

# Moderne Mechanik

Teil 10  
Kollisionen

# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- Informationen zu vergleichen, die eine analytische Behandlung eines Zusammenstoßes liefert, mit den Informationen, die aus einem iterativen Berechnungsmodell des Prozesses gewonnen werden.
- Zwischen elastischen und unelastischen Kollisionen zu unterscheiden.
- Eine Analyse von elastischen und unelastischen Kollisionen unter Verwendung einer Kombination aus Energie- und Impulsprinzip durchzuführen.
- Eine Analyse von Kollisionen in mehreren Bezugssystemen vorzunehmen.

# Übersicht

- Kollisionen (Stöße)
- Elastische und unelastische Kollisionen (Stöße)
- Frontalzusammenstoß gleicher Massen
- Frontalzusammenstoß ungleicher Massen
- Streuung: Kollisionen in 2D und 3D
- Entdeckung des Atomkerns
- Verteilung der Streuwinkel
- Relativistischer Impuls und Energie
- Unelastische Kollisionen und quantisierte Energie
- Kollisionen in anderen Bezugssystemen
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

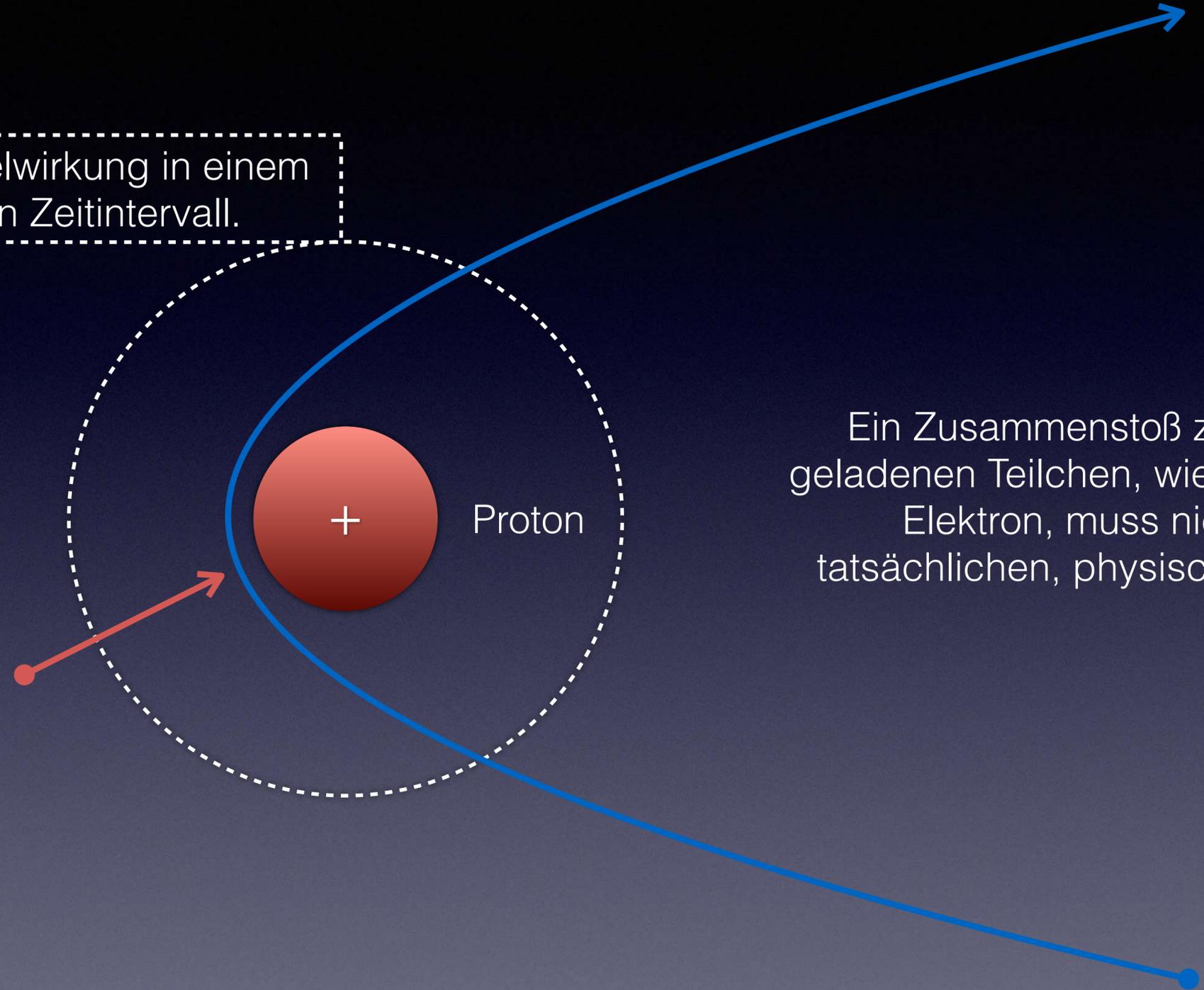
# Kollisionen (Stöße)

Kollisionen sind ein häufiges Ereignis. Neutrale Moleküle in einem Gas stoßen oft zusammen - die elektrische Kraft zwischen den Atomen hat eine kurze Reichweite, so dass es nur zu einer geringen Wechselwirkung kommt, bis die Moleküle fast in Kontakt kommen. Ähnlich häufig sind Zusammenstöße zwischen makroskopischen Objekten: Vor und nach dem Aufprall eines Balls auf eine Wand gibt es kaum Wechselwirkungen mit der Wand, und der Kontakt zwischen Ball und Wand dauert nur sehr kurz.

Kollidierende Objekte müssen sich während des Zusammenstoßes nicht berühren, wenn sie über weitreichende Kräfte aufeinander einwirken. Eine Kollision ist jeder Vorgang, bei dem es vor und nach einem kurzen Zeitintervall zu einer geringen Wechselwirkung und während dieses kurzen Zeitintervalls zu einer großen Wechselwirkung kommt. Da die elektrische Kraft auf Distanz wirkt, kann ein sich bewegendes Elektron mit einem sich bewegenden Proton ohne physischen Kontakt zusammenstoßen, wie auf der nachfolgenden Folie schematisch dargestellt.

— Elektron

Große Wechselwirkung in einem sehr kurzen Zeitintervall.



Ein Zusammenstoß zwischen sich bewegenden geladenen Teilchen, wie z. B. einem Proton und einem Elektron, muss nicht unbedingt mit einem tatsächlichen, physischen Kontakt verbunden sein.

In den Kapiteln 2 und 3 dieser Foliensammlung haben wir das Prinzip Impuls auf Kollisionen angewandt, also auf Wechselwirkungen, bei denen große Kräfte für kurze Zeit wirken. Viele Arten von Kollisionen können nicht vollständig analysiert werden, ohne auch das Prinzip Energie anzuwenden, und dieses Kapitel befasst sich mit solchen Situationen. Wir werden auch sehen, dass je nach den Informationen, die uns zur Verfügung stehen, und je nachdem, was wir über eine Kollision wissen wollen, eine analytische Lösung unter Umständen überhaupt nicht möglich ist und wir den Prozess rechnerisch modellieren müssen.

Bei der Analyse eines Zusammenstoßes werden in der Regel beide kollidierenden Objekte als System gewählt. Bei dieser Wahl des Systems sind die großen Kräfte zwischen den kollidierenden Objekten innere Kräfte. Da diese inneren Kräfte sehr groß sind - viel größer als die Kräfte, die von Objekten in der Umgebung ausgehen - ist die Wirkung äußerer Kräfte während der Kollision vernachlässigbar. Da eine Kollision nur kurze Zeit dauert, ist auch der Energiefluss aufgrund von Temperaturunterschieden zwischen System und Umgebung ebenfalls vernachlässigbar. Da wir die Wechselwirkungen mit der Umgebung vernachlässigen können, müssen sowohl der Gesamtimpuls  $\vec{p}_{\text{sys}}$  als auch die Gesamtenergie  $E_{\text{sys}}$  des Systems während des Zusammenstoßes konstant bleiben, obwohl sowohl Impuls als auch Energie zwischen den Objekten im System ausgetauscht werden können.

In den folgenden Abschnitten werden wir sehen, dass die Anwendung der Prinzipien Impuls und Energie es uns ermöglicht, verschiedene Arten von Kollisionen mit einem analytischen (algebraischen) Ansatz zu analysieren. Allerdings lassen sich nicht alle Probleme auf diese Weise lösen. Wir werden die Möglichkeiten und Grenzen dieses Ansatzes in einem späteren Abschnitt untersuchen.

Beispiel für ein System.



