler, wie Eiskunstläufer, Turmspringer oder Tänzer, können diese Tatsache nutzen, um die Rotation ihres Körpers zu verändern:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{rot}}}{dt} = \frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}, \text{ oder (kurz) } I_f\vec{\omega}_f = I_i\vec{\omega}_i.$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{I_i}{I_f}\vec{\omega}_i.$$

Vielleicht hast du schon einmal eine Eisläuferin gesehen, die sich mit ausgestreckten Armen und einem Bein senkrecht auf der Spitze eines Schlittschuhs dreht, dann das Bein einzieht und die Arme in eine senkrechte Position über dem Kopf bringt. Sie dreht sich dann viel schneller.



$$\vec{L}_{\text{rot},f} = \vec{L}_{\text{rot},i}$$

$$I_f < I_i \rightarrow |\vec{\omega}_f| > |\vec{\omega}_i|$$

Jetzt wirst du dich vielleicht zu Recht fragen, wie das eigentlich funktioniert! Weshalb erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn man die Arme und Beine näher an die Drehachse bewegt?

Ein Ansatz besteht darin, die Energieänderungen zu analysieren, die mit dieser Aktion verbunden sind. Der Drehimpuls  $\vec{L}_{\text{rot}}$  der Läuferin ändert sich nicht, d.h. wenn ihr Trägheitsmoment abnimmt ( $I_f < I_i$ ), nimmt die kinetische Energie

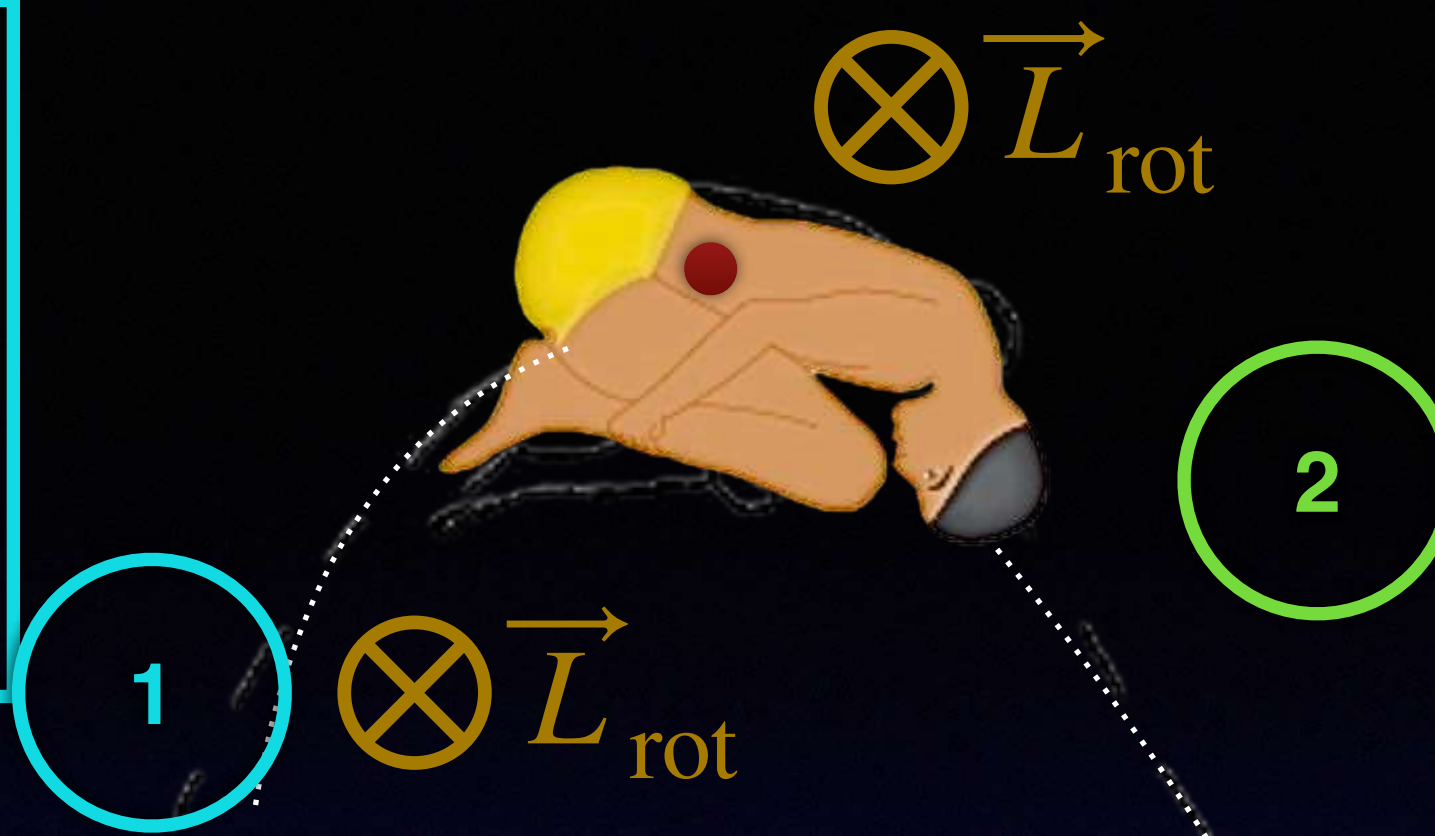
$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} I \left| \vec{\omega} \right|^2 = \frac{\left| \vec{L}_{\text{rot}} \right|^2}{2I}$$

der Läuferin tatsächlich zu. Aber woher stammt die dafür nötige Energie?

Offensichtlich muss die Läuferin chemische Energie aufwenden, um ihre kinetische Energie zu erhöhen. Bei hohen Drehgeschwindigkeiten erfordert es nämlich eine spürbare Anstrengung, Arme und Beine in Richtung der Drehachse nach innen zu ziehen. Dies wäre noch ausgeprägter, wenn sie schwere Gewichte in den Händen hielte.

Eine beliebte physikalische Demonstration besteht darin, sich auf einen Drehstuhl zu setzen und in jeder Hand eine Hantel zu halten. Beginne, dich langsam mit ausgestreckten Armen zu drehen, und ziehe dann die Hände an deine Brust. Es erfordert eine erhebliche (Kraft-) Anstrengung, die Hanteln nach innen zu ziehen. Dabei wird mechanische Arbeit geleistet, die mit einer Umwandlung chemischer Energie einhergeht, und die schließlich zu einer Erhöhung deiner kinetischen Energie führt.

Wenn der Springer vom Brett springt, muss er sich mit den Füßen so abstoßen, dass die Kraft des Brettes auf seine Füße einen beträchtlichen Hebelarm um seinen Massenschwerpunkt hat, so dass er zu dem Zeitpunkt, an dem seine Füße den Kontakt mit dem Brett verlieren, bereits einen nennenswerten Drehimpuls erworben hat.



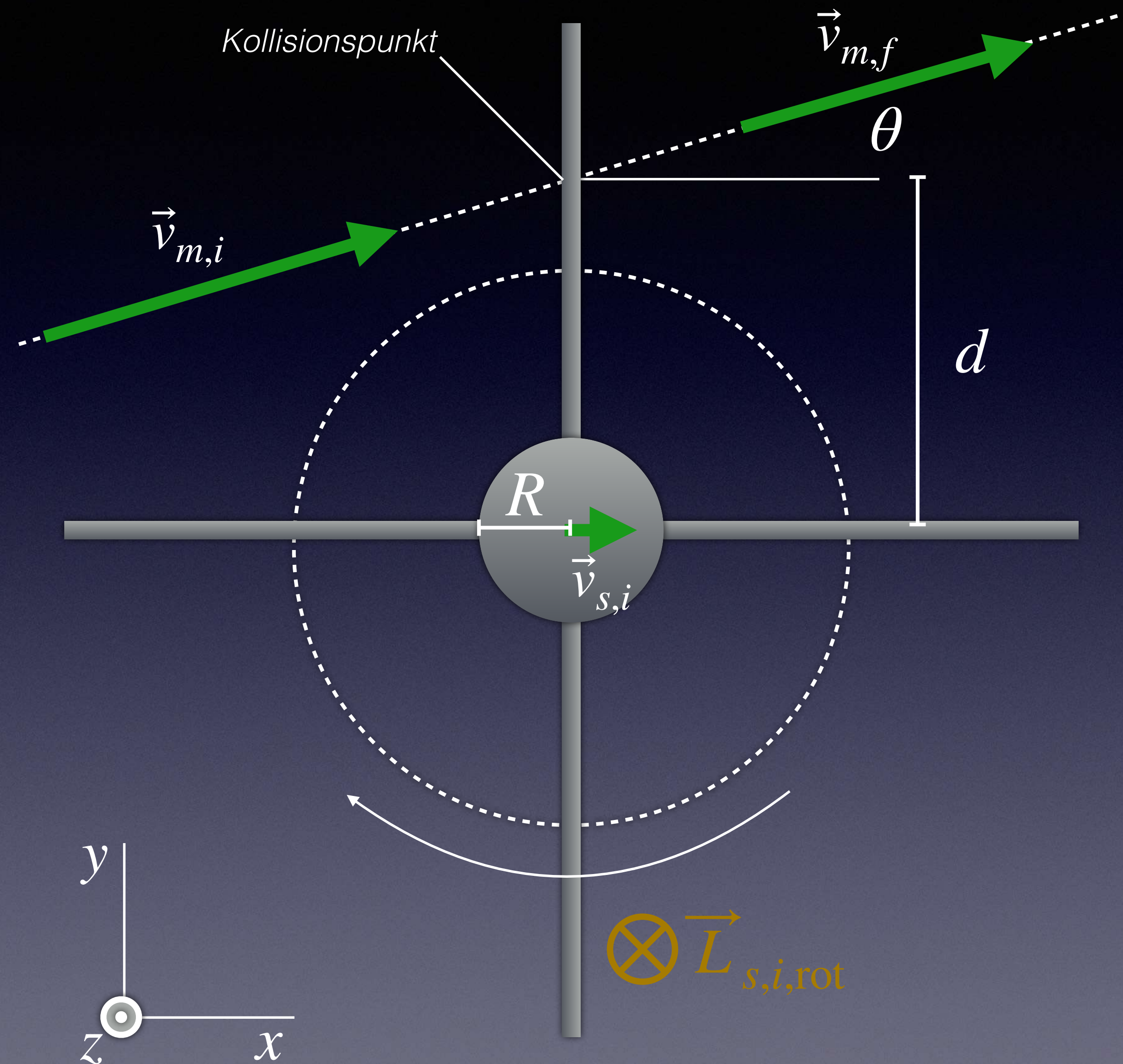
Obwohl der Luftwiderstand über den gesamten Körper verteilt ist und auf jedes Atom des Körpers eine Gravitationskraft wirkt, heben sich die Drehmomente links und rechts des Massenschwerpunkts in der Regel gegenseitig auf (diese Aufhebung ist für die Gravitationskräfte exakt). Daher ist das Drehmoment um den Massenschwerpunkt vernachlässigbar, und der Drehimpuls  $\vec{L}_{rot}$  ist konstant.

Das Trägheitsmoment des Springers nimmt nach dem Strecken stark zu, weil viele Atome jetzt viel weiter vom Massenmittelpunkt entfernt sind als zu dem Zeitpunkt, als sich der Springer in einer gerollten Position befand. Ein größeres Trägheitsmoment bedeutet eine geringere Winkelgeschwindigkeit, da sich die Größe des Eigendrehimpulses  $\vec{L}_{rot}$  nicht ändert.

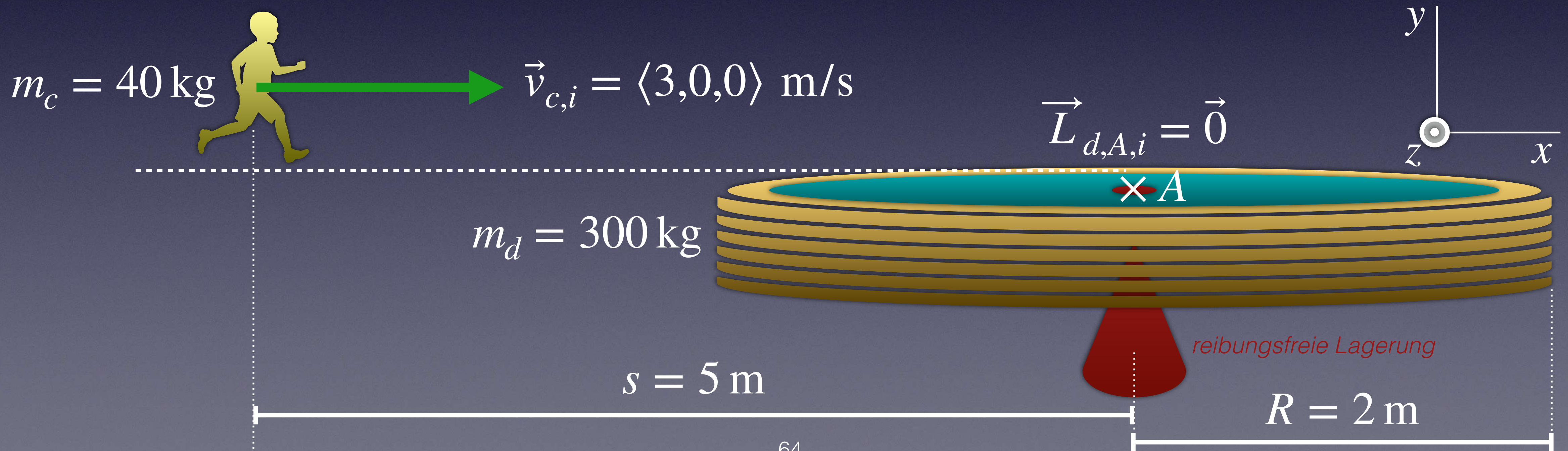


# Kontrollpunkt 8

K8.1: Ein Satellit (Masse  $m_s$ ) verfügt über vier herausstehende Sonnenkollektoren mit sehr geringer Masse. Der Satellit selbst kann als eine annähernd gleichförmige feste Kugel betrachtet werden. Ursprünglich bewegt er sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_{s,i}$  nach rechts und dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_{s,i}$  im Uhrzeigersinn. Ein winziger Meteor (Masse  $m_m$ ), der sich mit  $\vec{v}_{m,i}$  bewegt, durchschlägt einen der Kollektoren und fliegt in dieselbe Richtung mit  $\vec{v}_{m,f}$  weiter. (1) Berechne  $\vec{v}_{s,f}$  (Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Satelliten) sowie (2)  $\vec{\omega}_{s,f}$ . Hinweis: Wähle als System Satellit+Meteor und vernachlässige alle weiteren Wechselwirkungen (Kollision).



Ein Kind springt auf einem Spielplatz auf eine Drehscheibe. Das „Fahrgeschäft“ besteht aus einer Scheibe, die auf einer reibungsarmen Achse montiert ist. Das Kind läuft auf einer Linie tangential zur Scheibe und springt auf den äußeren Rand der Scheibe. Die Scheibe dreht sich, aber mit welcher Geschwindigkeit? Wie viele Umdrehungen pro Minute bzw. Radiant pro Sekunde?





Weder das Prinzip Impuls noch das Prinzip Energie reichen aus, um diesen Zusammenstoß zu analysieren. Wenn wir die Geschwindigkeit des Kindes unmittelbar nach dem Sprung auf die Scheibe kennen, können wir das Prinzip Impuls anwenden, um den Kraftstoß zu bestimmen, den die Achse auf die Scheibe ausübt und der verhindert, dass sich die Scheibe seitlich bewegt. Aber hierfür müssen wir die Drehgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_{d,f}$  kennen, um die neue Geschwindigkeit  $\vec{v}_{c,f}$  des Kindes berechnen zu können. Mit Hilfe des Prinzips Energie ließe sich dann bestimmen, wie viel innere Energie bei diesem inelastischen „Stoß“ des Kindes mit der Scheibe entsteht. Wir brauchen also ein weiteres Prinzip, das uns  $\vec{\omega}_{d,f}$  liefert: wenig überraschend ist es das Prinzip Drehimpuls.