Proton



Elektron

$$\Delta \vec{p}_{\text{sys}} + \Delta \vec{p}_{\text{umg}} = \vec{0}$$

Prinzip Impuls für Kollisionen

$$\Delta \vec{p}_{\text{sys}} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i$$

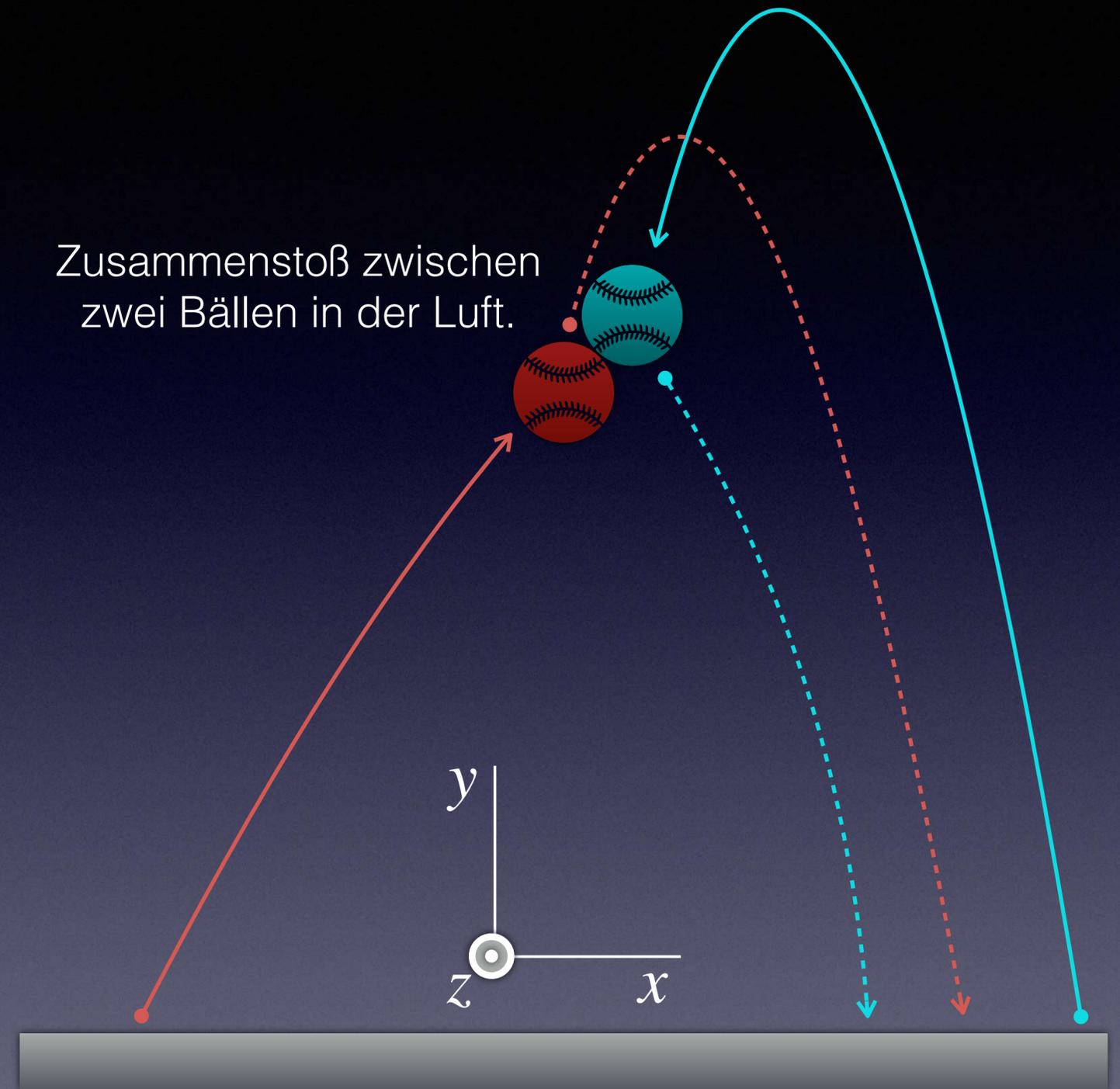
$$\Delta E_{\text{sys}} + \Delta E_{\text{umg}} = 0$$

Prinzip Energie für Kollisionen

$$\Delta E_{\text{sys}} = 0 \rightarrow E_f = E_i$$

In Kapitel 2 haben wir die Kräfte und Wechselwirkungszeiten untersucht, die bei Zusammenstößen auftreten. Zum Beispiel als ein Hockeyschläger einen Puck so hart traf, dass der Schläger zerbrach, betrug die Kraft, die der Schläger auf den Puck ausübte, ungefähr  $1000 \text{ N}$ , und die Wechselwirkung dauerte nur ungefähr  $0.005 \text{ s}$ . (Zum Vergleich: Die Gravitationskraft der Erde auf einen  $160 \text{ g}$  Hockeypuck beträgt nur ungefähr  $1.6 \text{ N}$ .)

Diese Merkmale rechtfertigen einen Ansatz für die Analyse von Kollisionen. Bis zum Aufprall und nach dem Aufprall müssen wir die äußeren Kräfte berücksichtigen, die den Gesamtimpuls des Systems beeinflussen. Nebenstehendes Beispiel: An den gekrümmten Flugbahnen der Bälle kann man erkennen, dass die Schwerkraft der Erde vor und nach dem Zusammenstoß einen erheblichen Einfluss hat. Während der sehr kurzen Zeit des Zusammenstoßes hat sie jedoch nur eine vernachlässigbare Wirkung, so dass sowohl der Gesamtimpuls als auch die Gesamtenergie des Systems während des Aufpralls nahezu konstant bleiben.



# Elastische und unelastische Kollisionen (Stöße)

Häufig werden wir uns auf die Änderungen der kinetischen Translationsenergie  $\Delta E_{\text{kin,trans}}$  konzentrieren, die aus einem Zusammenstoß zwischen zwei Objekten resultiert. Wir werden den Begriff „innere Energie“  $E_{\text{int}}$  verwenden, um uns auf die anderen Arten von Energie zu beziehen, die Objekte haben können - zum Beispiel elektronische Energie (Energie der quantisierten Energie-Niveaus) Schwingungsenergie, Rotationsenergie oder die zufällige thermische Energie eines festen Objekts, dessen Atome und chemische Bindungen schwingen.

Wir bezeichnen einen Zusammenstoß als „elastisch“, wenn sich die innere Energie  $E_{\text{int}}$  der wechselwirkenden Objekte nicht ändert: kein Anstieg der Wärmeenergie (verbunden mit einer Temperaturerhöhung), keine neu zusammengedrückten „Federn“, keine dauerhaften Verformungen, keine neuen Rotationen oder Vibrationen usw. Für das gesamte System gilt dann:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$E_{\text{kin},f} = E_{\text{kin},i}$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i$$

Wir nennen eine Kollision „inelastisch“, wenn sie nicht elastisch ist, d.h., wenn sich die innere Energie  $E_{\text{int}}$  der kollidierenden Objekte verändert. Objekte erhitzen sich, verformen sich, beginnen zu rotieren oder vibrieren und so weiter. Für das gesamte System gilt dann:

$$\Delta E_{\text{int}} > 0$$

$$E_{\text{kin},f} < E_{\text{kin},i}$$

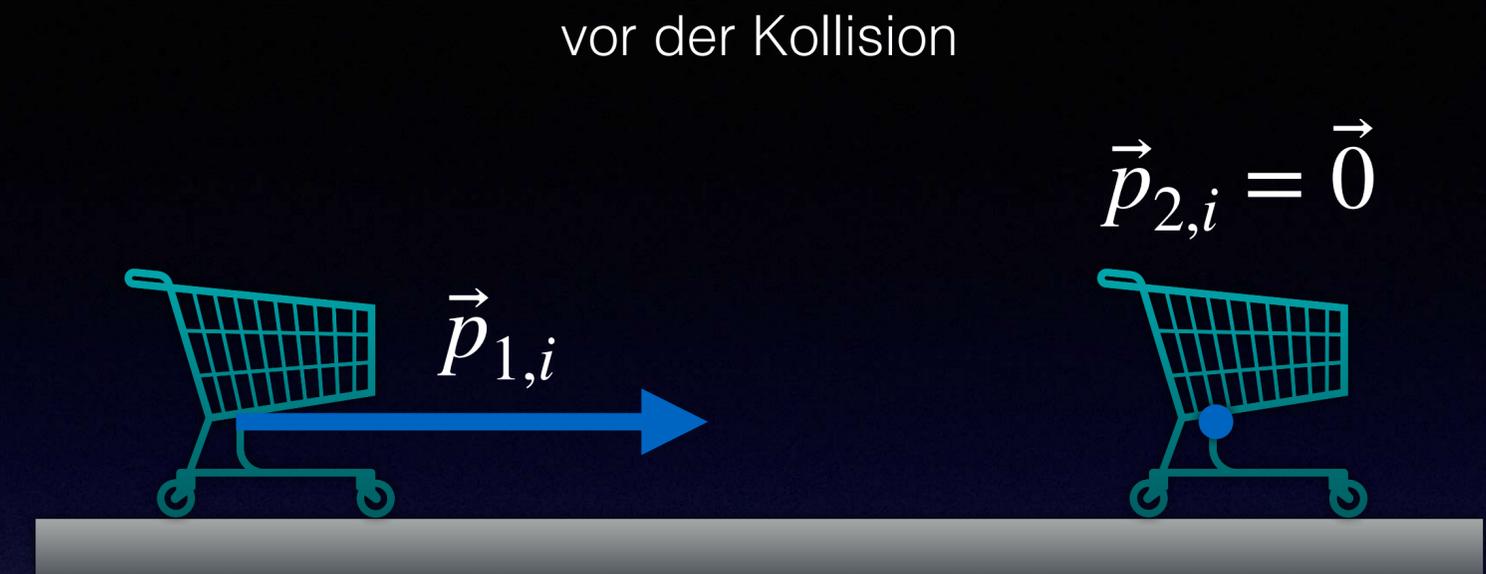
$$\vec{p}_f = \vec{p}_i$$

Bei der Entscheidung, ob es sinnvoll ist, einen Zusammenstoß als annähernd elastisch zu betrachten, kann man auf Anzeichen für Unelastizität achten, wie z. B.:

- Die Objekte „kleben“ nach dem Aufprall aneinander;
- Mindestens ein Objekt ist nach dem Aufprall deformiert;
- Die Objekte sind nach dem Aufprall wärmer;
- Nach dem Aufprall vibrieren oder rotieren die Objekte mehr;
- Ein Objekt befindet sich nach dem Aufprall in einem angeregten Zustand.