Als Endzustand betrachten wir die Situation unmittelbar nach der Kollision: das Kind „haftet“ nun an der Scheibe. Als System wählen wir Kind+Drehscheibe.

$$\vec{L}_{A,i} = \vec{L}_{c,A,i} + \vec{L}_{d,A,i}$$

$$\vec{L}_{c,A,i} = m_c \vec{r}_{c,A,i} \times \vec{v}_{c,i} = \langle 0, -240, 0 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \text{ und } \vec{L}_{d,A,i} = \vec{0}$$

Der Drehimpuls des Systems unmittelbar nach der „Kollision“ besteht aus dem Eigendrehimpuls der Scheibe und dem Bahndrehimpuls des Kindes auf der Scheibe. Hierbei vernachlässigen wir zunächst den Eigendrehimpuls des Kindes:

$$\vec{L}_{A,f} = \vec{L}_{A,i}$$

$$\vec{L}_{A,f} = I_{y,d} \vec{\omega}_{d,f} + m_c R^2 \vec{\omega}_{d,f} = \left( \frac{1}{2} m_d + m_c \right) R^2 \vec{\omega}_{d,f}$$

$$\vec{\omega}_{d,f} \approx \langle 0, -0.316, 0 \rangle \text{ rad/s}$$

$$\left| \vec{v}_{c,f} \right| \approx 0.63 \text{ m/s}$$

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m_c \left| \vec{v}_{c,i} \right|^2 \approx 180 \text{ J}$$

$$E_{\text{kin},f} = \frac{1}{2} \left( \frac{m_d}{2} + m_c \right) R^2 \left| \vec{\omega}_{d,f} \right|^2 \approx 37.9 \text{ J}$$

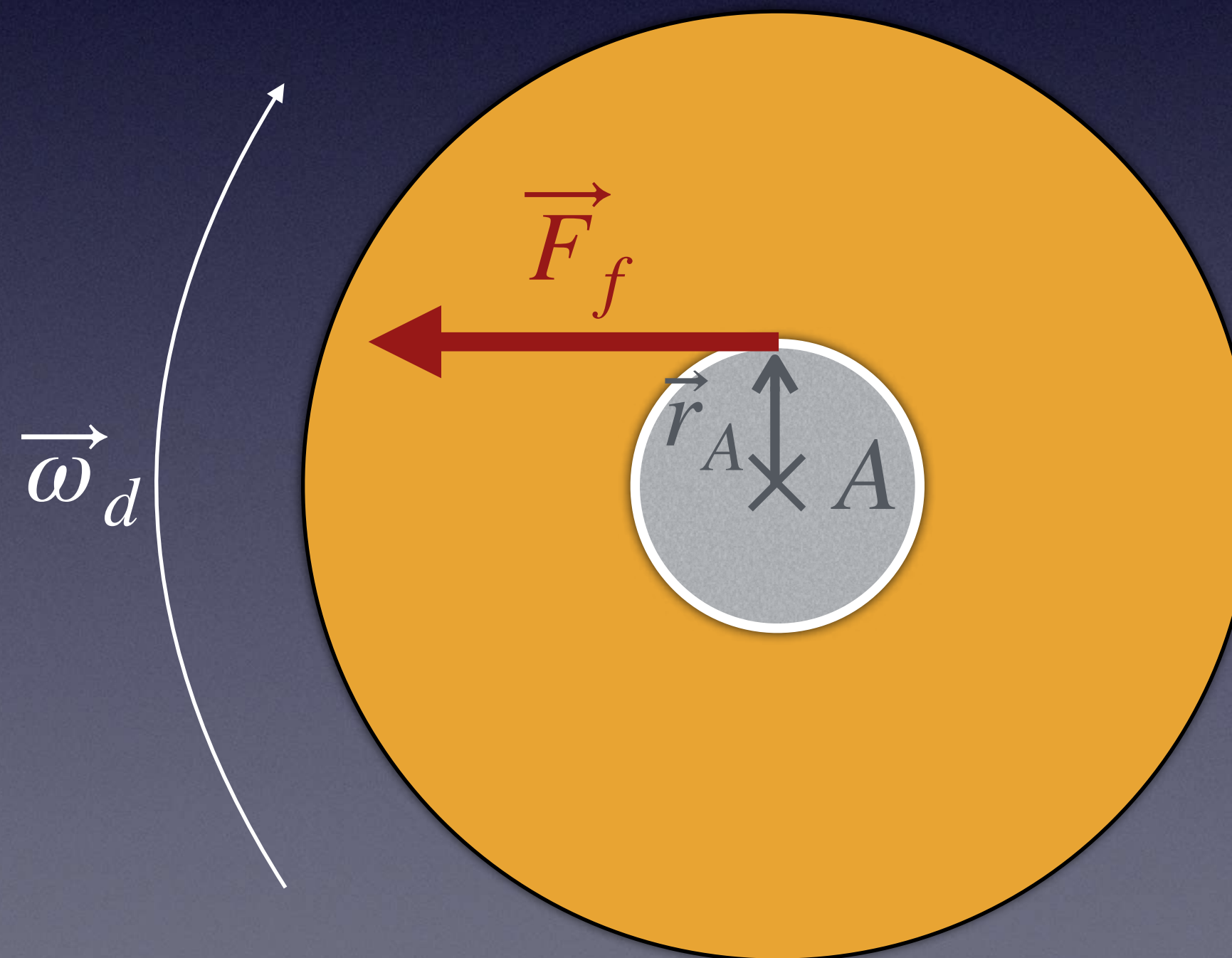
Die Differenz der kinetischen Energie tritt in Form von innerer Energie (Wärme) in der Drehscheibe sowie in den Schuhen des Kindes in Erscheinung.

Wir haben bei der Berechnung des endgültigen Drehimpulses des Systems, das aus der Scheibe und dem Kind besteht, eine Vereinfachung vorgenommen. Nach dem Aufprall „haftet“ das Kind an der Drehscheibe und hat nicht nur einen Bahndrehimpuls, sondern auch einen Eigendrehimpuls. Da sich die Scheibe  $\vec{\omega}_{d,f}$  um die Achse dreht, dreht sich auch das Kind mit einer Rate um seinen eigenen Massenschwerpunkt (Durchmesser des Kindes  $2r_c$ ).

$$\vec{L}_{\text{trans},c,f} = m_c R^2 \vec{\omega}_{d,f} \text{ und } \vec{L}_{\text{rot},c,f} = \frac{1}{2} m_c r_c^2 \vec{\omega}_{d,f}$$

Da hier  $r_c \ll R$  ist, bleibt der Eigendrehimpuls vernachlässigbar klein.

In der realen Welt ist die Reibung wichtig. Nachdem das Kind im vorangegangenen Beispiel auf die Scheibe gesprungen ist und sie zum Drehen gebracht hat, nimmt die Drehgeschwindigkeit aufgrund der Reibung zwischen der Scheibe und der Achse langsam ab.

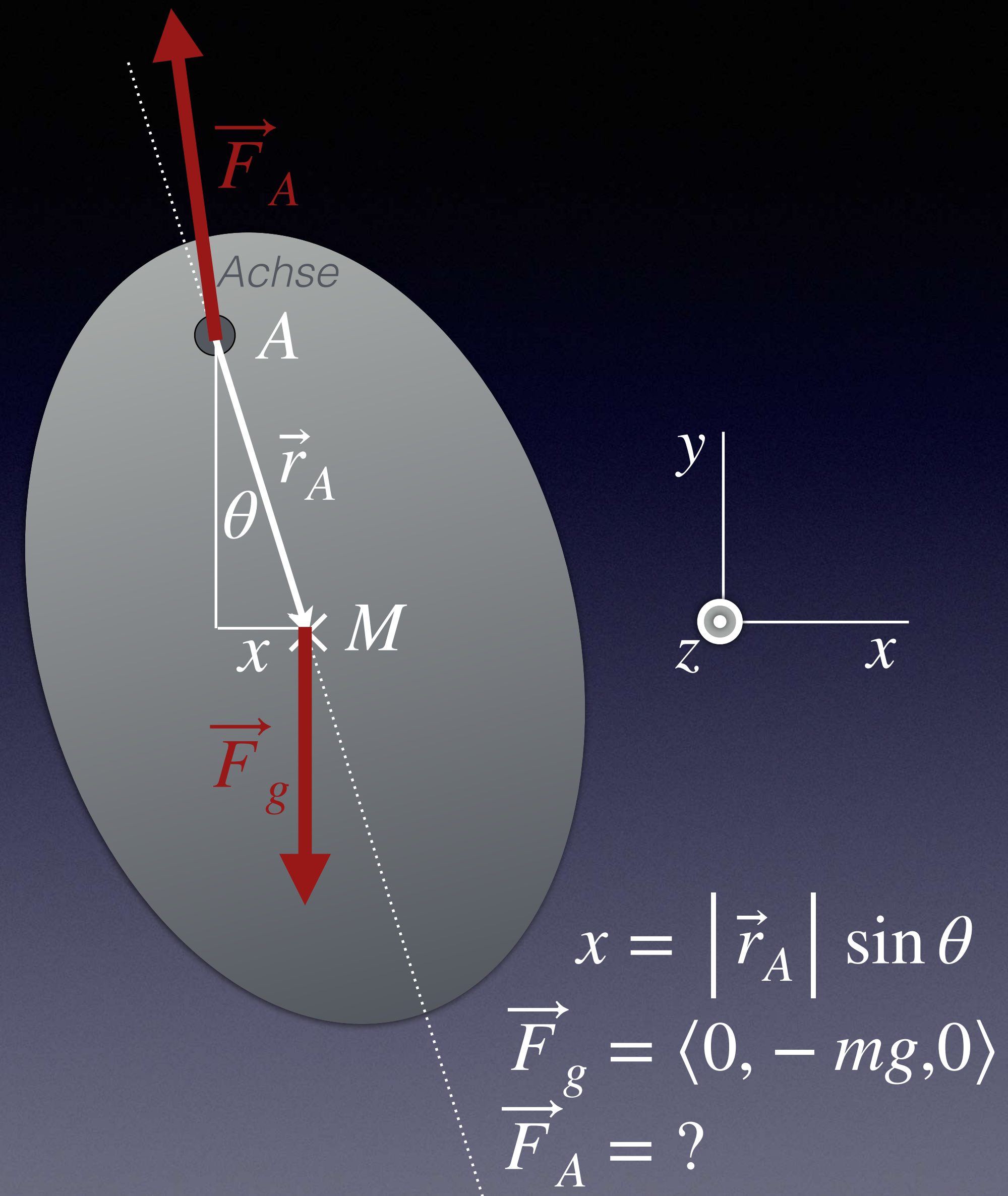


$$\otimes \vec{L}_{\text{rot},d,A}$$

$$\odot \vec{M}_{f,A} = \vec{r}_A \times \vec{F}_f$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{rot},d,A}}{dt} = \vec{M}_{f,A}$$

Als „physikalisches Pendel“ bezeichnet man hängende Objekte, die hin- und herschwingen und nicht als Punktteilchen, z.B. am Ende einer Schnur modelliert werden können. Ein Beispiel ist das nebenstehend dargestellte Objekt mit Masse  $m$ , das von einer reibungsarmen Achse in  $A$  getragen wird, die sich in einem gewissen Abstand  $\vec{r}_A$  vom Massenschwerpunkt  $M$  befindet. Das Trägheitsmoment um den Massenschwerpunkt  $M$  des Objekts beträgt  $I_{M,z}$ . In dem dargestellten Zeitpunkt steht die Linie von der Achse zum Massenschwerpunkt in einem Winkel  $\theta$  zur Vertikalen. Berechne die Periode der Schwingung für sehr kleine Auslenkungen  $x$  aus der Ruhelage.



Zur Berechnung der Periode wenden wir das Prinzip Drehimpuls auf das Objekt an (Umgebung: Erde und Achse). Wir wählen den Mittelpunkt  $A$  der Achse als Ort, um den wir das Nettodrehmoment  $\vec{M}_{\text{net},A}$  berechnen werden. Der Vorteil dieser Wahl ist, dass die unbekannte Kraft  $\vec{F}_A$ , welche die dünne Achse auf das Objekt ausübt, praktisch nichts zum Nettodrehmoment beiträgt. Das Nettodrehmoment ist somit nur auf die Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  zurückzuführen, die auf den Massenschwerpunkt wirkt. Mit dem Steinerschen Satz erhalten wir  $I_{A,z} = I_{M,z} + m \left| \vec{r}_A \right|^2$ .

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{r}_A \times \vec{F}_g$$

$$\frac{d}{dt} (I_A \vec{\omega}) = \vec{r}_A \times \vec{F}_g \rightarrow I_{A,z} \frac{d\omega_z}{dt} = -mg \left| \vec{r}_A \right| \sin \theta$$

Für sehr kleine Auslenkungen gilt  $\sin \theta \approx \theta$ . Somit folgt:

$$I_{A,z} \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg \left| \vec{r}_A \right| \theta. \text{ Man vergleiche mit}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_s x \text{ (Masse-Feder-System, } \omega = \sqrt{k_s/m}).$$



Wir erhalten somit (analog zum Masse-Feder-System):

$$\omega_z = \sqrt{\frac{mg |\vec{r}_A|}{I_{A,z}}} . \text{ Und somit}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{A,z}}{mg |\vec{r}_A|}} .$$

Ein wichtiger Spezialfall ist das „Fadenpendel“, bei dem sich eine (räumlich) kleine Masse am Ende einer Schnur der Länge  $L$  ( $\vec{r}_A = L$ ) befindet. Für diesen Fall erhalten wir:

$$I_{A,z} \approx mL^2, \text{ und damit}$$

$$\omega_z \approx \sqrt{\frac{g}{L}},$$

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Wenn das (Netto-) Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net},A}$  mit Bezug auf einen Ort  $A$   $\vec{O}$  ist, ändert sich der Drehimpuls  $\vec{L}_A$  um diesen Ort nicht. Es können Kräfte wirken, die Änderungen des linearen Impulses bewirken, aber wenn diese Kräfte keine Drehmomente ausüben, ist die Änderungsrate des Drehimpulses gleich Null. So haben z.B. die meisten Kometen stark elliptische Bahnen um die Sonne. In unserer früheren Diskussion über den Halleyschen Kometen haben wir gesehen, dass  $\vec{L}_{\text{trans},S}$  des Kometen relativ zur Sonne  $S$  an verschiedenen Punkten der Bahn den gleichen Wert hatte. Wir können diese Beobachtung nun mit Hilfe des Prinzips Drehimpuls verstehen.

Die auf den Kometen wirkende Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  ist immer direkt auf die Sonne gerichtet. Ferner ist der von der Sonne zum Kometen weisende relative Positionsvektor  $\vec{r}_S$  zu  $\vec{F}_g$  kollinear. Deshalb ist das Kreuzprodukt  $\vec{r}_S \times \vec{F}_g$  stets  $\vec{0}$ . D.h. der Hebelarm ist immer Null, so dass es niemals ein Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net},S}$  relativ zum Ort  $S$  (Sonne) gibt, das den (Bahn-) Drehimpuls  $\vec{L}_{\text{trans},S}$  des Kometen verändern könnte.