# Frontalzusammenstoß gleicher Massen

Wir beginnen mit der Betrachtung einfacher, frontaler 1-D-Kollisionen, um deutlich zu machen, wie die Prinzipien für Energie und Impuls angewendet werden können. Betrachten wir hierfür einen in  $x$ -Richtung ablaufenden Frontalzusammenstoß zwischen zwei Einkaufswagen, die auf einer Bahn mit geringer Reibung rollen oder gleiten. Ähnliche Situationen gelten z.B. auch für Billardkugeln, die frontal aufeinander stoßen. Wagen 1 mit der Masse  $m$  bewegt sich mit einem Impuls  $p_{1,x,i}$  nach rechts und stößt mit Wagen 2 zusammen, der die gleiche Masse hat und zunächst stillsteht ( $p_{2,x,i} = 0$ ).



# Elastische Kollision

Prinzip Impuls (kein Impulsaustausch mit Umgebung):

$$p_{x,f} = p_{x,i} + \cancel{F_{\text{net},x}} \Delta t$$

$$p_{1,x,f} + p_{2,x,f} = p_{1,x,i} \quad \text{Wagen bewegen sich getrennt}$$

Prinzip Energie (kein Energieaustausch mit Umgebung, innere Energie konstant):

$$E_f = E_i + \cancel{W} + \cancel{Q}$$

$$\sum_{k=1}^2 \left( E_{\text{kin},k,f} + E_{\text{int},k,f} \right) = \sum_{k=1}^2 \left( E_{\text{kin},k,i} + E_{\text{int},k,i} \right) + \cancel{W} + \cancel{Q}$$

$$E_{\text{kin},1,f} + E_{\text{kin},2,f} = E_{\text{kin},1,i}$$

**X** Term ist Null

Mit  $E_{\text{kin}} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  und dem Ergebnis der Impulsgleichung folgt

$$\frac{p_{1,x,f}^2}{2m} + \frac{p_{2,x,f}^2}{2m} = \frac{p_{1,x,i}^2}{2m} = \frac{\left(p_{1,x,f} + p_{2,x,f}\right)^2}{2m} \quad \text{mit } p_{1,x,i} = p_{1,x,f} + p_{2,x,f}$$

$$p_{1,x,f}^2 + p_{2,x,f}^2 = p_{1,x,f}^2 + 2p_{1,x,f}p_{2,x,f} + p_{2,x,f}^2$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss  $p_{1,x,f}p_{2,x,f} = 0$  sein. Falls  $p_{1,x,f} = 0$  kommt Wagen 1 zum Stillstand und überträgt seinen Impuls an Wagen 2. Falls  $p_{2,x,f} = 0$ , verfehlt Wagen 1 Wagen 2, und fährt an letzterem mit unveränderter Geschwindigkeit vorbei.

# Maximal unelastische Kollision

Prinzip Impuls (kein Impulsaustausch mit Umgebung):

$$p_{x,f} = p_{x,i} + \cancel{F_{\text{net},x}} \Delta t$$

$$p_{1,x,f} + p_{2,x,f} \equiv 2p_{1,x,f} = p_{1,x,i} \quad \text{Wagen bewegen sich gemeinsam}$$

Prinzip Energie (kein Energieaustausch mit Umgebung, innere Energie verändert):

$$E_f = E_i + \cancel{W} + \cancel{Q}$$

$$\sum_{k=1}^2 \left( E_{\text{kin},k,f} + E_{\text{int},k,f} \right) = \sum_{k=1}^2 \left( E_{\text{kin},k,i} + E_{\text{int},k,i} \right) + \cancel{W} + \cancel{Q}$$

$$E_{\text{kin},1,f} + E_{\text{kin},2,f} + E_{\text{int},1,f} + E_{\text{int},2,f} = E_{\text{kin},1,i} + E_{\text{int},1,i} + E_{\text{int},2,i}$$

**X** Term ist Null

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{kin},1,i} - \left( E_{\text{kin},1,f} + E_{\text{kin},2,f} \right)$$

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{p_{1,x,i}^2}{2m} - 2 \frac{\left( \frac{1}{2} p_{1,x,i} \right)^2}{2m} = \frac{1}{2} \frac{p_{1,x,i}^2}{2m}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{1}{2} E_{\text{kin},1,i}$$

Für  $\left| \vec{v}_f \right| \ll c$  bewegen sich Wagen 1 und Wagen 2 mit derselben (translatorischen) Geschwindigkeit, die nur noch der Hälfte ursprünglichen Geschwindigkeit von Wagen 1 entspricht. Bei der Kollision wird die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Energie in innere Energie umgewandelt.

In beiden Fällen (elastische und unelastische Kollision) mussten wir die Prinzipien Impuls und Energie gemeinsam anwenden, um alle unbekanntes Größen zu ermitteln. Wir haben die beiden Extreme der Energieerhaltung beim Frontalzusammenstoß eines fahrenden auf einen stehenden (Einkaufs-) Wagen (identische Massen) untersucht:

Bei einem elastischen Aufprall bleibt Wagen 1 stehen und Wagen 2 bewegt sich mit der Geschwindigkeit, die Wagen 1 vorher hatte.

Bei einem maximal unelastischen Stoß bleiben die Wagen aneinander haften und bewegen sich mit der Hälfte der ursprünglichen Geschwindigkeit. Die Hälfte der ursprünglichen kinetischen Energie wird in erhöhte innere Energie umgewandelt.

Zwischen diesen beiden Extremen kann es einen unelastischen, aber nicht maximal unelastischen Zusammenstoß geben, bei dem nur ein Teil der ursprünglichen kinetischen Energie (weniger als die Hälfte) in erhöhte innere Energie umgewandelt wird.

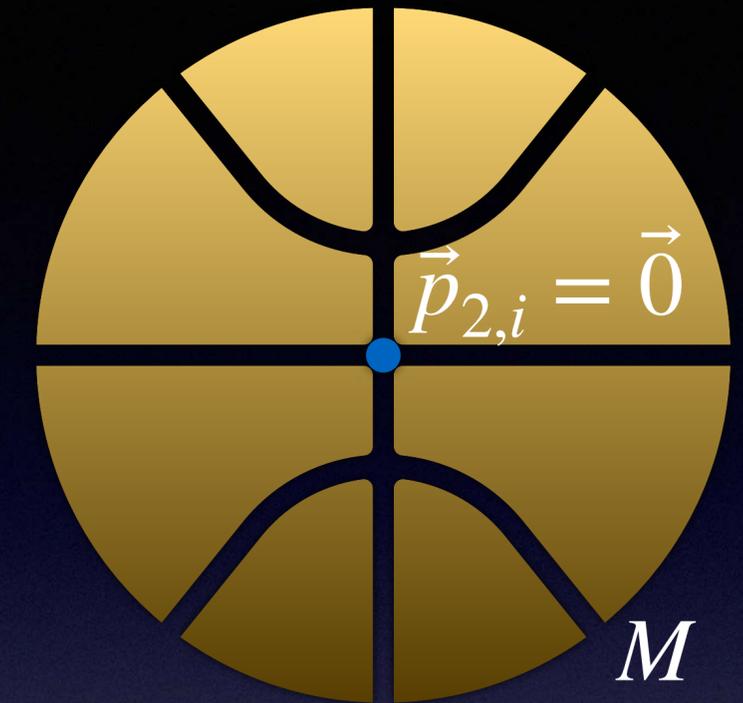
# Kontrollpunkt 1

K1.1: Eine sich mit Geschwindigkeit  $v_{1,x} = 10 \text{ m/s}$  bewegende Masse  $m_1 = 6 \text{ kg}$  stößt frontal mit einer stehenden Masse  $m_2 = 6 \text{ kg}$  zusammen, und die beiden Massen bleiben aneinander haften. (1) Wie groß war die gesamte kinetische Anfangsenergie? (2) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit? (3) Wie groß ist die gesamte kinetische Endenergie? (4) Wie groß war die Zunahme der inneren Energie der beiden Massen?

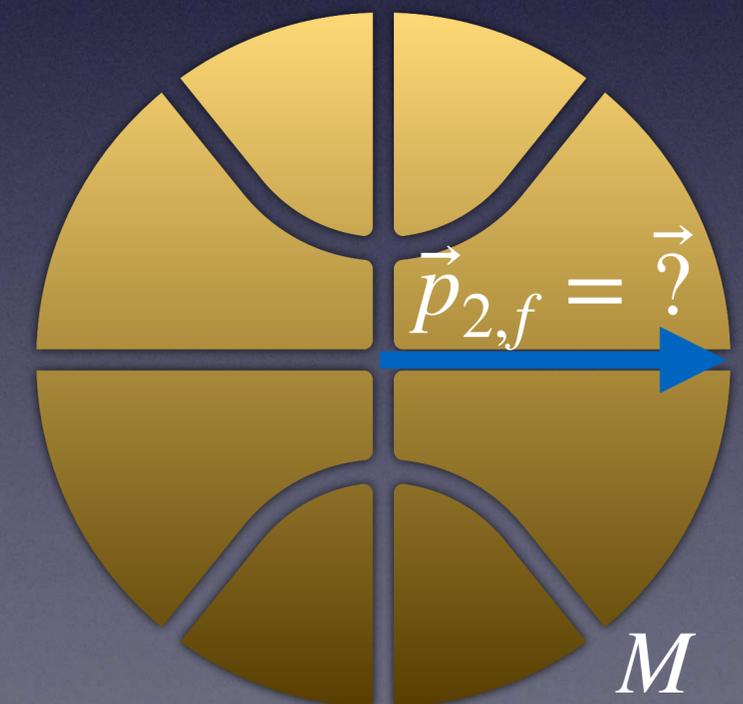
# Frontalzusammenstoß ungleicher Massen

Nehmen wir an, ein Pingpong-Ball trifft frontal und nahezu elastisch auf eine stationäre Bowlingkugel. Stelle dir vor, es gäbe dabei keine Reibung und keine nennenswerten äußeren Kräfte wirken während des Aufpralls auf das kombinierte System. Was erwartest du? Du wirst sehen, dass der Pingpong-Ball mit nahezu unveränderter Geschwindigkeit gerade zurückspringt. Wir werden zeigen, dass dies mit den Prinzipien der Erhaltung des Impulses und der Energie vereinbar ist. Weniger offensichtlich ist vielleicht, dass sich die Bowlingkugel nach der Kollision ebenfalls bewegt, wenn auch sehr langsam.

vor der Kollision



nach der Kollision



# Elastische Kollision

**X** *Term ist Null*

Prinzip Impuls (kein Impulsaustausch mit Umgebung,  $\vec{p}_{2,i} = \vec{0}$ ):

$$\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} + \vec{F}_{\text{net}} \Delta t$$

$$\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{p}_{1,i}$$

Angenommen, die Geschwindigkeit des Pingpong-Balls ändert sich beim Aufprall nicht wesentlich, so dass  $\vec{p}_{2,f} \simeq -\vec{p}_{1,i}$  gilt:

$$-\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,f} = \vec{p}_{1,i}$$

$$\vec{p}_{2,f} = 2\vec{p}_{1,i}$$

Der finale Impuls der Bowlingkugel ist doppelt so groß wie der anfängliche Impuls des Pingpong-Balls. Die Geschwindigkeit des Pingpong-Balls hat sich kaum verändert, aber sein Impuls hat sich sehr stark verändert. Da der Impuls ein Vektor ist, ist eine Richtungsänderung ebenso eine Änderung wie eine Änderung des Betrags.

Endgeschwindigkeit der Bowlingkugel ( $|\vec{v}| \ll c$ ):

$$\vec{v}_{2,f} \approx \frac{\vec{p}_{2,f}}{M} = \frac{2\vec{p}_{1,i}}{M} = 2 \left( \frac{m}{M} \right) \vec{v}_{1,i} .$$

Also eine sehr kleine Geschwindigkeit, da  $M \gg m$  angenommen wurde. Kinetische Energien:

$$E_{\text{kin},1,i} = \frac{|\vec{p}_{1,i}|^2}{2m} \text{ und } E_{\text{kin},2,f} = \frac{|2\vec{p}_{1,i}|^2}{2M} .$$

Obwohl die kinetische Energie der (langsamen) Bowlingkugel sehr klein ist, ist sie nicht gleich Null, was bedeutet, dass der Pingpong-Ball bei der Kollision ein wenig an Geschwindigkeit verliert. Deshalb ist unsere Annahme, dass sich die Geschwindigkeit des Pingpong-Balls kaum ändert, eine Annäherung, die nur für  $M \gg m$  gut erfüllt wird.

# Kontrollpunkt 2

K2.1: Wir können unsere Ergebnisse für elastische Frontalzusammenstöße verwenden, um den Rückstoß der Erde zu ermitteln, wenn ein Ball von einer in der Erde verankerten Wand abprallt. Angenommen, ein professioneller Baseballspieler schleudert einen Baseball ( $m = 155 \text{ g}$ ) mit einer Geschwindigkeit von  $\left| \vec{v}_{1,i} \right| = 44 \text{ m/s}$  gegen eine Wand, die fest in der Erde verankert ist, und der Ball prallt mit geringem Verlust an kinetischer Energie zurück. (1) Wie hoch ist die ungefähre Rückstoßgeschwindigkeit  $\left| \vec{v}_{2,f} \right|$  der Erde ( $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ )? (2) Berechne die ungefähre kinetische Energie, die beim Aufprall an die Erde abgegeben wird. (3) Beschreibe das Ergebnis für Impuls und Energie qualitativ.

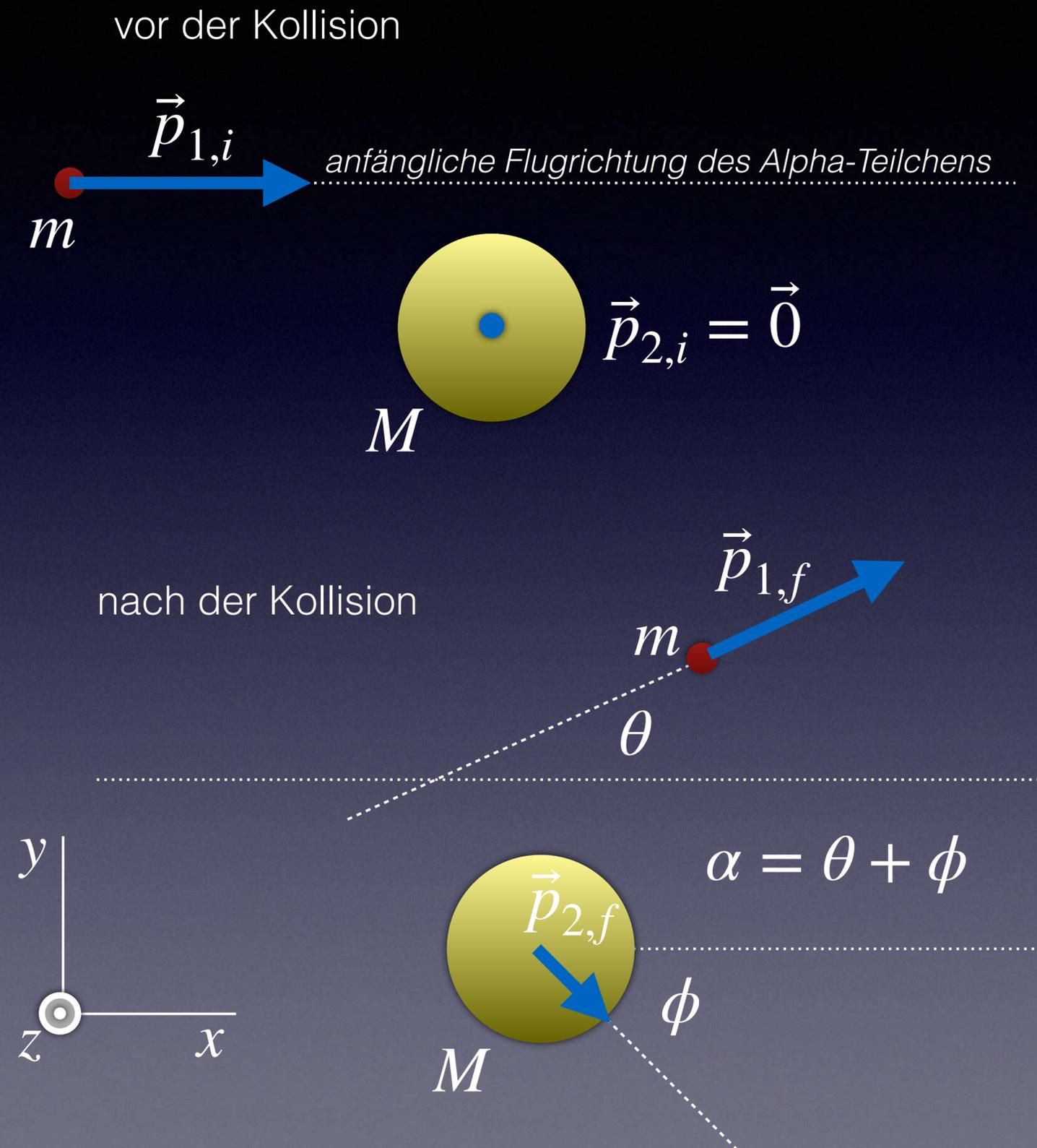
# Kontrollpunkt 3

K3.1: Wir betrachten erneut die Kollision zwischen einem Pingpong-Ball und einer Bowling-Kugel. In diesem Fall ist allerdings der Pingpong-Ball anfänglich in Ruhe ( $\vec{v}_{1,i} = \vec{0}$ ) und die Bowling-Kugel bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}_{2,i}$  auf den Pingpong-Ball zu. Bowling-Kugel und Pingpong-Ball kollidieren zentral, elastisch. (1) Wie groß ist (näherungsweise) die Geschwindigkeit des Pingpong-Balls nach der Kollision, falls  $M \gg m$  weiterhin gilt. (2) Beschreibe deinen Lösungsweg in wenigen Worten.