Wenn ein Komet der Sonne am nächsten ist, beträgt seine Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  und seine Entfernung von der Sonne  $\vec{r}_{1,S}$ . Wie hoch ist die Geschwindigkeit  $\vec{v}_2$  des Kometen, wenn er am weitesten von der Sonne entfernt ist (Entfernung  $\vec{r}_{2,S}$ )? Der (Bahn-) Drehimpuls des Kometen um  $S$  ist konstant, da  $\vec{M}_{\text{net},S} = \vec{0}$  ist:

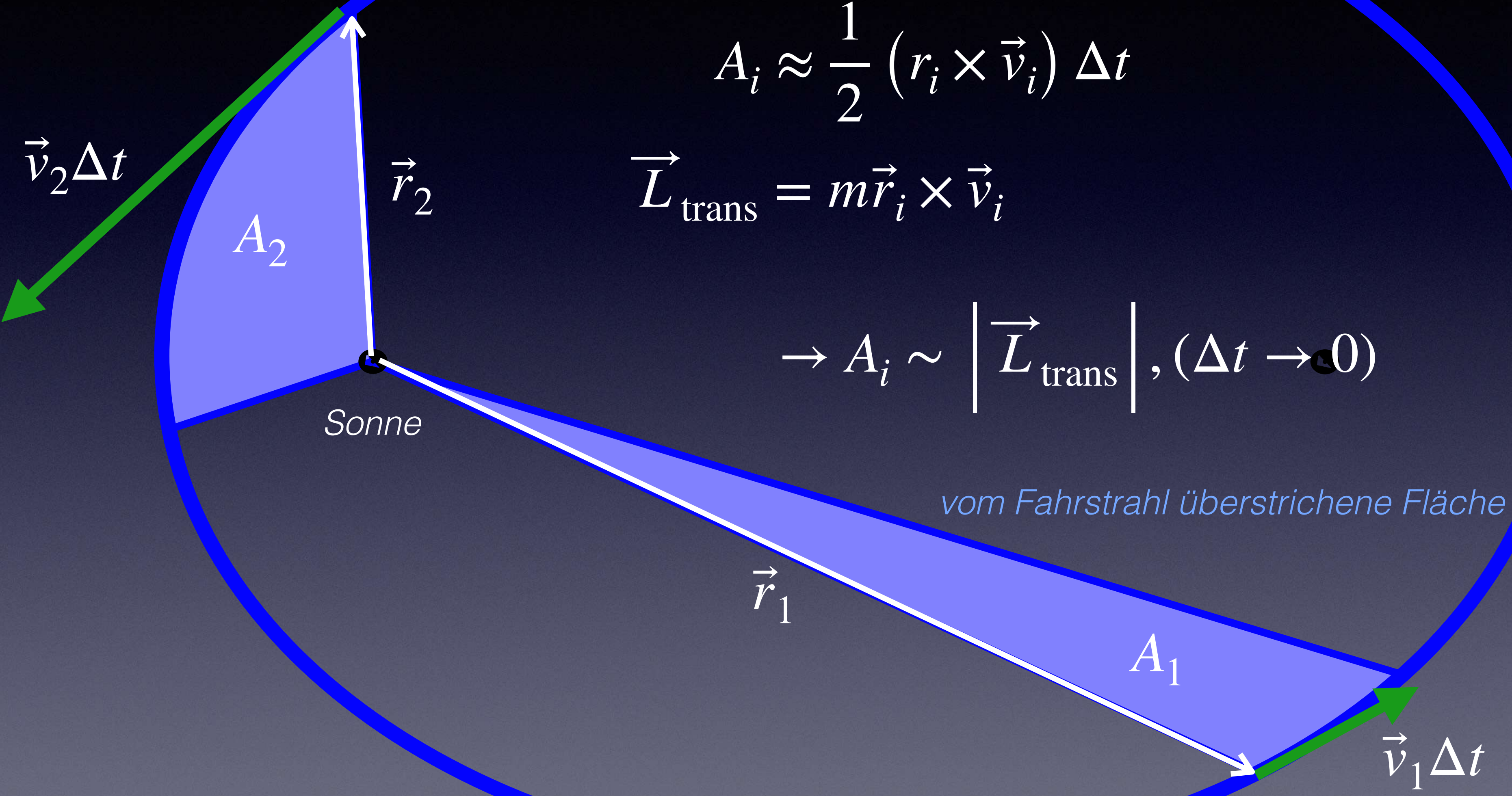
$$\vec{L}_{1,S} = \vec{L}_{2,S} \rightarrow m\vec{r}_{1,S} \times \vec{v}_1 = m\vec{r}_{2,S} \times \vec{v}_2 .$$

Da Positions- und Geschwindigkeitsvektoren an 1 und 2  $\perp$  zueinander sind:

$$m \left| \vec{r}_{1,S} \right| \left| \vec{v}_1 \right| = m \left| \vec{r}_{2,S} \right| \left| \vec{v}_2 \right| \rightarrow \left| \vec{v}_2 \right| = \left| \vec{v}_1 \right| \frac{\left| \vec{r}_{1,S} \right|}{\left| \vec{r}_{2,S} \right|} .$$

Historisch gesehen wurde das Verhalten von Planeten und Kometen beschrieben, bevor das Prinzip Impuls oder das Prinzip Drehimpuls entdeckt wurde. Auf der Grundlage sorgfältiger, genauer Messungen mit bloßem Auge, die Tycho Brahe vor der Erfindung des Teleskops vorgenommen hatte, verkündete Johannes Kepler 1609 seine Entdeckung, dass die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen. Kepler erklärte auch, dass er herausgefunden hatte, dass die vom Fahrstrahl des Himmelskörpers in der gleichen Zeitdauer überstrichenen Flächen  $A_i$  jeweils gleich groß sind (siehe nächste Folie). Wir wissen heute, dass das zweite Keplersche Gesetz als spezielle Formulierung des Prinzips Drehimpuls betrachtet werden kann.

Elliptische Bahn eines  
Kometen oder Planeten



$$A_i \approx \frac{1}{2} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Delta t$$

$$\vec{L}_{\text{trans}} = m \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\rightarrow A_i \sim \left| \vec{L}_{\text{trans}} \right|, (\Delta t \rightarrow 0)$$

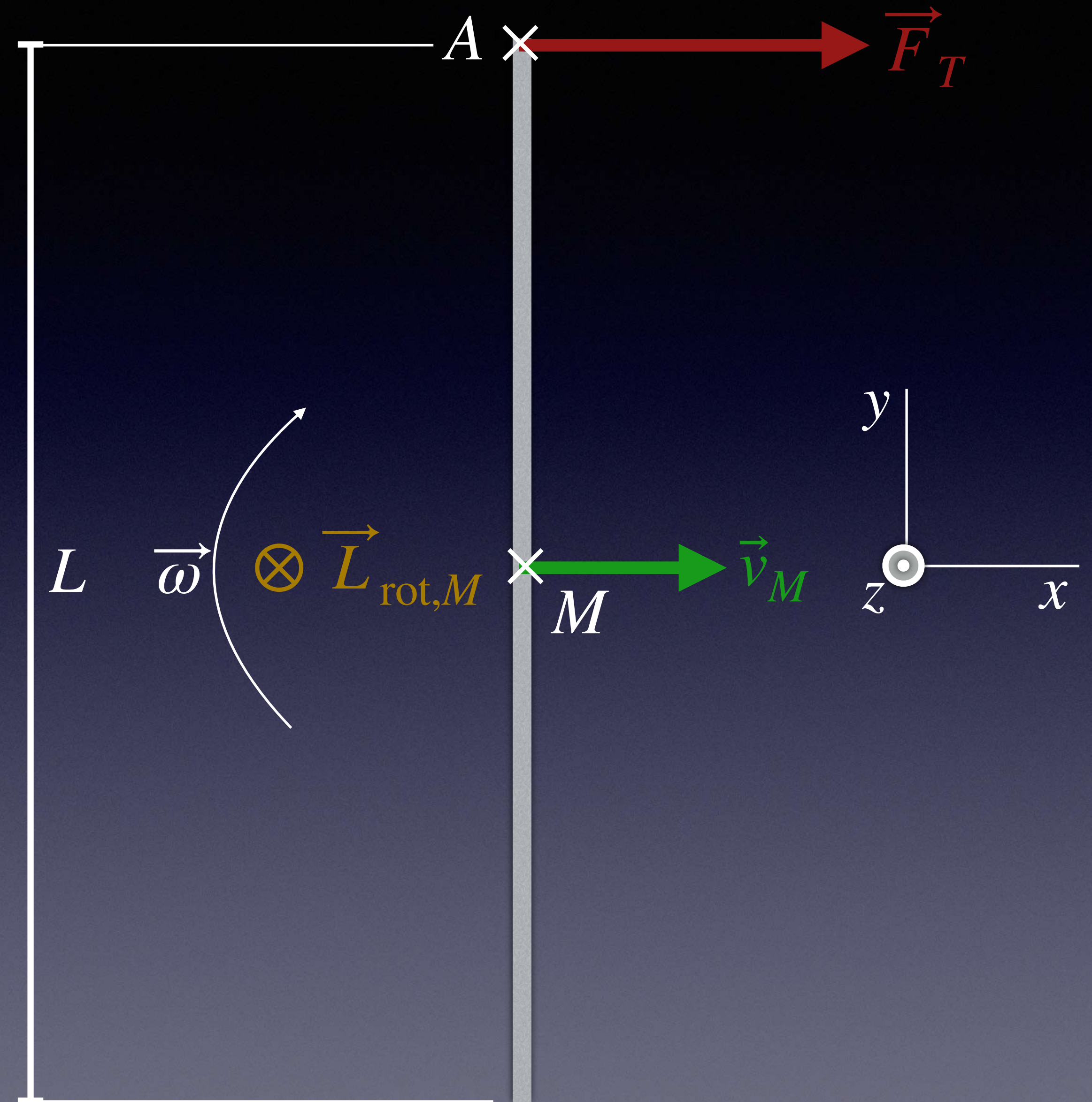
# Kontrollpunkt 9

K9.1: Unter dem Erdmantel, in etwa 2900 Kilometer Tiefe, beginnt der flüssige Kern der Erde. In seinem Innern, ab 5150 Kilometer Tiefe, befindet sich ein fester Kern aus Eisen und Nickel, in dem eine Temperatur von rund 6000 Grad Celsius und ein Druck von 330 Gigapascal herrschen. Genau wie die anderen Erdschichten rotiert auch der innere Erdkern um die Erdachse – allerdings nach bisheriger Kenntnis ein wenig schneller als der Erdmantel. Doch offenbar hat sich diese Drehung in jüngster Zeit verlangsamt. Zu diesem Ergebnis kamen Geowissenschaftler mit der Analyse von Erdbebendaten. (1) Welchen Einfluss könnte das auf die Tageslänge haben und weshalb?



Systeme mit einwirkendem  
(Netto-) Drehmoment

Natürlich ist der Drehimpuls eines Systems nicht immer konstant. Externe Drehmomente (aufgrund von Objekten in der Umgebung) können den Drehimpuls eines Systems verändern. Betrachte einen  $L = 1 \text{ m}$  langen Stab mit der Masse  $m = 0.3 \text{ kg}$ , der auf dem Eis liegt. Du ziehst an einem Ende des Stabs im rechten Winkel zum Stab mit einer Kraft von  $\vec{F}_T = 6 \text{ N}$ . Nimm an, dass die Reibung mit dem Eis vernachlässigbar ist. (1) Wie groß ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit  $\vec{v}_M$  des Massenschwerpunkts? (2) Wie groß ist die Änderungsrate der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ ? Hinweis: Das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich des Massenschwerpunkts beträgt  $I_{M,z} = mL^2/12$ .



Mit dem Prinzip Impuls erhalten wir (ohne Reibung):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} \rightarrow m \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{F}_T \rightarrow \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{\vec{F}_T}{m} = \langle 20, 0, 0 \rangle \text{ m/s}^2 .$$

Mit dem Prinzip Drehimpuls erhalten wir (ohne Reibung):

$$\frac{d\vec{L}_{\text{rot},M}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},M} \rightarrow I_{M,z} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left\langle 0, \frac{L}{2}, 0 \right\rangle \times \langle F_{T,x}, 0, 0 \rangle ,$$

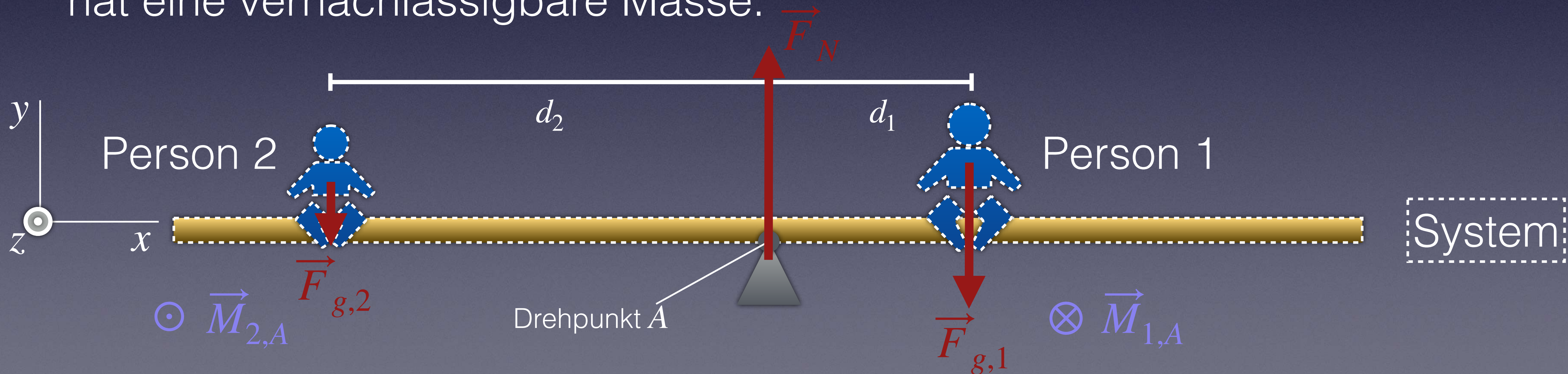
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{12}{mL^2} \left\langle 0, \frac{L}{2}, 0 \right\rangle \times \langle F_{T,x}, 0, 0 \rangle = \langle 0, 0, -120 \rangle \text{ rad/s}^2 .$$

Es ist interessant, die Bewegung des Stabes erneut zu analysieren, indem wir  $A$  als Referenzpunkt für Drehmoment und Drehimpuls verwenden, aber nicht, wie zuvor,  $M$ . Bei der Anwendung des Prinzips Impuls ändert sich nichts, aber für den Drehimpuls folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \vec{M}_{\text{net},A} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rot},A} \right) = \vec{0} \rightarrow \dots \\ \dots &= \frac{mL}{2} \frac{d\vec{v}_M}{dt} + \frac{mL^2}{12} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{v}_M}{dt} + \frac{L}{6} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= -\frac{6}{L} \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \langle 0, 0, -120 \rangle \text{ rad/s} . \end{aligned}$$

Dies stimmt mit unserer vorangehenden Analyse überein. Es ist ein guter Test einer Analyse, das Problem für zwei Referenzpositionen, hier  $M$  und  $A$ , anzugehen.

Zwei Personen sitzen auf einer Wippe. Die Person auf der linken Seite hat eine Masse  $m_2 = 40 \text{ kg}$  und sitzt im Abstand  $d_2 = 2.7 \text{ m}$  von der nahezu reibungsfreien Achse. Die Person auf der rechten Seite hat die Masse  $m_1 = 90 \text{ kg}$ . (1) Wie groß ist die Kraft  $\vec{F}_N$ , die die Achse nach oben ausüben muss? (2) Wo muss die Person auf der rechten Seite sitzen, damit die Wippe nicht rotiert? Hinweis: Die Wippe selbst hat eine vernachlässigbare Masse.



Prinzip Impuls: Da sich das System nicht bewegt, ändert sich der Impuls  $\vec{p}_{\text{sys}}$  des Systems nicht:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sys}}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_N + \vec{F}_{g,1} + \vec{F}_{g,2} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{F}_N \approx \langle 0, 1274, 0 \rangle \text{ N}$$

Prinzip Drehimpuls: Da sich das System nicht bewegt, ändert sich auch der Drehimpuls  $\vec{L}_{\text{sys},A}$  des Systems nicht:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{sys},A}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},A} = \vec{0} \rightarrow \vec{M}_{1,A} + \vec{M}_{2,A} = \vec{0}$$

$$\rightarrow d_1 = 1.2 \text{ m}$$

# Kontrollpunkt 10

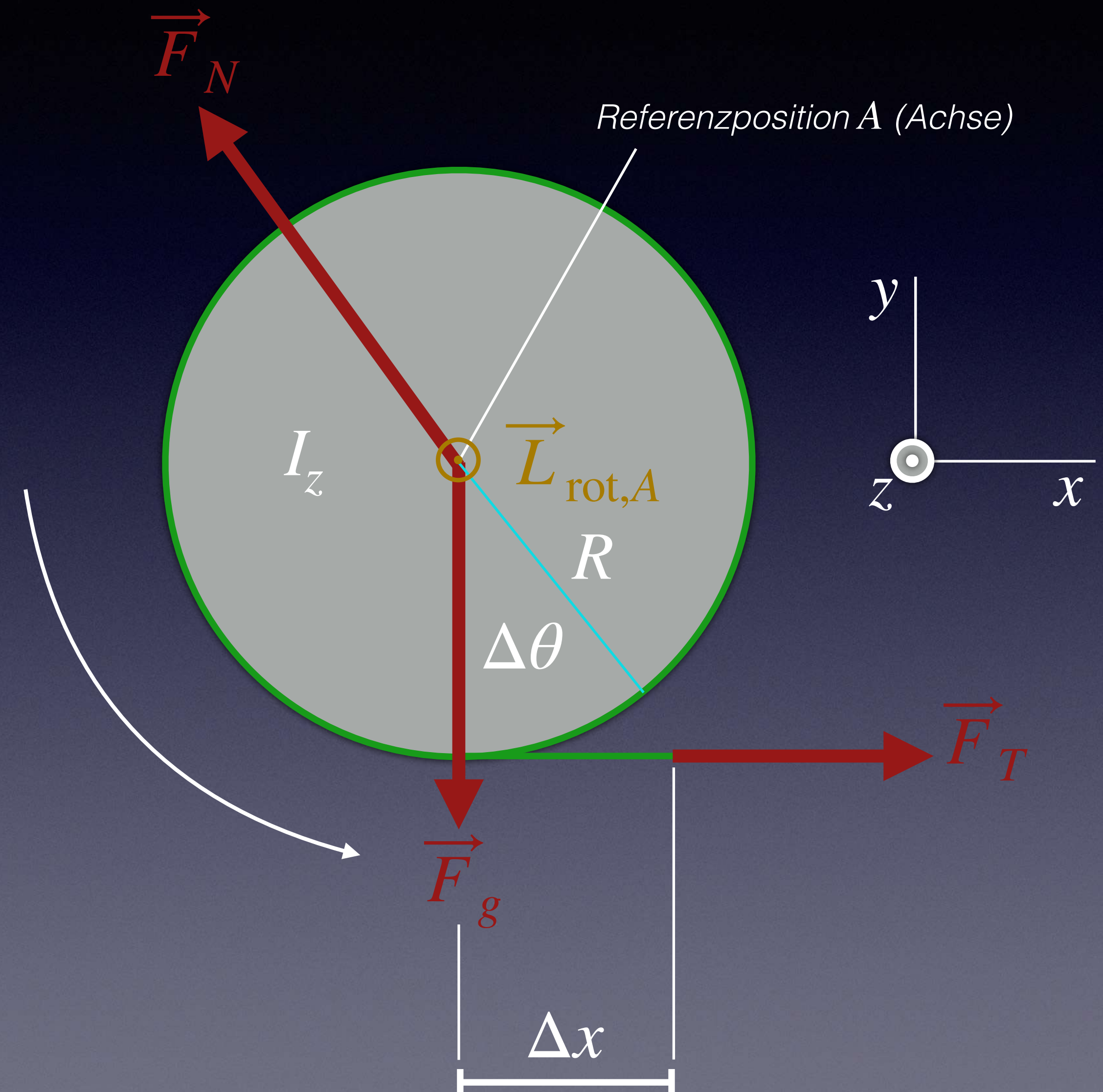
K10.1: Verwende als Referenzpunkt für den Drehimpuls bzw. das Drehmoment nun die Position der rechts sitzenden Person. (1) Zeige, dass das Ergebnis demjenigen mit Referenzpunkt A (Achse) entspricht. Anmerkung: Oft ist es günstig, den festen Ort so zu wählen, dass einige der Kräfte kein Drehmoment um diesen Ort erzeugen und daher nicht in der Formulierung des Prinzips Drehimpuls erscheinen.