# Streuung: Kollisionen in 2D und 3D

Streuexperimente werden eingesetzt, um die Struktur und das Verhalten von Atomen, Atomkernen und anderen kleinen Teilchen zu untersuchen. Bei einem Streuexperiment stößt ein Teilchenstrahl mit anderen Teilchen zusammen. Bei atomaren oder nuklearen Kollisionen können wir die gekrümmten Flugbahnen innerhalb des winzigen Wechselwirkungsbereichs nicht im Detail beobachten. Wir beobachten nur die Flugbahnen vor und nach dem Zusammenstoß, wenn die Teilchen weit voneinander entfernt sind und ihre gegenseitige Wechselwirkung sehr schwach ist, so dass sie sich in fast geraden Bahnen bewegen. Ein Beispiel für eine Streuung ist der Zusammenstoß eines Alpha-Teilchens (Heliumkern) mit dem Kern eines Goldatoms.

Ein Alpha-Teilchen (Heliumkern) trifft auf einen Goldkern und wird um einen bestimmten (End-) Winkel  $\theta$  abgelenkt. Gleichzeitig erfährt der Goldkern einen Stoß und wird um einen anderen (End-) Winkel  $\phi$  abgelenkt. Die (End-) Winkel werden dabei relativ zur Anfangsrichtung des Alpha-Teilchens gemessen. Wir sagen, dass das Alpha-Teilchen um einen Winkel  $\theta$  „gestreut“ wurde. Siehe dazu nebenstehende, nicht maßstäbliche Abbildung. Wir nehmen den „Initial“-Zeitpunkt so früh und den „Final“-Zeitpunkt so spät, dass die beiden Teilchen so weit voneinander entfernt sind, dass wir ihre elektrische potenzielle Energie vernachlässigen können. Was die Impulserhaltung betrifft, so müssen wir zwei Gleichungen für die beiden Komponenten (hier  $x$  und  $y$ ) der Impulserhaltung aufstellen.



Alle Geschwindigkeiten sollen viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein:

$$\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} + \vec{F}_{\text{net}} \Delta t$$

$$E_{\text{kin},1,f} + E_{\text{kin},2,f} = E_{\text{kin},1,i} + E_{\text{kin},2,i} + W + Q$$

Mit  $\vec{p}_{2,i} = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$ ,  $E_{\text{kin},2,i} = 0$ , sowie  $W = 0$  und  $Q = 0$ , erhalten wir für die  $x$ - und  $y$ -Komponenten die auf der nachfolgenden Folie zusammengefassten Beziehungen, falls eine elastische Kollision angenommen wird.

$$\left| \vec{p}_{1,i} \right| = \left| \vec{p}_{1,f} \right| \cos \theta + \left| \vec{p}_{2,f} \right| \cos \phi \quad \text{x-Komponente}$$

$$0 = \left| \vec{p}_{1,f} \right| \cos (90^\circ - \theta) + \left| \vec{p}_{2,f} \right| \cos (90^\circ + \phi) \quad \text{y-Komponente}$$

$$\frac{\left| \vec{p}_{1,i} \right|^2}{2m} = \frac{\left| \vec{p}_{1,f} \right|^2}{2m} + \frac{\left| \vec{p}_{2,f} \right|^2}{2M} \quad \text{Energieerhaltung}$$

Vier Unbekannte:  $\left| \vec{p}_{1,f} \right|$ ,  $\left| \vec{p}_{2,f} \right|$ ,  $\theta$  und  $\phi$  (die Massen seien bekannt).

Keine allgemeine Lösung möglich, da nur drei Gleichungen gegeben sind.

Dennoch gibt es viele Situationen, in denen diese drei Gleichungen erfolgreich verwendet werden können. Wenn wir zum Beispiel die endgültige Bewegungsrichtung des Alpha-Teilchens, den Winkel  $\theta$ , messen, können wir die anderen drei unbekanntes Größen ermitteln und so die endgültigen Impulse der beiden Teilchen und die Bewegungsrichtung des Goldkerns vorhersagen, auch ohne alle diese Größen messen zu müssen.

Ein interessanter Spezialfall eines elastischen Stoßes, der auf diese Weise analysiert werden kann, ist ein Stoß zwischen Teilchen gleicher Masse. In diesem Fall beträgt der Winkel  $\alpha = \theta + \phi$  genau  $90^\circ$ , falls die Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

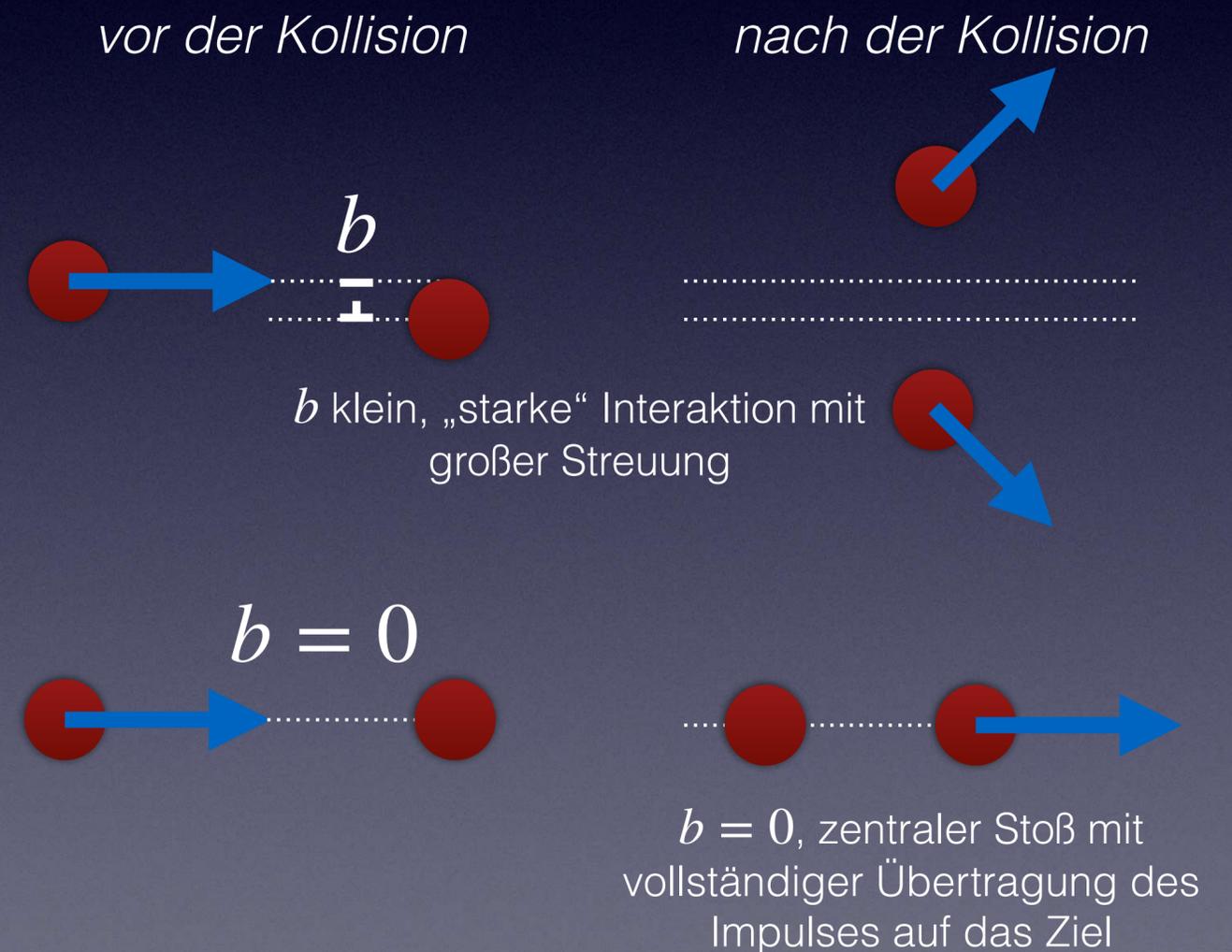
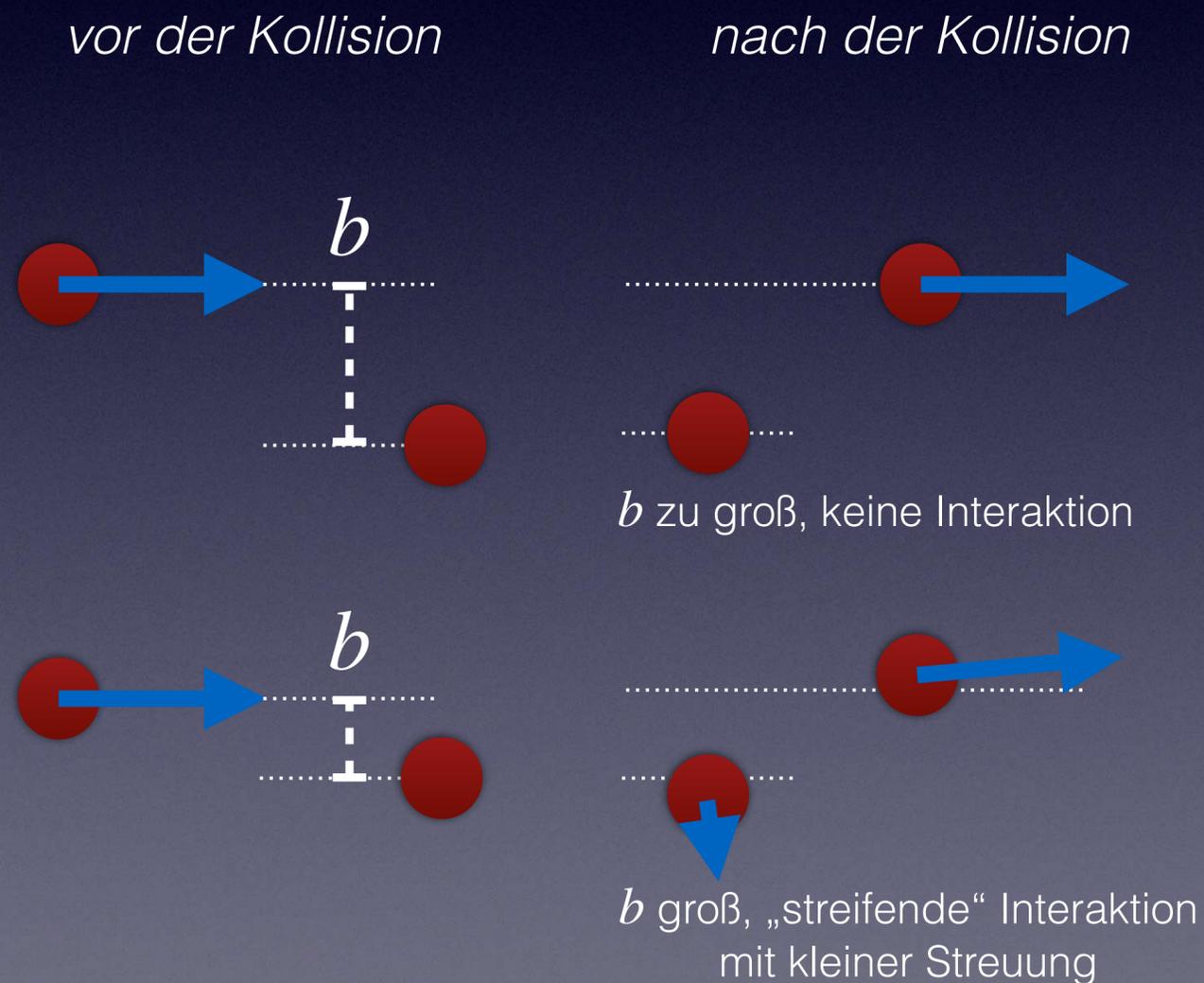
$$\vec{p}_{1,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