# Vorhersage von Positionen bei vorhandener Rotation

Um die Bewegung eines rotierenden Systems modellieren zu können, müssen wir in der Lage sein, seine Position vorherzusagen. Das bedeutet in der Regel, dass wir den (Dreh-) Winkel  $\Delta\theta$  vorhersagen müssen, um den sich das Objekt drehen wird. Wenn wir diesen Winkel kennen, können wir auch herausfinden, wie weit sich ein bestimmter Punkt bewegt hat.

Ein in der  $xy$ -Ebene liegendes Rad mit Radius  $R$  und Trägheitsmoment  $I_z$  ist auf einer reibungsarmen Achse montiert (siehe nebenstehende Abbildung). Eine Schnur wird um den Rand gewickelt, und man zieht mit einer Kraft  $\vec{F}_T$  (in  $x$ -Richtung) daran. Zu einem bestimmten Zeitpunkt beträgt die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_i$ . (1) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_f$  nach einem Zeitintervall  $\Delta t$ ? (2) Wie weit hat sich deine Hand in dieser Zeitspanne bewegt? Hinweis: Wähle als System Rad+Schnur.



Prinzip Impuls: Das Prinzip besagt, dass die Nettokraft gleich Null sein muss, da sich der Massenschwerpunkt nicht bewegt.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sys}}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_T = \vec{0}$$

Prinzip Drehimpuls: Es wirkt ein konstantes Drehmoment  $\vec{M}_{\text{net},A}$ .

$$\vec{M}_{\text{net},A} = \langle 0, -R, 0 \rangle \times \langle F_{T,x}, 0, 0 \rangle = \langle 0, 0, RF_{T,x} \rangle$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{rot},A}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},A}$$

Um Informationen über die Rotation zu erhalten, müssen wir das Prinzip Drehimpuls anwenden. Wir verwenden die *Update*-Form des Prinzips, mit dem Massenschwerpunkt als Referenzpunkt. Zunächst berechnen wir die finale Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{f,z}$ :

$$\vec{L}_{\text{rot},f} = \vec{L}_{\text{rot},i} + \vec{M}_{\text{net}}\Delta t ,$$

$$I_z\omega_{f,z} = I_z\omega_{i,z} + RF_{T,x}\Delta t ,$$

$$\omega_{f,z} = \omega_{i,z} + \frac{RF_{T,x}}{I_z}\Delta t \rightarrow \vec{\omega}_f = \langle 0,0,\omega_{f,z} \rangle .$$

Um zu berechnen, wie weit sich Ihre Hand bewegt hat (Strecke  $\Delta x$ ), müssen wir zunächst feststellen, um wie viel Grad  $\Delta\theta$  sich das Rad während des Zeitintervalls  $\Delta t$  gedreht hat. Der Winkel  $\theta$ , den die blaue Linie in der Grafik auf der vor-vorangehenden Folie blaue Linie mit der y-Achse bildet, ändert sich augenblicklich mit einer Rate von  $\omega_z = d\theta/dt$  (Radiant pro Sekunde):

$$\Delta\theta = \omega_{\text{avg},z} \Delta t .$$

Da sich die Winkelgeschwindigkeit mit einer konstanten Rate  $RF_{T,x}/I_z$  ändert, ist die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{\text{avg},z} = \frac{\omega_{f,z} + \omega_{i,z}}{2} .$$

Die Länge der Schnur, die sich vom Rad löst, entspricht der Entfernung  $\Delta x$ , die deine Hand zurücklegt:

$$\Delta x = R\Delta\theta = R \frac{\omega_{f,z} + \omega_{i,z}}{2} \Delta t .$$

Die Änderungsrate der Winkelgeschwindigkeit  $d\vec{\omega}/dt$  wird auch als „Winkelbeschleunigung“  $\vec{\alpha}$  bezeichnet und das Prinzip Drehimpuls, das auf die reine Drehung eines Objekts angewendet wird, dessen Trägheitsmoment  $I$  konstant ist, kann dann als  $I\vec{\alpha} = \vec{M}_{\text{net}}$  geschrieben werden. In dieser Form ist die Gleichung mit  $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{net}}$  vergleichbar.

Für eine konstante Beschleunigung  $\vec{a}$  ist  $\vec{v}_{\text{avg}} = (\vec{v}_i + \vec{v}_f)/2$ , und für eine konstante Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$  ist  $\vec{\omega}_{\text{avg}} = (\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_f)/2$ .



Wir könnten die Entfernung  $\Delta x$ , welche die Hand zurücklegt, auch mit Hilfe des Prinzips Energie in Kombination mit unserem Ergebnis für  $\omega_{f,z}$ , das wir mit Hilfe des Prinzips Drehimpuls erhalten haben, bestimmen:

$$\frac{1}{2}I_z\omega_{f,z}^2 = \frac{1}{2}I_z\omega_{i,z}^2 + F_{T,x}\Delta x ,$$

$$\Delta x = I_z \frac{\omega_{f,z}^2 - \omega_{i,z}^2}{2F_{T,x}} .$$

# Kontrollpunkt 11

K11.1: Ein Rad mit gleichmäßiger Dichte, Masse  $m = 6 \text{ kg}$  und Radius  $R = 0.3 \text{ m}$  dreht sich auf einer reibungsarmen Achse. Ausgehend von der Ruhelage  $\omega_{i,z} = 0 \text{ rad/s}$  übt eine um den Rand gewickelte Schnur eine konstante Kraft von  $F_{T,x} = 15 \text{ N}$  für  $\Delta t = 0.6 \text{ s}$  aus. (1) Wie groß ist die endgültige Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{f,z}$ ? (2) Wie groß ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\text{avg},z}$ ? (3) Um wie viel Grad  $\Delta\theta$  hat sich das Rad gedreht? (4) Wie viel Schnur  $\Delta x$  hat sich vom Rad gelöst?

# Iterative Berechnungen mit einem Computer

Rechnerisch ist die Modellierung der Bewegung eines rotierenden Objekts mit einem Nettodrehmoment ungleich Null der Modellierung der Bewegung eines beweglichen Objekts mit einer Nettokraft ungleich Null sehr ähnlich. Nach der Wahl der Bezugsposition  $A$  und der Festlegung der Anfangsbedingungen werden Drehmoment, Drehimpuls und Position (Winkel) iterativ aktualisiert:

1. Berechnung des (Netto-) Drehmoments  $\vec{M}_{\text{net},A}$ ,
2. Aktualisierung (Winkelimpuls) des Drehimpulses  $\vec{L}_{f,A} = \vec{L}_{i,A} + \vec{M}_{\text{net},A} \Delta t$ ,
3. Aktualisierung der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_f = \vec{L}_{f,A} / I_{\omega}$ .
4. Aktualisierung des Drehwinkels  $\theta_f = \theta_i + \omega_f \Delta t$  ( $\vec{\omega}_f$  zeigt in Richtung einer Koordinatenachse).

Der oben beschriebene Ansatz gilt für Situationen, in denen der Drehimpuls  $\vec{L}$  und die Drehachse  $\vec{\omega}$  kollinear sind. Ansonsten würde es deutlich komplizierter.

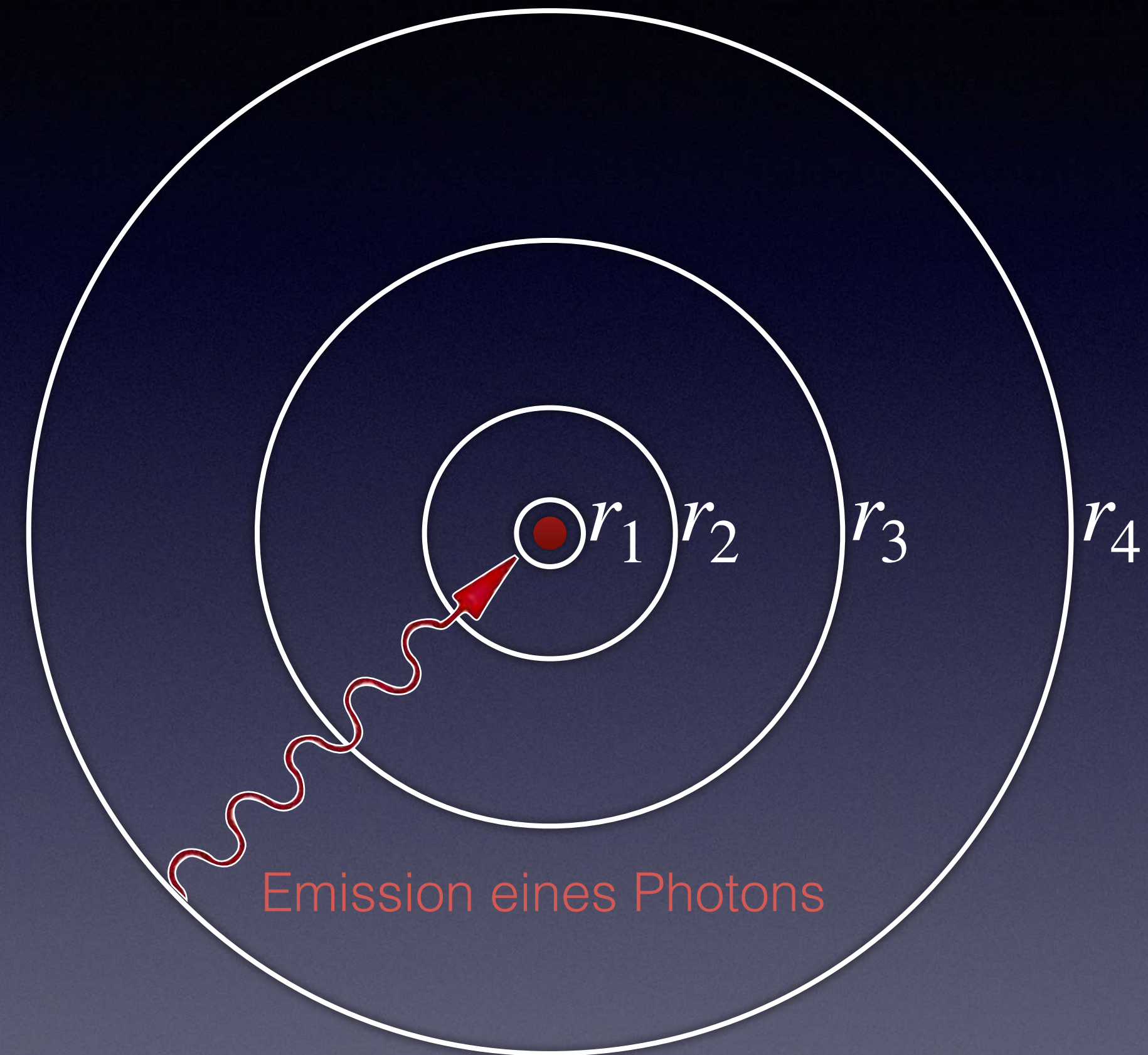
# Quantisierung des Drehimpulses

Viele Elementarteilchen verfügen über Drehimpuls. In einem Atom gebundene Elektronen können sowohl einen Bahndrehimpuls relativ zum Kern als auch einen Eigendrehimpuls haben. Atome als Ganzes können einen Drehimpuls haben, ebenso wie viele Atomkerne. Das Überraschende am Drehimpuls auf atomarer und subatomarer Ebene ist, dass der Drehimpuls in stabilen Energiezuständen quantisiert ist:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} .$$

$h$  ist darin das „Plancksche Wirkungsquantum“. Misst man eine Komponente des Drehimpulses (d.h. entlang der  $x$ - oder  $y$ - oder  $z$ -Achse), so erhält man entweder ein halbzahliges oder ein ganzzahliges Vielfaches der reduzierten Planck-Konstante  $\hbar$ .

Wie in Kapitel 8 beschrieben, entdeckten Rutherford und seine Gruppe 1911 den Atomkern. Angeregt durch diese Entdeckung stellte der dänische Physiker Niels Bohr 1913 die kühne Vermutung auf, dass ein Wasserstoffatom als ein Elektron modelliert werden könnte, das ein Proton auf kreisförmigen Bahnen umkreist, aber nur auf solchen Bahnen, deren Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von  $\hbar$  ist. Folglich hätten diese Bahnen nur bestimmte Radien und nur bestimmte Energiewerte. Die Energieunterschiede zwischen diesen quantisierten Bahnen entsprechen den beobachteten Energien der von atomarem Wasserstoff ausgesandten Photonen.



Im Bohrschen Modell des Wasserstoffatoms können sich die Elektronen nur auf solchen Kreisbahnen befinden, deren Drehimpuls ein Vielfaches von  $\hbar$  ist. Bei einem Übergang des Elektrons zwischen den erlaubten Bahnen wird ein Photon emittiert.

Bohrs Grundhypothese, dass der Drehimpuls der Elektronen in einem Atom gequantelt ist, hat sich als wichtige Erkenntnis erwiesen und wurde als elementarer Grundsatz des quantenmechanischen Modells eines Atoms beibehalten. Mit der Verfeinerung dieses Modells wurde eine probabilistische Sichtweise der Elektronenbewegung eingeführt. In komplexeren Modellen haben die Elektronen keine genaue Bahn, sondern nur eine „Wahrscheinlichkeitsdichte“ - eine Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Ort gefunden zu werden. Diese komplexeren quantenmechanischen Modelle erklären ein viel breiteres Spektrum an atomaren und molekularen Phänomenen als das ursprüngliche Modell von Bohr. Außerdem sind die tatsächlichen Quantisierungsregeln in einem Wasserstoffatom komplexer als die, die im Bohrschen Modell

angenommen werden. So ist beispielsweise der Bahndrehimpuls im Grundzustand ( $N = 1$ ) tatsächlich Null, und nicht  $\hbar$ , wie im Bohrschen Modell vorausgesagt. Und auch für den nächsthöheren Zustand ( $N = 2$ ) kann die Komponente des Bahndrehimpulses entweder 0 oder  $\hbar$  sein. Das Photon selbst hat einen Drehimpuls  $\hbar$ , so dass dieser auch bei der Emission oder Absorption von Photonen berücksichtigt werden muss.