$$\left| \vec{p}_{1,i} \right|^2 = \left| \vec{p}_{1,f} \right|^2 + \left| \vec{p}_{2,f} \right|^2 + \left| \vec{p}_{1,f} \right| \left| \vec{p}_{2,f} \right| \cos \angle \left( \vec{p}_{1,f}, \vec{p}_{2,f} \right)$$

$$\frac{\left| \vec{p}_{1,i} \right|^2}{2m} = \frac{\left| \vec{p}_{1,f} \right|^2}{2m} + \frac{\left| \vec{p}_{2,f} \right|^2}{2m} + \frac{\left| \vec{p}_{1,f} \right| \left| \vec{p}_{2,f} \right| \cos \angle \left( \vec{p}_{1,f}, \vec{p}_{2,f} \right)}{2m}$$

Diese Gleichung für die (kinetische) Energie ist nur dann erfüllt, falls der (kleinere) Winkel  $\alpha$  zwischen  $\vec{p}_{1,f}$  und  $\vec{p}_{2,f}$   $90^\circ$  beträgt.

Der Abstand zwischen den Zentren senkrecht zur Geschwindigkeit des eintreffenden Teilchens wird „Stoßparameter“ genannt und oft mit  $b$  bezeichnet. Bei einem Frontalaufprall ist  $b = 0$ . Hier einige Beispiele für (makroskopische) Teilchen mit identischer Masse.



# Entdeckung des Atomkerns

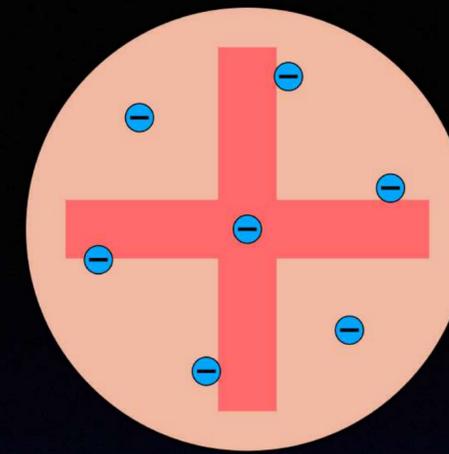
Ein berühmtes Experiment führte zur Entdeckung des Atomkerns. Es wurde 1911 von einer Gruppe in England unter der Leitung des Neuseeländers Ernest Rutherford durchgeführt. Bei diesem Experiment wurde eine dünne Goldfolie (deren Kerne aus 79 Protonen und 118 Neutronen bestehen) mit schnellen Alpha-Teilchen beschossen (die heute als Heliumkerne bekannt sind).

Als Rutherford und seine Mitarbeiter beschlossen, ein Streuexperiment durchzuführen, um die innere Struktur der Materie zu erforschen, waren sie mit den Beziehungen zwischen den Impulsen bei Kollisionen vertraut, die wir gerade untersucht haben, und sie kamen zu dem Schluss, dass sie durch das Beschießen einer dünnen Metallschicht mit mikroskopisch kleinen Teilchen etwas über die mikroskopische Struktur des Metalls erfahren könnten, indem sie die Muster der resultierenden Streuung betrachten.

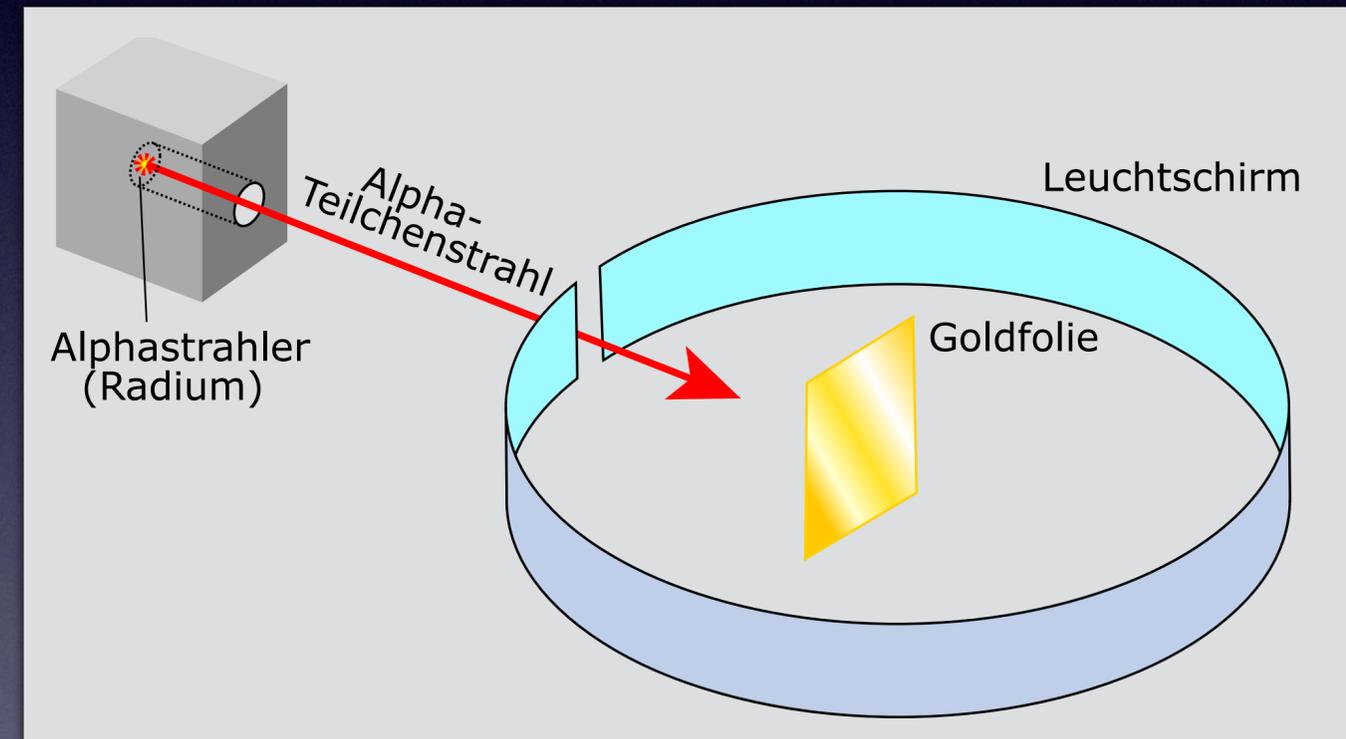
Im Rutherford-Experiment war die Geschwindigkeit der Alpha-Teilchen nicht hoch genug, um einen tatsächlichen Kontakt mit dem Kern zu ermöglichen. Dennoch ist es angemessen, den Vorgang als Kollision zu bezeichnen, da zwischen dem Alpha-Teilchen und dem Goldkern für eine sehr kurze Zeit beträchtliche elektrische Kräfte wirken. Wir bezeichnen jeden Vorgang dieser Art als Kollision, auch wenn es keinen direkten Kontakt gibt, sondern nur gravitative, elektrische oder magnetische Wechselwirkungen in „einiger“ Entfernung. Man spricht dann davon, dass das Alpha-Teilchen durch die Wechselwirkung mit dem ursprünglich stationären Goldkern „gestreut“ (abgelenkt) wird, und solche Experimente nennt man „Streuexperimente“ (siehe Animation).