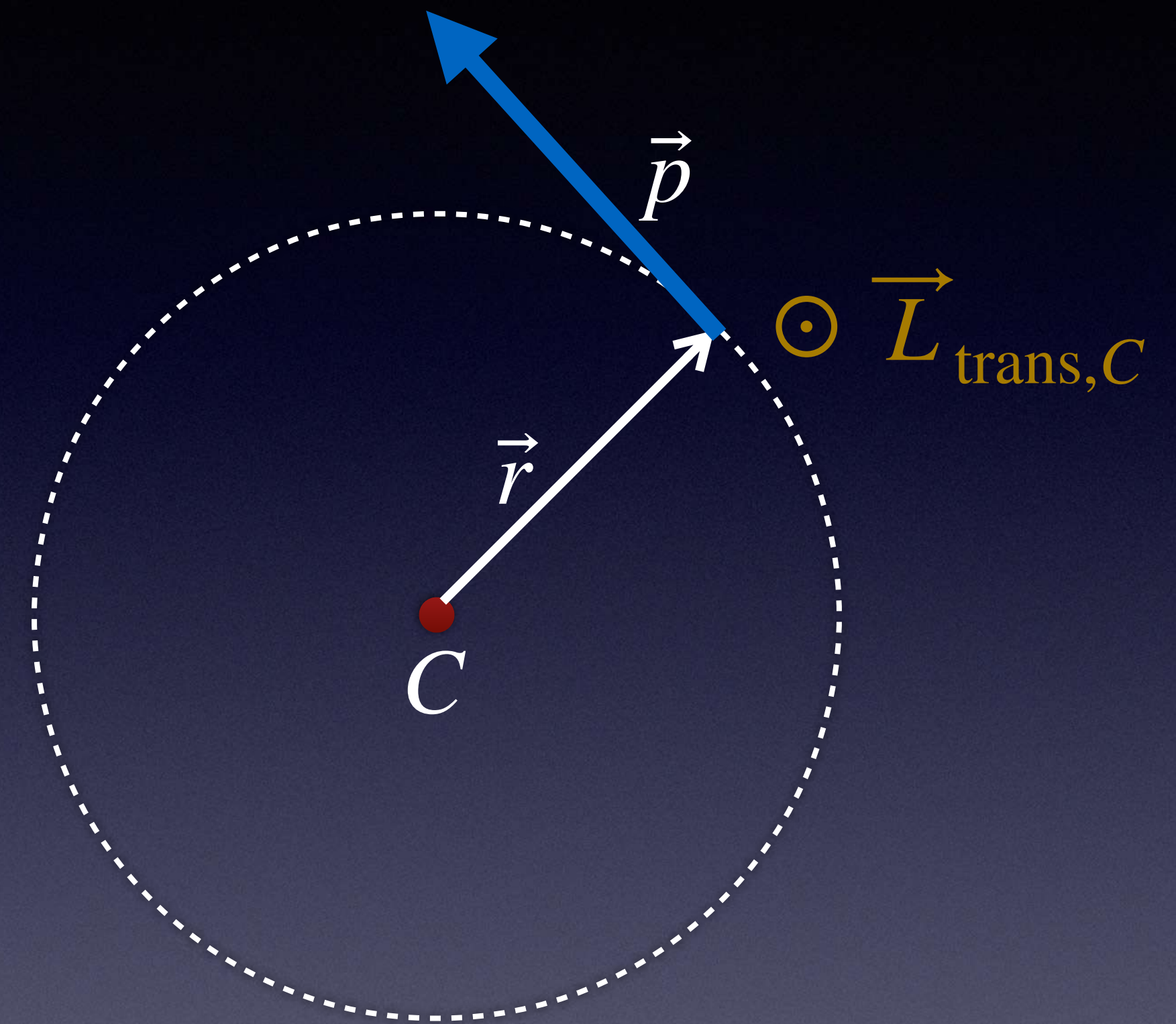
Das einfache Modell sagt jedoch die zulässigen elektronischen Energieniveaus für atomaren Wasserstoff korrekt voraus. Wir werden mit diesem Modell arbeiten, um zu sehen, wie die Quantisierung des Drehimpulses zur Vorhersage der elektronischen Energieniveaus in einem Wasserstoffatom führt.



Da das Proton viel mehr Masse hat als ein Elektron (etwa 2000 Mal so viel), gehen wir davon aus, dass das Proton in Ruhe ist und das Elektron auf einer Kreisbahn um das Proton kreist.

Der Bahndrehimpuls des Elektrons relativ zum Ort des Protons ist  $\vec{L}_{\text{trans},C} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Bohr schlug vor, dass die einzig möglichen Zustände des Wasserstoffatoms diejenigen sind, in denen sich das Elektron auf einer Kreisbahn befindet, für die der Betrag des Bahndrehimpulses ein ganzzahliges Vielfaches von  $\hbar$  ist:

$$\left| \vec{L}_{\text{trans},C} \right| = \left| \vec{r} \times \vec{p} \right| \equiv N\hbar .$$



Der Drehimpuls des Elektrons auf einer kreisförmigen Bohrschen Umlaufbahn relativ zum Proton.  $\vec{L}_{\text{trans},C}$  weist aus der Folie heraus.

Auf das Elektron übt das Proton folgende (Coulomb-) Kraft aus (Kapitel 3):

$$\left| \vec{F}_c \right| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+e)(-e)}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \right| .$$

Für die Impulsänderung des Elektrons können wir schreiben (Kapitel 5):

$$\left| \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\perp} \right| = |\vec{p}| \left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = \frac{\gamma m |\vec{v}|^2}{|\vec{r}|} .$$

Damit können wir schreiben ( $\gamma \simeq 1$ ):

$$\left| \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\perp} \right| = \left| \vec{F}_C \right| \rightarrow m \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}|^2}.$$

Mit  $|\vec{r}| |\vec{p}| \approx m |\vec{r}| |\vec{v}| = N\hbar \rightarrow |\vec{v}| = N\hbar / (m |\vec{r}|)$  folgt

$$|\vec{r}| = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} (N\hbar)^2 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} \left| \vec{L}_{\text{trans},C} \right|^2.$$

Mit  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ,  
 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$  und  $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  erhalten wir:

$$|\vec{r}| = N^2 \cdot (0.53 \times 10^{-10} \text{ m}) .$$

Dies ist ein erstaunliches Ergebnis. Das einfache Bohrsche Modell sagt voraus, dass der kleinste zulässige Elektronenradius ( $N = 1$ ),  $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$  ist. Und es wird tatsächlich beobachtet, dass die Radien von Atomen ungefähr diese Größe haben.

Wir können den Radius der Umlaufbahn eines Elektrons in einem Atom nicht direkt beobachten. Was wir beobachten können, sind die von angeregten Atomen ausgesandten Photonen, die uns die Energieunterschiede zwischen den verschiedenen Energieniveaus des Atoms anzeigen. Mit Hilfe des Bohrschen Modells können wir die Energien dieser Energieniveaus vorhersagen und sehen, ob die Unterschiede zwischen diesen Niveaus mit den Energien der in einem Spektrum beobachteten Photonen übereinstimmen.

Aus den zuvor verwendeten Gleichungen erhalten wir:

$$m \left| \vec{v} \right|^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left| \vec{r} \right|} .$$

Bei Vernachlässigung der Ruheenergie erhalten wir für die Gesamtenergie  $E_{\text{sys}}$  des Elektrons:

$$E_{\text{sys}} = E_{\text{kin}} + U_e , \text{ und damit}$$

$$E_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left| \vec{r} \right|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left| \vec{r} \right|} = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left| \vec{r} \right|} .$$

Mit Hilfe der Gleichungen

$$|\vec{r}| = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} (N\hbar)^2 \text{ und } E_{\text{sys}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}|}$$

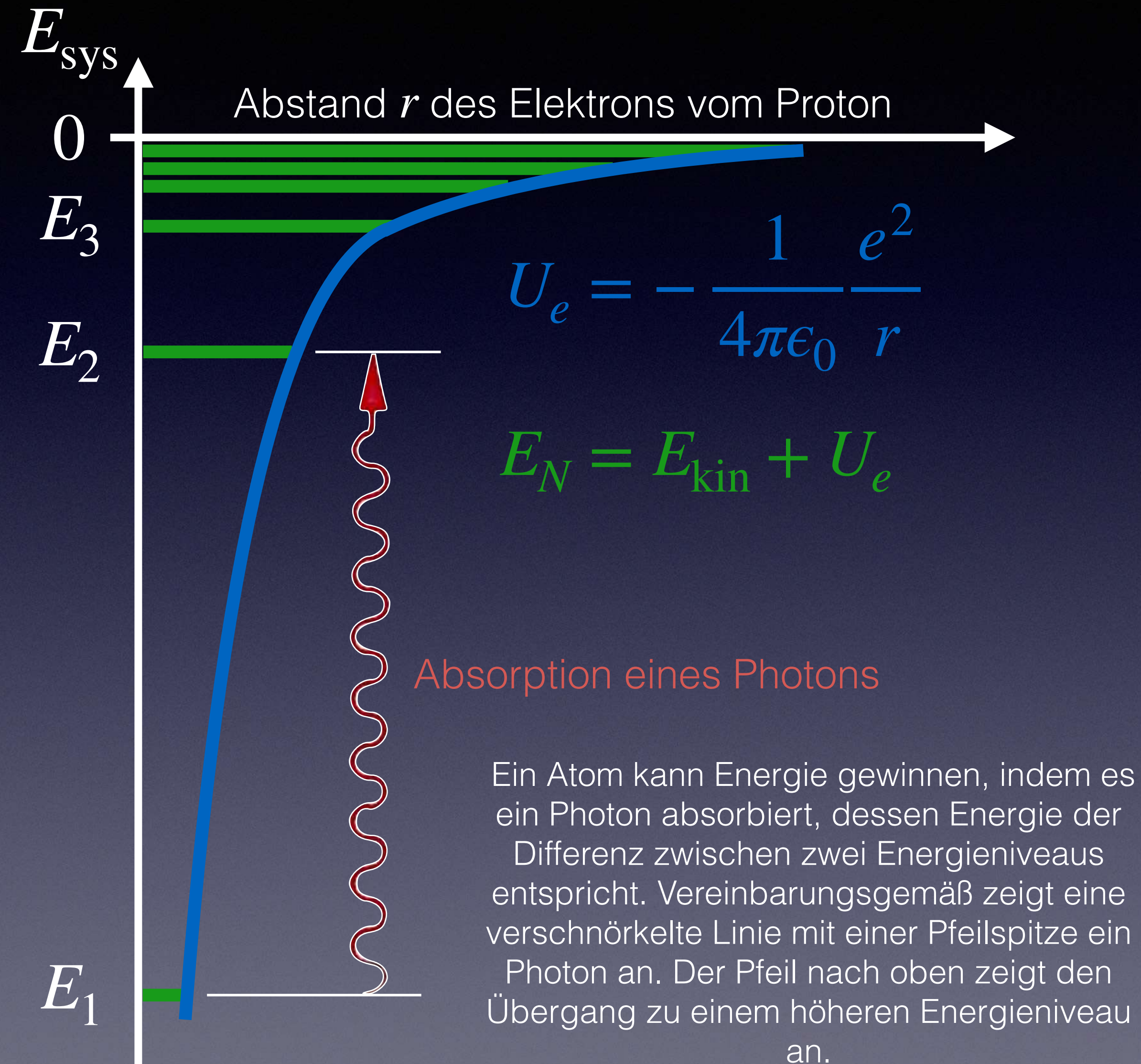
können wir die Energieniveaus  $E_{\text{sys},N}$  der Elektronen ermitteln:

$$E_{\text{sys},N} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{(N\hbar)^2} .$$

Die Auswertung des vorangehenden Ausdrucks ergibt

$$E_{\text{sys},N} \equiv E_N = -\frac{13.6 \text{ eV}}{N^2} .$$

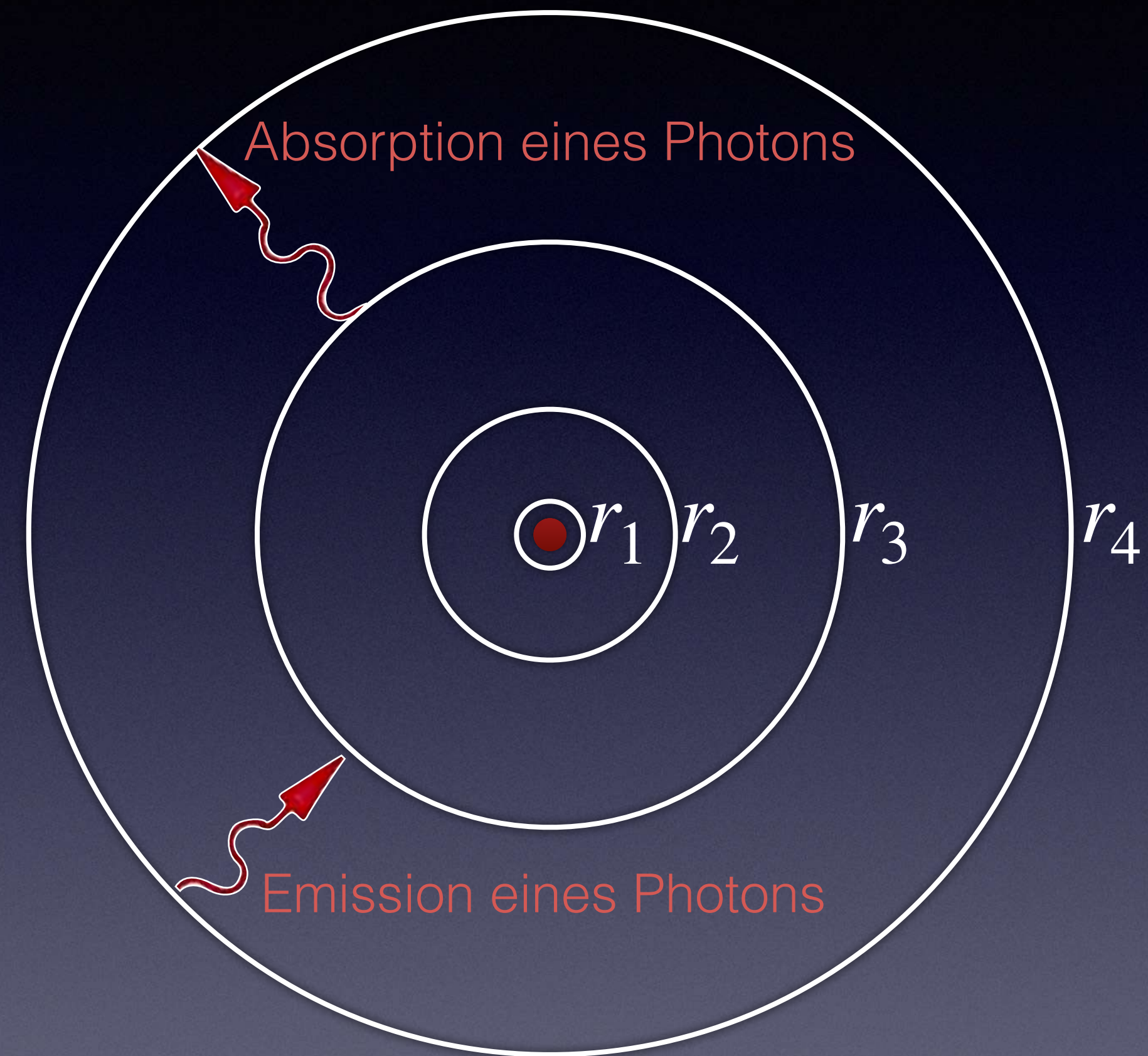
Diese Vorhersage für die quantisierten Energien  $E_N$  von atomarem Wasserstoff stimmt gut mit dem beobachteten Absorptions- und Emission-Spektrum von Wasserstoff überein. Wir haben dieses Ergebnis schon bei den quantisierten Energieniveaus in Kapitel 8 verwendet. Die Energien sind negativ, was gebundenen Zuständen entspricht.





Bohr schlug vor, dass elektromagnetische Strahlung bei einem plötzlichen Wechsel von einem höheren zu einem niedrigeren Energieniveau emittiert wird.

Die kinetische plus potenzielle Energie ist negativ, was einem gebundenen Zustand entspricht. Eine höhere Energie ist also eine weniger negative Energie und entspricht daher einem größeren Radius. Außerdem entspricht eine höhere Energie einem größeren Wert von  $N$ . Daher ist die Photonenemission mit einer Abnahme von  $N$  und  $|\vec{r}|$  verbunden. Die Absorption von Photonen geht mit einer Zunahme von  $N$  und  $|\vec{r}|$  einher.



Im Bohrschen Modell des Wasserstoffatoms können sich die Elektronen nur auf Kreisbahnen befinden, deren Drehimpuls ein Vielfaches von  $\hbar$  ist. Bei einem Übergang des Elektrons zwischen den erlaubten Bahnen wird ein Photon emittiert oder absorbiert.

Als Bohr Rutherford sein Modell erläuterte, erkannte Rutherford sofort, dass Atome ein probabilistisches Verhalten zeigen. Nach dem Bohrschen Modell kann ein Atom im zweiten angeregten Zustand entweder in den ersten angeregten Zustand (unter Aussendung eines Photons mit  $1.9 \text{ eV}$ ) oder direkt in den Grundzustand (unter Aussendung eines Photons mit  $12.4 \text{ eV}$ ) fallen. Beide Photonenenergien werden im Spektrum des atomaren Wasserstoffs beobachtet, so dass offensichtlich ein Teil der Zeit der eine Prozess stattfindet und den Rest der Zeit der andere Prozess. Dies unterscheidet sich grundlegend von dem deterministischen Verhalten, das aus der klassischen Mechanik bekannt ist.

Wir wissen, dass viele Elementarteilchen einen Eigendrehimpuls haben, weil wir die Wechselwirkung dieser Teilchen mit anderen Teilchen beobachten können. Dieser Eigendrehimpuls wird gewöhnlich als „*Spin*“ bezeichnet. Der Spin ist quantisiert (siehe Tabelle).

Spin	Typ	Teilchen (Beispiele)
0	Boson	Higgs-Boson
1/2	Fermion	Elektron, Neutrino, Quarks
1	Boson	Photon, Gluon, W- und Z-Boson

Der Spin beträgt ein halb- oder ganzzahliges Vielfaches (Spinquantenzahl) der reduzierten Planck-Konstante  $\hbar$ .

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls und dem statistischen Verhalten von Teilchen. Teilchen wie das Elektron und das Proton, die einen halbzahligen Spin haben, werden als „Fermionen“ bezeichnet. Sie weisen die Besonderheit auf, dass sich zwei Fermionen nicht in genau demselben Quantenzustand befinden dürfen. Deshalb können sich im niedrigsten Energiezustand eines Atoms nur zwei Elektronen befinden, deren Spins entgegengesetzt sind. Dieses Verbot wird als „Pauli-Prinzip“ (auch „Pauli-Verbot“ oder „Paulisches Ausschließungsprinzip“) bezeichnet.

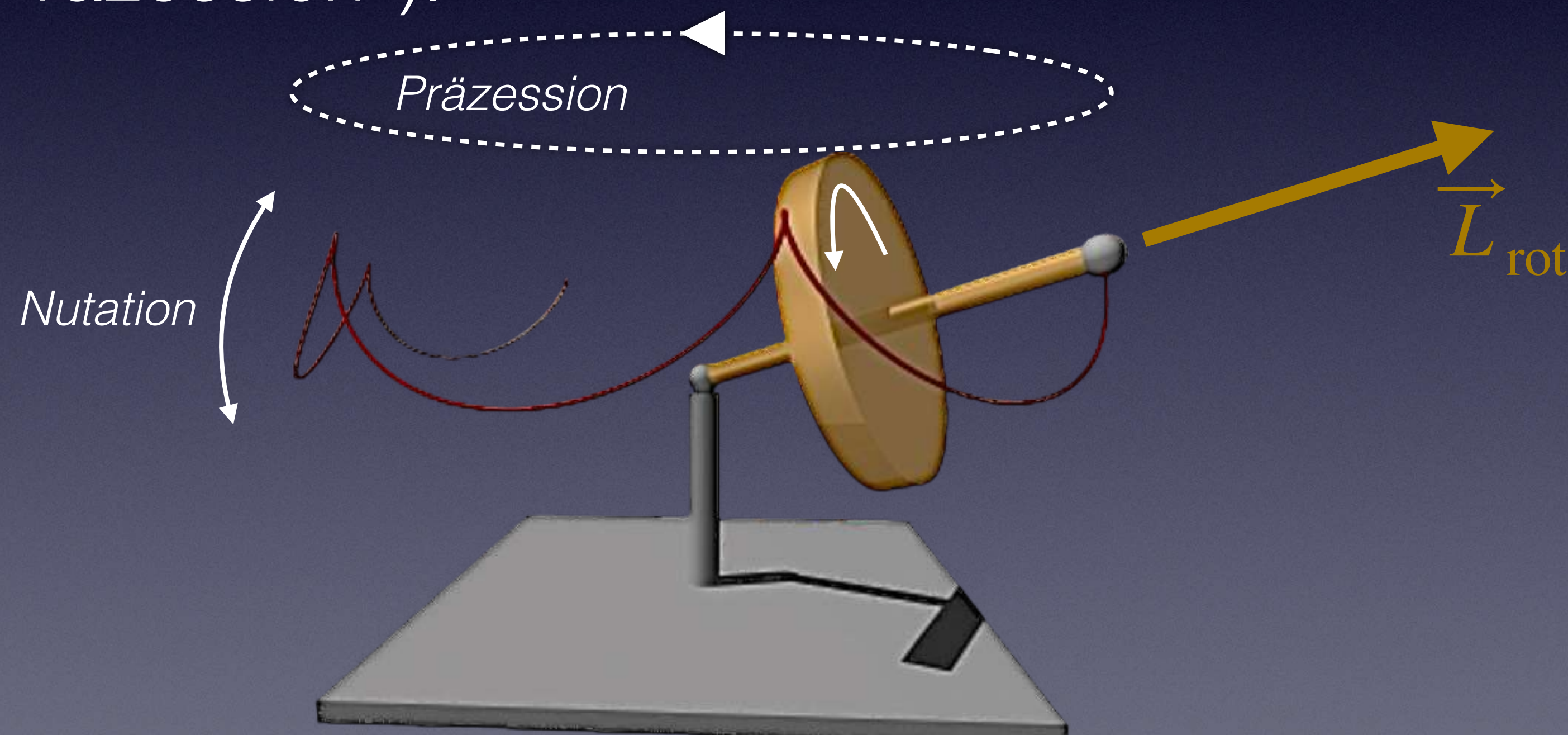
Teilchen mit ganzzahligem Spin, so genannte Bosonen, unterliegen hingegen nicht dem Pauli-Prinzip: es gibt keine Begrenzung für die Anzahl der Bosonen, die sich im gleichen Energiezustand befinden können. Tatsächlich gibt es einen besonderen (Aggregat-) Zustand der Materie, das so genannte „Bose-Einstein-Kondensat“ (BEK), bei dem eine sehr große Anzahl von Teilchen in genau demselben Quantenzustand endet. So wurde theoretisch 1924 – auf der Grundlage einer Arbeit von Satyendranath Bose über die Quantenstatistik von Photonen – von Albert Einstein vorhergesagt, dass ein homogenes ideales Bose-Gas bei tiefen Temperaturen kondensiert. Jedoch erst 1995 wurde ein BEK tatsächlich erzeugt und beobachtet.

**Aggregatzustände:** fest, flüssig, gasförmig, Plasma, BEK.

# Gyroskop

Ein Gyroskop ist ein rasch rotierender, rotationssymmetrischer Kreisel, der sich in einem beweglichen Lager dreht. Aufgrund des Prinzips Drehimpuls weist der Kreisel ein hohes Beharrungsvermögen gegenüber Lageänderungen im Raum auf. Gyroskope werden z.B. als Navigationsinstrumente sowie zur aktiven Lageregelung eingesetzt, insbesondere in der Luft- und Raumfahrt. Bei der Lageregelung von Raumflugkörpern wie Satelliten wird ausgenutzt, dass das Gesamtsystem aus Raumflugkörper und Gyroskop seinen Drehimpuls beibehält und somit durch Drehimpulsübertragung zwischen beiden die Lage gesteuert werden kann.

Bei einem Gyroskop ist eine drehende Scheibe auf einer Achse montiert. Wenn man ein Ende der Achse auf eine vertikale Stütze setzt, kann man eine sehr komplexe Bewegung beobachten. Das Gyroskop hebt und senkt sich („Nutation“), während es sich um den Träger dreht („Präzession“).



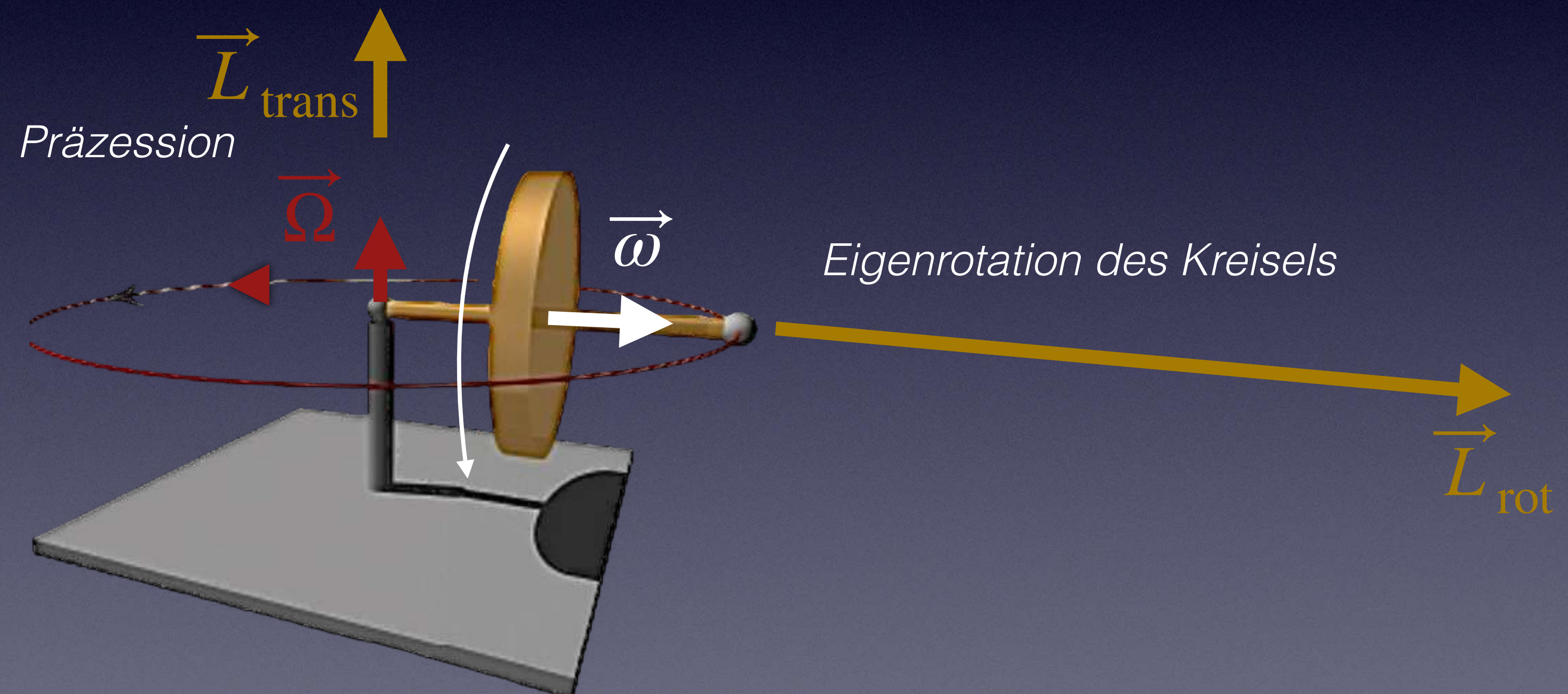
Ein Gyroskop kann sowohl „Nutation“ als auch „Präzession“ aufweisen.



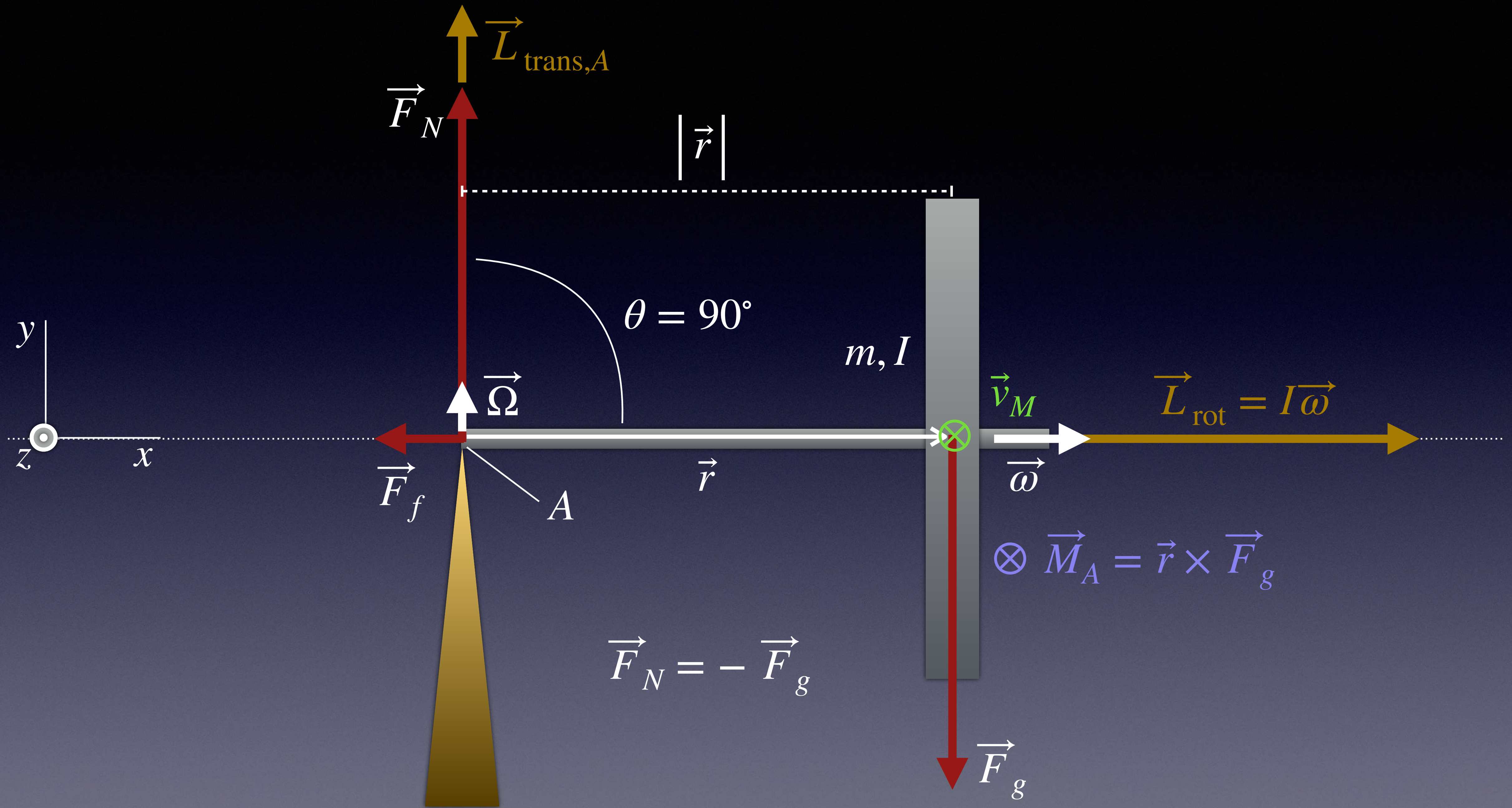
Die **Präzession** bezeichnet die Richtungsänderung, die die Rotationsachse eines rotierenden Körpers (Kreisel) ausführt, wenn eine äußere Kraft ein Drehmoment senkrecht zu dieser Achse ausübt. Dabei beschreibt die Rotationsachse einen Umlauf auf dem Mantel eines gedachten Kegels mit fester Kegelachse.

Die **Nutation** ist die Bewegung der Figurenachse eines kräftefreien Kreisels, wenn der Drehimpuls nicht parallel zu einer der Hauptachsen des Kreisels ausgerichtet ist. Bei einem symmetrischen Kreisel überstreicht durch die Nutation die Figurenachse einen Kegel mit dem Drehimpuls als Achse. Aufgrund des Prinzips Drehimpuls bleibt der Drehimpuls dabei in Betrag und Richtung konstant.

Wir versuchen zunächst die einfachste Bewegung zu analysieren, zu der das System fähig ist. Wir werden also die reine Präzession eines Kreisels beschreiben, ohne Nutation, wobei außerdem noch die Rotationsachse horizontal liegt.



Kreisel mit horizontaler Präzessionsbewegung ohne Nutation.



Prinzip Impuls ( $|\vec{p}| = \text{const}$ ):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = |\vec{p}| \frac{d\hat{p}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_f \quad \text{und} \quad \left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = \frac{|\vec{v}_M|}{|\vec{r}|} \equiv |\vec{\Omega}|,$$

$$|\vec{p}| \left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = |\vec{p}| |\vec{\Omega}| = m |\vec{r}| \vec{\Omega}^2 \rightarrow |\vec{F}_f| = m |\vec{r}| \vec{\Omega}^2.$$

Prinzip Drehimpuls:

$$\left| \vec{L}_{\text{rot}} \right| = I \left| \vec{\omega} \right| = \text{const} , \text{ und}$$

$$\left| \vec{L}_{\text{trans},A} \right| = m \vec{r}^2 \left| \vec{\Omega} \right| = \text{const} .$$

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{\text{trans},A} + \vec{L}_{\text{rot}} \right) = \vec{M}_A \rightarrow \frac{d\vec{L}_{\text{rot}}}{dt} = \vec{M}_A .$$

Mit  $\left| \frac{d\vec{L}_{\text{rot}}}{dt} \right| = \left| \vec{L}_{\text{rot}} \right| \left| \vec{\Omega} \right|$  und  $\left| \vec{M}_A \right| = \left| \vec{r} \right| \left| \vec{F}_g \right|$  folgt

$$\left| \vec{\Omega} \right| = \frac{\left| \vec{r} \right| \left| \vec{F}_g \right|}{I \left| \vec{\omega} \right|} .$$

Ein erstaunlich einfaches Ergebnis: Ein kleinerer Spin  $\left| \vec{\omega} \right|$  ist mit rascherer Präzession  $\left| \vec{\Omega} \right|$  verbunden. Ein sehr schnell rotierender Kreisel weist eine sehr langsame Präzession auf.