Animationen zu [Rutherford-Experiment](#)  
by [University of Colorado, Boulder](#)

Die Vorstellungen in der damaligen Zeit basierten auf dem Atommodell von Thomson (Rosinenkuchenmodell). In diesem Modell ist die Masse und die positive Ladung gleichmäßig über das gesamte Ausmaß des Atoms verteilt, während die Elektronen wie Rosinen im Kuchen an bestimmten Stellen liegen. Durch diese großflächige Verteilung der Masse und der positiven Ladung ging man davon aus, dass ein solches Atom ein Alpha-Teilchen kaum beeinflussen kann und Alpha-Teilchen ein Atom praktisch unabgelenkt passieren. Entsprechend erwarteten die beiden Physiker, dass die Teilchen von der dünnen Metallschicht kaum beeinflusst werden und die Metallschicht einfach passieren ohne abgelenkt zu werden.



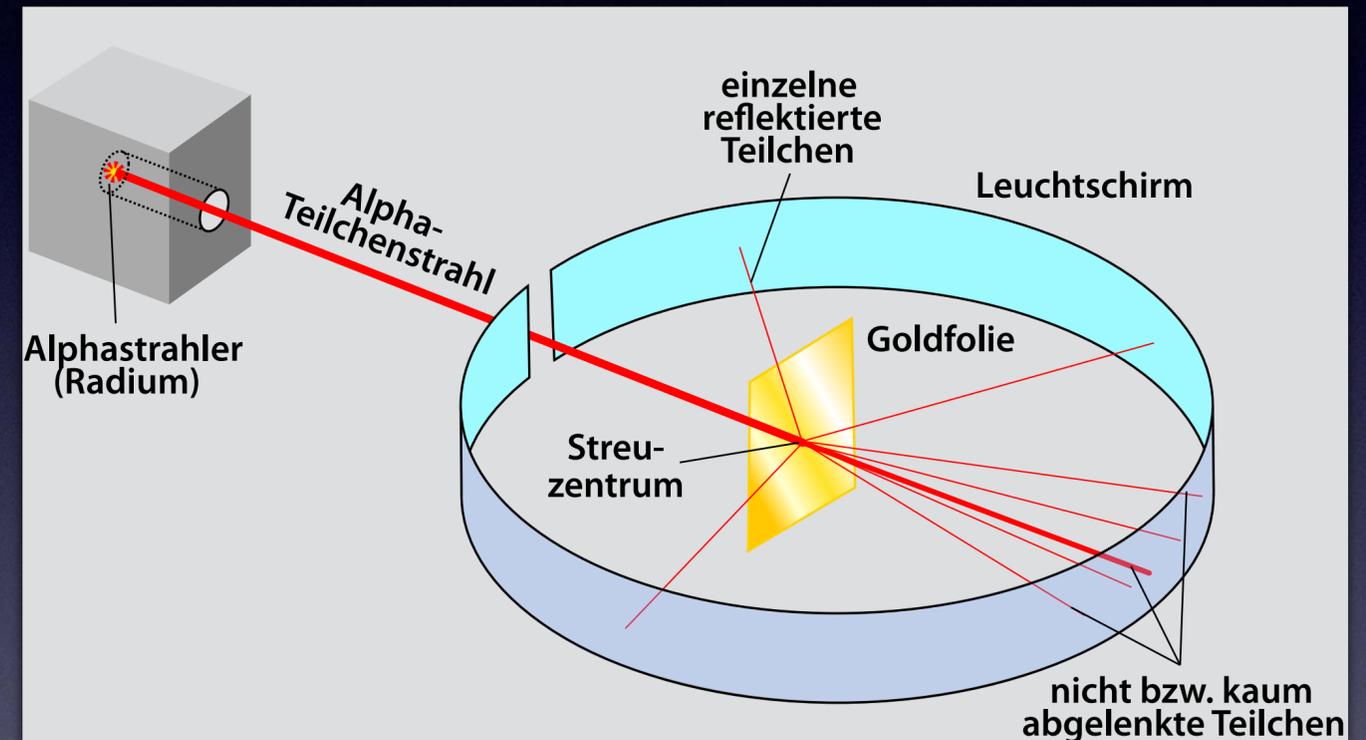
Das Thomsonsche Atommodell aus dem Jahre 1903.  
Elektronen: blau. Positiver Hintergrund: rot.



Aufbau des Rutherford'schen Streuversuchs.  
Quelle: <https://www.leifiphysik.de/atomphysik/atomaufbau/grundwissen/streuversuch-und-atommodell-von-rutherford>

Zwar zeigten sich im Experiment die meisten Lichtblitze auf dem Schirm in gerader Richtung hinter der Goldfolie, aber entgegen den Erwartungen wurden auch zahlreiche Lichtblitze etwas links und rechts davon beobachtet. Die Alpha-Teilchen wurden also von der Goldfolie abgelenkt.

Besonders überraschend war jedoch, dass gelegentlich auch auf dem Teil des Schirms Lichtblitze zu sehen waren, der auf der Seite des Strahlers platziert war. Einige wenige der Alpha-Teilchen wurden also um über  $90^\circ$  abgelenkt und somit zurückgestreut.



Beobachtung im Rutherford'schen Streuversuch.  
Quelle: <https://www.leifiphysik.de/atomphysik/atomaufbau/grundwissen/streuversuch-und-atommodell-von-rutherford>

*“It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life,” Rutherford said. “It was almost as incredible as if you fired a [artillery] shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.” He continued, “On consideration, I realized that this scattering backward must be the result of a single collision, and when I made the calculations I saw that it was impossible to get anything of that order of magnitude unless you took a system in which the greater part of the mass of the atom was concentrated in a minute nucleus. It was then that I had the idea of an atom with a minute massive center, carrying a charge.”*

## **Ernest Rutherford**

## Zusammenfassung der Beobachtungen:

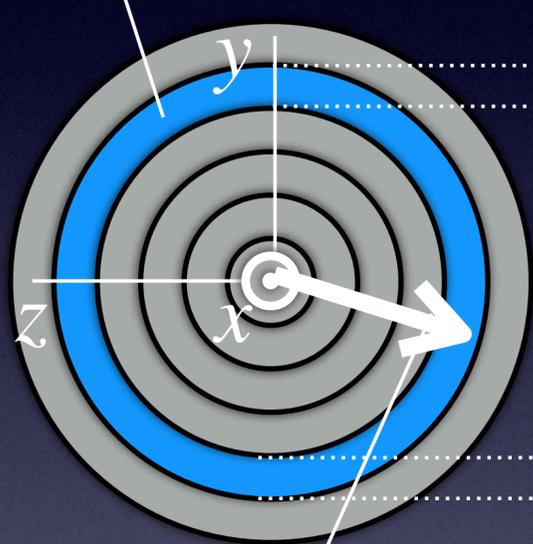
- Fast alle Alpha-Teilchen können die Goldfolie ungehindert passieren.
- 1 von 100000 Alpha-Teilchen wird um  $90^\circ$  oder mehr abgelenkt.
- Je größer der Streuwinkel, desto seltener tritt diese Ablenkung auf.
- Einige Alpha-Teilchen werden zurückgestreut.

Die extrem seltene Ablenkung der Alpha-Teilchen und deren Winkelverteilung lassen sich dadurch verstehen, dass sich in den Atomen nur ein sehr kleines Massezentrum befindet, das positiv geladen ist. Man nennt dieses Massezentrum den Atomkern. Da die meisten Teilchen die Goldfolie ungehindert passieren, muss zwischen den Kernen ein sehr großer „Freiraum“ bestehen.