# Kontrollpunkt 12

K13.1: Auf den vorangehenden Folien haben wir den Fall für eine horizontal ( $\theta = 90^\circ$ ) liegende (Eigen-) Rotationsachse des Gyroskops betrachtet. (1) Wie ändert sich die Frequenz der Präzession  $\vec{\Omega}$ , bei gleich bleibendem  $\vec{\omega}$ , für  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ? (2) Wie groß ist  $\vec{\Omega}$  für  $\theta = 0^\circ$  (vertikal stehende Rotationsachse)?

Die von uns berechnete Präzession ist das Ergebnis eines von Null verschiedenen Drehmoments, das um den Massenmittelpunkt wirkt. Durch geschickte Montage des Gyroskops ist es möglich, dieses Drehmoment verschwindend klein zu machen, so dass die Achse keine Präzessionsbewegung ausführt, sondern immer die gleiche Richtung beibehält, was sich in der Navigation als nützlich erwiesen hat (Global Positioning System (GPS), Flugzeuge, ...).

Große Gyroskope wurden eingesetzt, um Schiffe gegen das Rollen im Meer zu stabilisieren. Ein Kreisel mit sehr hohem Drehimpuls (großes Trägheitsmoment und große Winkelgeschwindigkeit) lässt sich nur schwer schnell drehen, was für mechanische Stabilität sorgen kann. Dieser Effekt wird auch zur Ausrichtung von Raumfahrzeugen und Satelliten genutzt.



Wir haben bislang die Reibung bei der Berechnung absichtlich vernachlässigt. Reibung hat zwei wesentliche Auswirkungen auf ein Gyroskop. (1) Der Spin  $\vec{\omega}$  der Drehachse nimmt mit der Zeit ab, was zu einer erhöhten Präzessionsrate  $\vec{\Omega}$  führt. (2) Andererseits verlangsamt die Reibung an der Oberseite des Trägers die Präzession, was bedeutet, dass die Präzessionsrate  $\vec{\Omega}$  nicht mehr so hoch ist, wie sie bei reibungsfreier Präzession sein sollte.

Infolge dieser Effekte kann man bei einem Kreisel beobachten, dass die Drehachse allmählich nach unten kippt (Prinzip Energie), was mit einer schnelleren Präzession einhergeht. Das schnell laufende Gyroskop beginnt also mit einer langsamen Präzession, die zum Ende hin in eine „rasante“ (Präzessions-) Bewegung übergeht.

Elektrisch geladene atomare und subatomare Objekte, die einen Drehimpuls haben, verhalten sich wie kleine Stabmagnete mit Nord- und Südpolen entlang der Drehimpulsachse. In Gegenwart eines angelegten Magnetfeldes neigt ein Stabmagnet dazu, sich an dem angelegten Magnetfeld auszurichten. Dadurch wird ein Drehmoment auf einen Stabmagneten oder auf atomare oder subatomare Teilchen ausgeübt und verursacht somit eine Präzession. Dieses Phänomen wird in einer Technik ausgenutzt, die in der Physik, Chemie und Biologie eine wichtige Rolle spielt: der so genannten Kernspinresonanz (NMR). Eine besonders nützliche Anwendung der NMR ist die Magnetresonanztomographie (MRT).

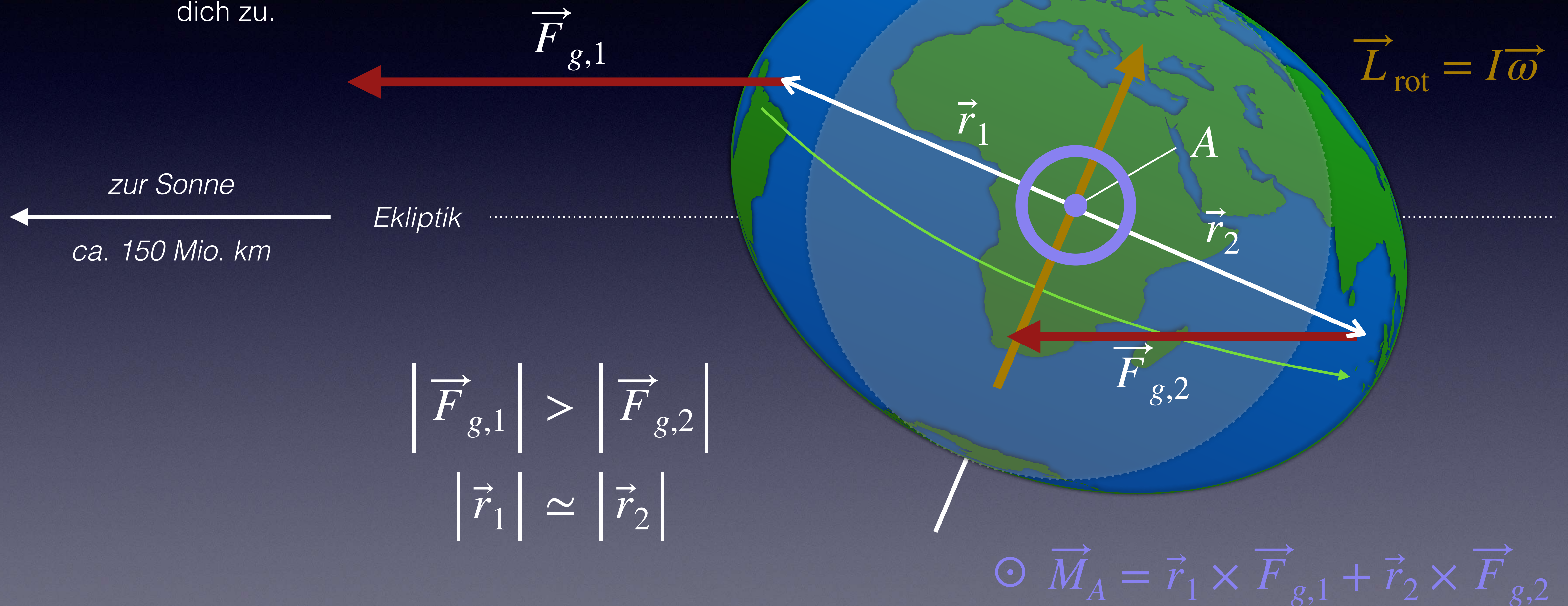
Bei der MRT werden die Protonen im Körper des Patienten durch ein starkes homogenes Magnetfeld in eine Präzessionsbewegung versetzt. Viele der im Körper vorhandenen Atome (z.B. Kohlenstoff und Sauerstoff) haben geradzahlige Kerne (Anzahl der Protonen, Neutronen), die über keinen Drehimpuls und kein magnetisches Moment verfügen und somit nicht präzessieren können. Wasserstoffkerne (Protonen) hingegen, die im Körper sehr häufig vorkommen, haben einen Drehimpuls. Je stärker das angelegte Magnetfeld ist, desto größer ist das Drehmoment, das auf die Protonen im Wasserstoffkern wirkt, und desto schneller ist ihre Präzession.

Während die Protonen in einem starken, zeitlich konstanten Magnetfeld präzessieren, stellt ein kleines, hochfrequentes (zeitlich veränderliches) Magnetfeld, das genau auf die Präzessionsfrequenz der Protonen abgestimmt ist, die Spins auf den Kopf. Dies wird als „Resonanz“-Phänomen bezeichnet. Wird das Hochfrequenzsignal abgeschaltet, kehren die Protonen in die Ausrichtung mit dem konstanten Magnetfeld zurück. Beim Umkippen wird Strahlung (auf der Präzessionsfrequenz) ausgesandt, die von Spulen, die an einen Empfänger angeschlossen sind, erfasst werden kann. Die Stärke des Signals zeigt an, wie viele Protonen betroffen waren.

Das ist der grundlegende physikalische Mechanismus, der aber allein noch keine räumlichen Details über das Innere des Körpers liefern würde. Der Trick besteht darin, das starke, homogene Magnetfeld mit einem kleinen, inhomogenen Magnetfeld zu überlagern, was zur Folge hat, dass auf die Protonen an verschiedenen Orten im Körper leicht unterschiedliche Drehmomente ausgeübt werden. Wenn sich die Protonen wieder ausrichten, strahlen sie Signale aus, deren Frequenzen ihre Position angeben. Ein Computeralgorithmus berechnet, wie viel von jeder Frequenz in dem Signal enthalten ist, und dies zeigt an, wie viele Protonen sich an jedem Ort befinden. Auf diese Weise entsteht ein sehr detailliertes Bild vom Inneren des Körpers.

Das Diagramm ist nicht maßstabsgetreu.  
 Die Abplattung der Erde sind stark übertrieben (Polradius 6356,8 km, Äquatorradius 6378,1 km). Das Nettodrehmoment um den Massenschwerpunkt der Erde weist auf dich zu.

retrograde Präzession



$$\left| \vec{F}_{g,1} \right| > \left| \vec{F}_{g,2} \right|$$

$$\left| \vec{r}_1 \right| \approx \left| \vec{r}_2 \right|$$

Die Erde unterliegt kleinen Drehmomenten aufgrund der Gravitationskräfte von Sonne und Mond, die auf ihre nicht kugelförmige, „abgeplattete“ Gestalt wirken. Auf den Äquatorialwulst der Erde wirkt ein Drehmoment senkrecht zur Rotationsachse, wodurch sich die Erdachse sehr langsam dreht. Die Periode der Drehung beträgt etwa 26.000 Jahre, so dass der „Nordstern“ nicht immer der Stern ist, den wir heute Polarstern (*Stella Polaris*) nennen. Dieser Effekt wird als „Präzession der Äquinoktien“ bezeichnet, weil er zu einer Veränderung des Zeitpunkts der Frühlings- und Herbst-Tagundnachtgleiche führt. Da die Erdachse nicht senkrecht auf der Ekliptik steht, führt die Präzession der Rotationsachse zu einer großen Veränderung der Position des Nordsterns. In ca. 13.000 Jahren wird der Nordstern somit ein Stern sein, der vom Polarstern am Nachthimmel ca.  $46^\circ$  entfernt liegt.

Betrachten wir das System Erde-Mond: da der Mond die Erde umkreist, haben wir eine Art Kreisel. Die Erde-Mond-Umlaufbahn ist um einige Grad zur Ekliptik geneigt. Somit übt die Sonne ein von Null verschiedenes Drehmoment senkrecht zum Drehimpuls des Erde-Mond-Systems aus. Dieses Drehmoment variiert im Laufe eines Monats in seiner Größe, aber der durchschnittliche Effekt ist, dass das Erde-Mond-System einmal in ca. 18 Jahren präzessiert (diese Präzessionsbewegung ist ebenfalls „retrograd“). Dies wirkt sich auf den Zeitpunkt von Sonnen- und Mondfinsternissen aus, die nur dann stattfinden können, wenn der Mond auf seiner Bahn durch die Ebene der Ekliptik läuft.



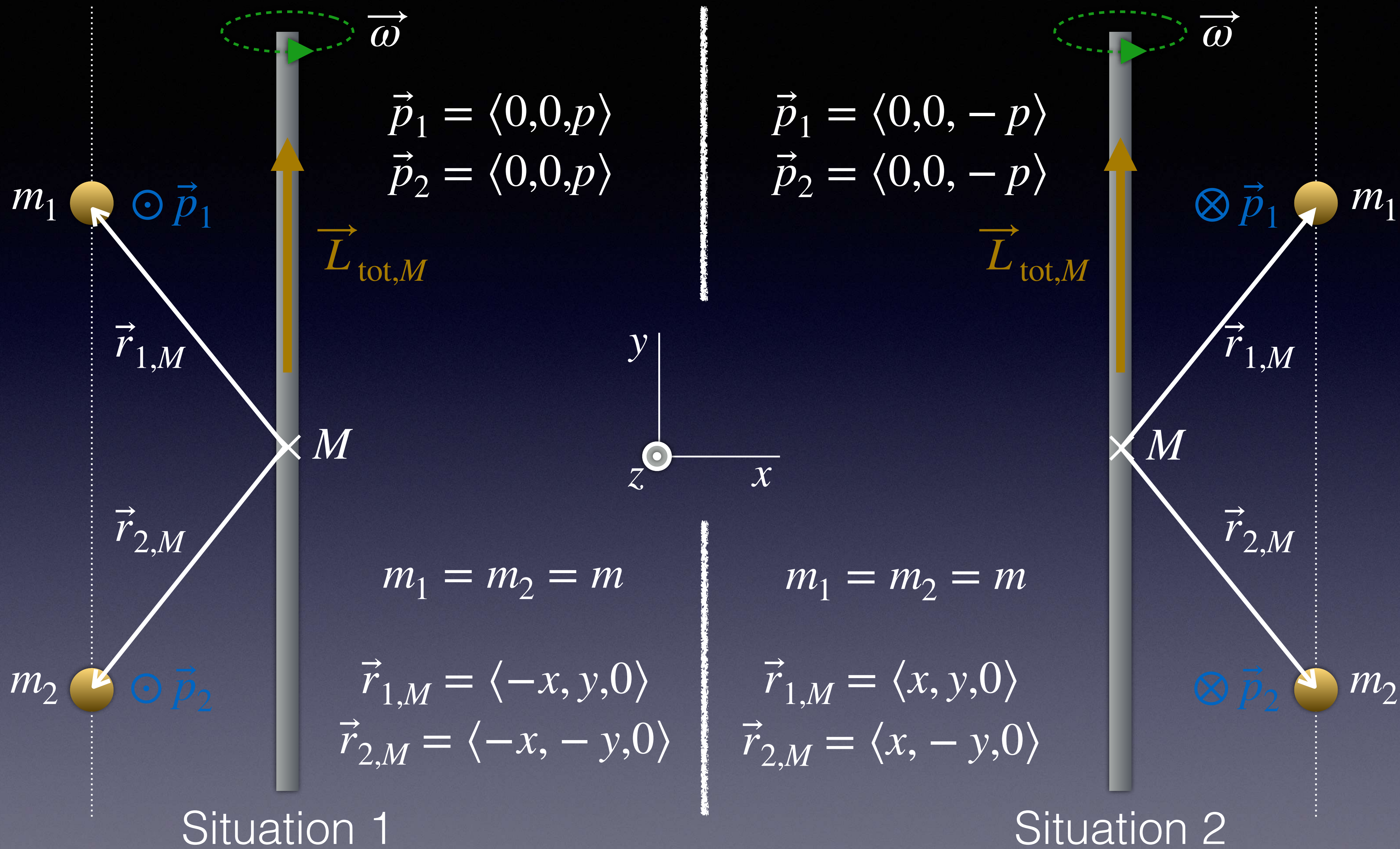
Drehte sich die Erde nicht, würde der Mond in den Ozeanen Gezeiten erzeugen, die sich in einer Linie mit dem Mond ausrichten würden. Die rotierende Erde zieht diese Gezeitenwülste jedoch so mit sich, dass sie nicht mehr in einer Linie mit dem Mond liegen, und der Mond übt deshalb ein kleines Drehmoment auf die Erde aus. Dieses Drehmoment reduziert die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, so dass der Tag allmählich länger wird. Dieser Effekt wird als „Gezeitenreibung“ bezeichnet. Diese Wechselwirkung mit dem Mond bewirkt, dass mit abnehmendem Eigendrehimpuls der Erde der Bahndrehimpuls des Erde-Mond-Systems zunimmt (Erhaltung des Gesamtdrehimpulses), mit dem Ergebnis, dass sich Erde und Mond weiter voneinander entfernen.

# Mehr zum Thema Trägheitsmoment

In der in Abschnitt „Eigendrehimpuls“ gezeigten Situation mit vier Massen, liegen alle Massen in einer Ebene, die senkrecht zur Drehachse steht. Was passiert, falls sie nicht alle in derselben Ebene liegen? Wir werden zeigen, dass für einfache starre Systeme das Trägheitsmoment immer noch durch Addition von Termen wie

$m_i \left| \vec{r}_{i\perp} \right|^2 \left| \vec{\omega} \right|$  berechnet werden kann, wobei die senkrechten Abstände  $\left| \vec{r}_{i\perp} \right|$  von der Rotationsachse aus gemessen werden.

Wir betrachten dazu zwei gleiche Massen, die an einer rotierenden Welle befestigt sind. Wir wollen den Drehimpuls relativ zum Mittelpunkt des Geräts bestimmen, der mit  $M$  bezeichnet wird.



Bahndrehimpuls (Situation 1):

$$\vec{L}_{1,M} = \vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1, \quad \vec{L}_{2,M} = \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_{1,M} = \langle -x, y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, p \rangle = \langle yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{2,M} = \langle -x, -y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, p \rangle = \langle -yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{\text{tot},M} = \vec{L}_{1,M} + \vec{L}_{2,M} = \langle 0, 2xp, 0 \rangle$$

Du kannst an den auf der vorangehenden Folie gezeigten Ergebnissen erkennen, dass die einzelnen Beiträge  $\vec{L}_{1,M}$  und  $\vec{L}_{2,M}$  Komponenten haben, die nicht entlang der rotierenden Achse verlaufen. Diese Komponenten heben sich jedoch für Paare von Massen über- und untereinander auf. Der Effekt ist, dass der gesamte Drehimpuls  $\vec{L}_{\text{tot},M}$  schließlich entlang der rotierenden Achse zu liegen kommt.

Mit  $x \equiv \left| \vec{r}_{1,\perp} \right| = \left| \vec{r}_{2,\perp} \right|$  und  $p = mx \left| \vec{\omega} \right|$  erhalten wir das bekannte Ergebnis  $\vec{L}_{\text{tot},M} = I \left| \vec{\omega} \right|$ , worin  $I = 2mx^2 \equiv m \left| \vec{r}_{1,\perp} \right|^2 + m \left| \vec{r}_{2,\perp} \right|^2$  ist.

Bahndrehimpuls (Situation 2):

$$\vec{L}_{1,M} = \vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1, \quad \vec{L}_{2,M} = \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_{1,M} = \langle x, y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, -p \rangle = \langle -yp, xp, 0 \rangle$$

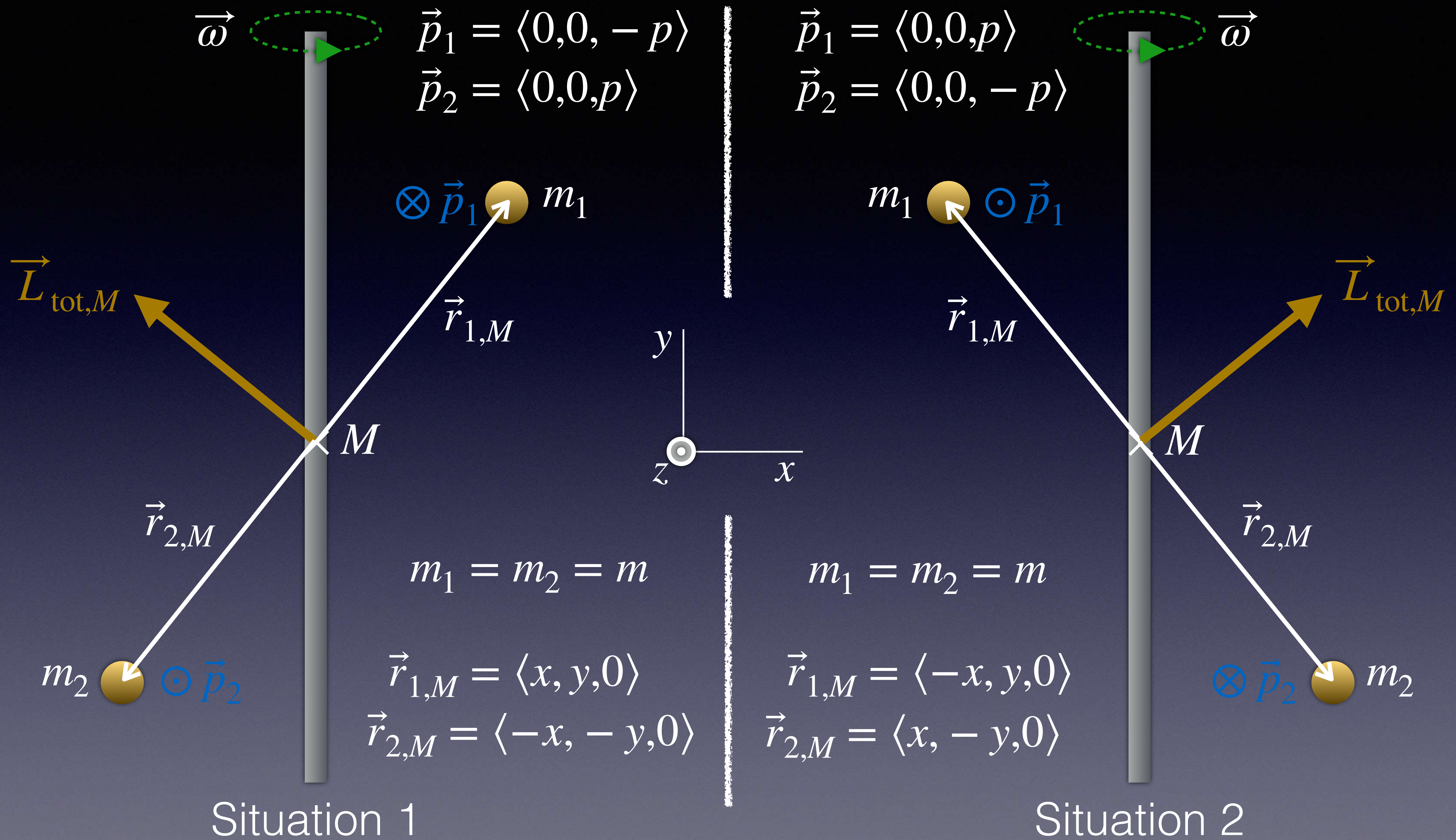
$$\vec{L}_{2,M} = \langle x, -y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, -p \rangle = \langle yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{\text{tot},M} = \vec{L}_{1,M} + \vec{L}_{2,M} = \langle 0, 2xp, 0 \rangle$$

Das Ergebnis stimmt mit dem für „Situation 1“ überein.

Das Ergebnis für den Bahndrehimpuls  $\vec{L}_{\text{tot},M}$  stimmt für das axialsymmetrische System 2 mit dem Ergebnis für System 1 überein.





Bahndrehimpuls (Situation 1):

$$\vec{L}_{1,M} = \vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1, \quad \vec{L}_{2,M} = \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_{1,M} = \langle x, y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, -p \rangle = \langle -yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{2,M} = \langle -x, -y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, p \rangle = \langle -yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{\text{tot},M} = \vec{L}_{1,M} + \vec{L}_{2,M} = \langle -2yp, 2xp, 0 \rangle$$

Bahndrehimpuls (Situation 2):

$$\vec{L}_{1,M} = \vec{r}_{1,M} \times \vec{p}_1, \quad \vec{L}_{2,M} = \vec{r}_{2,M} \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_{1,M} = \langle -x, y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, p \rangle = \langle yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{2,M} = \langle x, -y, 0 \rangle \times \langle 0, 0, -p \rangle = \langle yp, xp, 0 \rangle$$

$$\vec{L}_{\text{tot},M} = \vec{L}_{1,M} + \vec{L}_{2,M} = \langle 2yp, 2xp, 0 \rangle$$

Das Ergebnis stimmt nicht mit dem für „Situation 1“ überein.

In Kursen für Fortgeschrittene kannst du unsymmetrische Situationen der Rotation, wie auf den drei vorangehenden Folien dargestellt, untersuchen. Die Winkelgeschwindigkeit zeigt weiter entlang der Rotationsachse, aber der (Bahn-) Drehimpuls jeder Masse ist so, dass der Gesamtdrehimpuls nicht in Achsenrichtung zeigt! Außerdem ändert der Drehimpulsvektor ständig seine Richtung. Diese Drehimpulsänderung erfordert ein von Null verschiedenes Drehmoment, das von den Lagern, in denen die Achse rotiert, auf die Achse ausgeübt wird. Diese „dynamische Unwucht“ führt zu einer starken Abnutzung der Achse und der Lager. Um dies zu verhindern, müssen z.B. Autoreifen sorgfältig „ausgewuchtet“ werden.

Wir haben das Trägheitsmoment als Summe (Integral) über dem senkrechten Abstand  $r_{A\perp}$  zu einer Achse berechnet. Um Rotationsbewegungen im Allgemeinen zu behandeln, muss das Trägheitsmoment als „Tensor“ ausgedrückt werden, eine 3-mal-3-Matrix von Zahlen, die Integrale über  $x^2, xy, xz, y^2, yx, yz, z^2, zx, zy$  darstellen. Die Matrixmultiplikation dieses Tensors mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ergibt einen Drehimpulsvektor  $\vec{L}$ , der nicht unbedingt in dieselbe Richtung zeigen muss wie  $\vec{\omega}$ . Dies ist allerdings Thema eines Kurses für Fortgeschrittene.

Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: -y-Richtung.

K2.1: (1)  $\vec{L}_B = \vec{r}_B \times \vec{p} = \langle -4, 3, 0 \rangle \times \langle 10, 0, 0 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$

$\vec{L}_B = \langle 0, 0, -30 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad |\vec{L}| = |\vec{r}_B| |\vec{p}| \sin \theta, \text{ mit } \theta \text{ Winkel}$

zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$ ;  $\sin \theta = 3/5$ ;  $|\vec{L}_B| = 5 \cdot 10 \cdot 3/5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ; Richtung

mit rechter Handregel.  $|\vec{L}| = r_{B\perp} |\vec{p}|$ ;  $|\vec{L}_B| = 3 \cdot 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ;

Richtung mit rechter Handregel. (2)  $\vec{L}_A = \vec{L}_B, \vec{L}_C = \vec{0}$ . (3)

$\vec{L}_D = -5/3 \vec{L}_B$ . (4)  $\vec{L}_H = \vec{L}_A = \vec{L}_B, \vec{L}_G = \vec{L}_C = \vec{0}$ ,

$\vec{L}_F = \vec{L}_E = \vec{L}_D$ ; jeweils identisch, da jeweils gleicher Hebelarm.

K3.1: (1)  $\vec{L}_{\text{trans},1,A} = \langle L/2, 0, 0 \rangle \times \langle 0, 0, \pi m f L \rangle,$   
 $\vec{L}_{\text{trans},1,A} = \langle 0, -\pi m f L^2/2, 0 \rangle,$   
 $\vec{L}_{\text{trans},1,A} \approx \langle 0, -0.92, 0 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; \vec{L}_{\text{trans},2,A} = \vec{L}_{\text{trans},1,A};$   
 $\vec{L}_{\text{trans},A} = 2\vec{L}_{\text{trans},1,A}. (2) I = mL^2/2; I = 0.49 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \vec{L}_{\text{rot}} = I\vec{\omega};$   
 $\vec{L}_{\text{rot}} \approx \langle 0, -1.85, 0 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \equiv \vec{L}_{\text{trans},A};$  identisch, da wir die  
Eigenrotation der beiden Massen vernachlässigen. (3)  
 $E_{\text{kin,rot}} = I \left| \vec{\omega} \right|^2 / 2 \approx 34.82 \text{ J}.$

K4.1: (1) Ungleich Null. (2) Zeigt nach oben. (3) Ungleich Null. (4)  
Zeigt nach oben.



K5.1: (1) Schwerkraft auf die Kinder,  $\vec{F}_{g,1}$  und  $\vec{F}_{g,2}$ ; Kontaktkraft  $\vec{F}_N$  im Auflagepunkt  $A$  der Wippe. (2)  $\vec{M}_{\text{net}} = \vec{r}_{1,A} \times \vec{F}_{g,1} + \vec{r}_{2,A} \times \vec{F}_{g,2}$ ;  
 $\vec{M}_{\text{net}} = \langle d, 0, 0 \rangle \times \langle 0, -m_1g, 0 \rangle + \langle -d, 0, 0 \rangle \times \langle 0, -m_2g, 0 \rangle$ ;  
 $\vec{M}_{\text{net}} = dg \langle 0, 0, m_2 - m_1 \rangle$ ,  $\vec{M}_{\text{net}} \approx \langle 0, 0, -117.6 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$ .

K6.1: (1)  $\vec{M}_F = \vec{M}_E = \vec{M}_D = \langle 0, 0, -50 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  
 $\vec{M}_G = \vec{M}_C = \langle 0, 0, 0 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $\vec{M}_H = \vec{M}_A = \vec{M}_B = \langle 0, 0, 30 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$ .

K7.1: Verwende  $\vec{M}_{\text{net}}$  aus Aufgabe K5.1. (1)  $\vec{L}_{A,f} = \vec{L}_{A,i} + \vec{M}_{\text{net}}\Delta t$ ;  
 $\vec{L}_{A,f} = \vec{0} + \vec{M}_{\text{net}}\Delta t$ ;  $\vec{L}_{A,f} \approx \langle 0,0, -47 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}$ . (2) In -z-Richtung, also in die Ebene der Folie hinein.

K8.1: (1)  $\vec{p}_{\text{sys},f} = \vec{p}_{\text{sys},i}$ ,  $m_s \vec{v}_{s,f} + m_m \vec{v}_{m,f} = m_s \vec{v}_{s,i} + m_m \vec{v}_{m,i} \rightarrow$   
 $\vec{v}_{s,f} = \vec{v}_{s,i} + \frac{m_m}{m_s} (\vec{v}_{m,i} - \vec{v}_{s,i})$ . (2)  $\vec{L}_{\text{sys},f} = \vec{L}_{\text{sys},i}$ ,  $I_s = \frac{2}{5} m_s R^2$ . Drehimpuls

mit ausschließlicher Komponente in -z-Richtung:

$$I_s \left| \vec{\omega}_{s,f} \right| + m_m d \cos \theta \left| \vec{v}_{m,f} \right| = I_s \left| \vec{\omega}_{s,i} \right| + m_m d \cos \theta \left| \vec{v}_{m,i} \right| \rightarrow$$

$$\left| \vec{\omega}_{s,f} \right| = \left| \vec{\omega}_{s,i} \right| + \frac{5m_m d \cos \theta}{2m_s R^2} \left( \left| \vec{v}_{m,i} \right| - \left| \vec{v}_{m,f} \right| \right).$$

K9.1: Der gesamte Drehimpuls aus Erdkern und Erdmantel muss erhalten bleiben. Verlangsamt sich die Drehung des Erdkerns, so müsste sich der Erdmantel (und die auf ihm liegende Erdkruste) rascher drehen. Dies sollte zu einer Abnahme der Tageslänge führen.

$$\text{K10.1: } \frac{d\vec{L}_{\text{sys},R}}{dt} = \vec{M}_{\text{net},R} = \vec{0}, \quad \vec{M}_{\text{net},R} = \vec{M}_{2,R} + \vec{M}_{N,R} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_{2,R} = \left\langle 0, 0, m_2 g (d_1 + d_2) \right\rangle, \quad \vec{M}_{N,R} = \left\langle 0, 0, - (m_1 + m_2) g d_1 \right\rangle;$$

$$m_2 g d_2 - m_1 g d_1 = 0 \rightarrow d_1 = \frac{m_2}{m_1} d_2 = 1.2 \text{ m.}$$

K11.1: Drehimpuls in +z-Richtung. (1)  $I_z \left| \vec{\omega}_f \right| = \left| \vec{M}_{\text{net}} \right| \Delta t$ . Mit  $I_z = \frac{1}{2} m R^2$  folgt für  $\left| \vec{\omega}_f \right| = 10 \text{ rad/s}$ . (2)  $\left| \vec{\omega}_{\text{mit}} \right| = 5 \text{ rad/s}$ . (3)  $\Delta\theta = 3 \text{ rad} \simeq 171.89^\circ$ . (4)  $\Delta x = \left| \vec{\omega}_{\text{mit}} \right| R \Delta t = 0.9 \text{ m}$ .

K12.1: Für  $\theta = 90^\circ$  erhielten wir 
$$\left| \vec{\Omega} \right| = \frac{\left| \vec{r} \right| \left| \vec{F}_g \right|}{I \left| \vec{\omega} \right|}. \quad (1)$$
 Für

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  verringert sich das Drehmoment um den Faktor  $\sin \theta$ . Gleichzeitig reduziert sich die horizontale ( $x$ -) Komponente des Eigendrehimpulses ebenfalls um den Faktor  $\sin \theta$ . Damit ist die Frequenz der Präzession für  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  unabhängig von  $\theta$ . (2) Für  $\theta = 0^\circ$  verschwindet die Präzession, da kein Drehmoment mehr auf den Kreisel wirkt.

# Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 12 - Entropie: Begrenzung des Möglichen