# Verteilung der Streuwinkel

Ein „differentieller“ Streuquerschnitt für einen bestimmten Winkelbereich ist die Fläche eines Rings, der durch die dem jeweiligen Winkelbereich entsprechenden Stoßparameter begrenzt wird.

differentieller Streuquerschnitt  $d\sigma$



Stoßparameter  $b$

Projektil, z.B. Alpha-Teilchen

Zwei Projektil-Bahnen für unterschiedliche Stoßparameter, an innerer und äußerer Grenze des Streuquerschnitts.

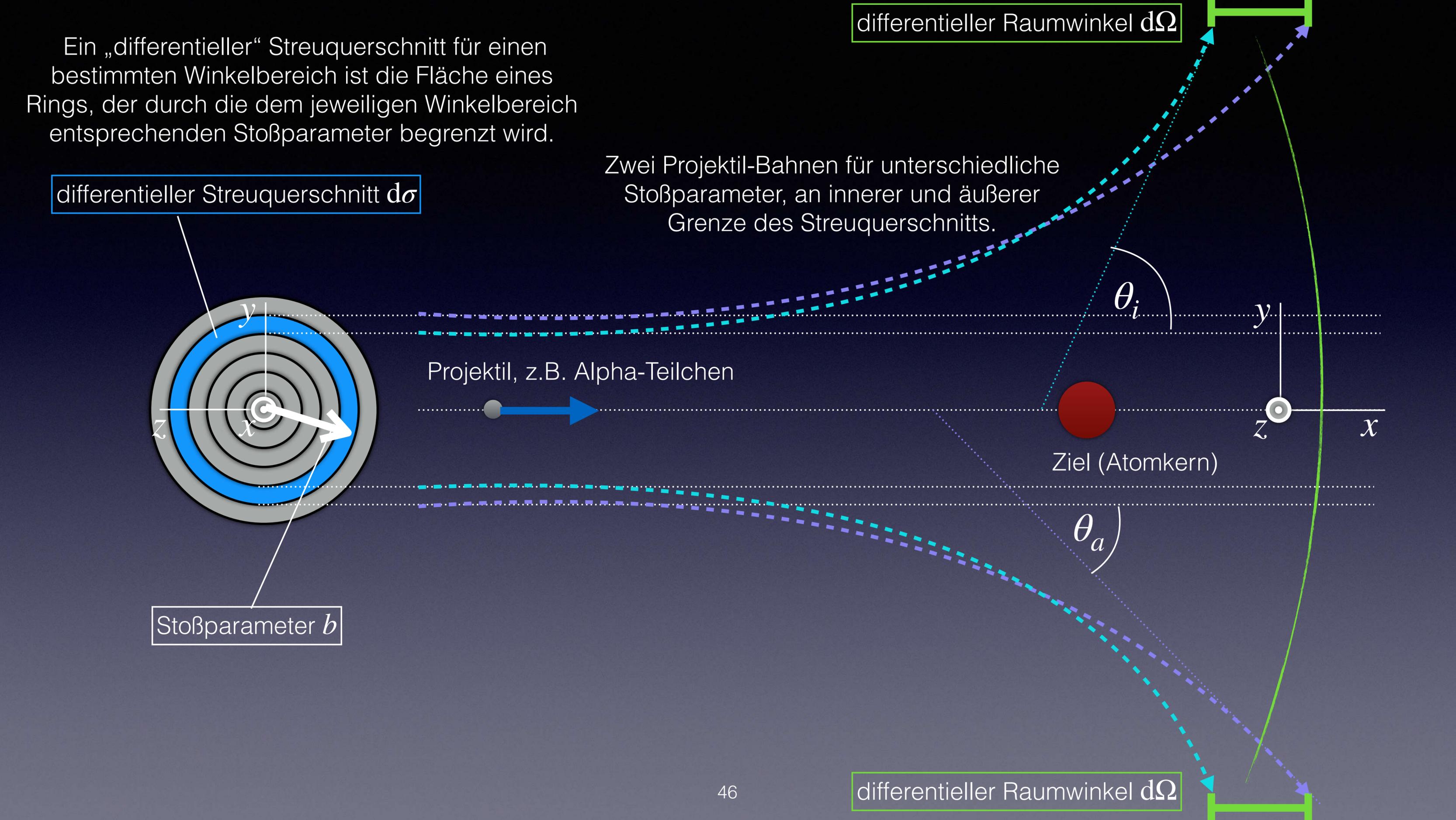
differentieller Raumwinkel  $d\Omega$

Ziel (Atomkern)

$\theta_i$

$\theta_a$

differentieller Raumwinkel  $d\Omega$



Raumwinkel  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{A}{r^2}, \text{ mit}$$

- Fläche  $A$  einer Teilfläche einer Kugeloberfläche, und
- Radius  $r$  der Kugel.

Der volle Raumwinkel (gesamte Kugeloberfläche) ist damit  $4\pi$ .

Die Rutherford'sche Streuformel gibt den so genannten differentiellen Streuquerschnitt  $d\sigma$  (auch Wirkungsquerschnitt genannt) in Abhängigkeit vom Streuwinkel  $\theta$  im Schwerpunktsystem an:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_{\text{kin},1}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)}.$$

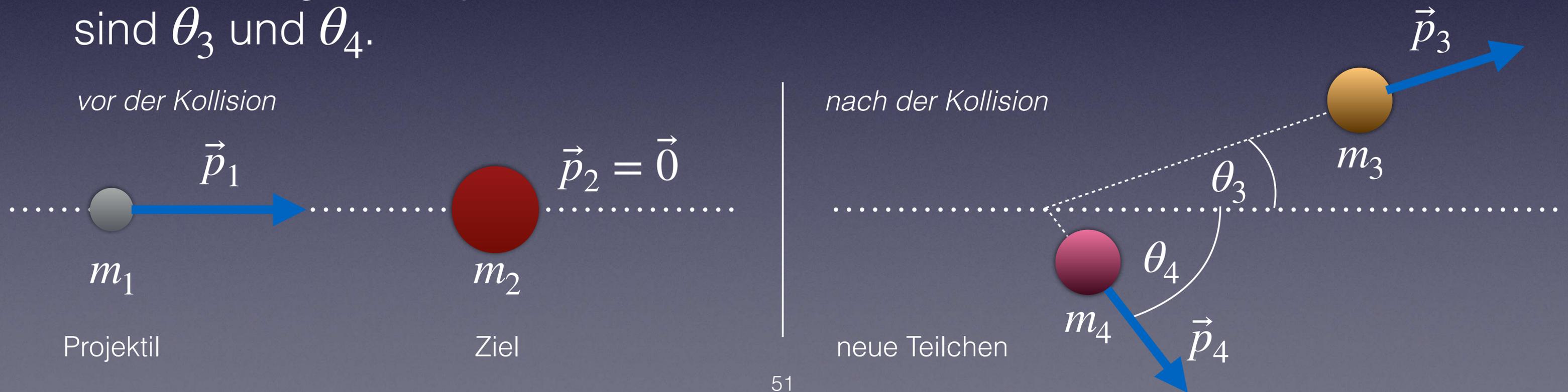
Ladungen  $Z_1, Z_2$  des Projektils und des Kerns

Damit ist die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass gestreute Teilchen nach einer Ablenkung um den Winkel  $\theta \neq 0$  im Raumwinkel  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  auftreffen. Da der Raum zwischen Atomen relativ leer ist, ist die Wahrscheinlichkeit bei kleinen Streuwinkeln am größten.

# Relativistischer Impuls und Energie

Rutherfords ursprüngliche Experimente wurden mit Alpha-Teilchen durchgeführt, deren kinetische Energie etwa **10 MeV** betrug und deren Geschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit gering war. Um den Kern genauer zu erforschen, bauten die Physiker später spezielle Maschinen, so genannte „Teilchenbeschleuniger“ (z.B. DESY, CERN, ...), die mit Hilfe elektrischer Kräfte geladene Teilchen auf sehr viel höhere Energien beschleunigen, mit Geschwindigkeiten, die bis zu 99,9999 % der Lichtgeschwindigkeit betragen können. Für solch hohe Geschwindigkeiten können wir die Näherungswerte für Impuls und Energie bei niedrigen Geschwindigkeiten nicht mehr verwenden.

Physiker, die mit Hochenergiebeschleunigern erzeugte Kollisionen analysieren, führen routinemäßig Berechnungen auf der Grundlage der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung durch. Betrachten wir eine Kollision, bei der ein Teilchen mit Masse  $m_1$  und Impuls  $\vec{p}_1$  auf ein ruhendes Teilchen mit Masse  $m_2$  trifft. Es findet ein Identitätswechsel statt, bei dem zwei neue Teilchen mit den Massen  $m_3$  und  $m_4$ , mit den Impulsen  $\vec{p}_3$  und  $\vec{p}_4$  entstehen. Die Streuwinkel für die neuen Teilchen sind  $\theta_3$  und  $\theta_4$ .



$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{0}$$

$$|\vec{p}_3| \cos \theta_3 + |\vec{p}_4| \cos \theta_4 = |\vec{p}_1|$$

$$|\vec{p}_3| \cos (90^\circ - \theta_3) - |\vec{p}_4| \cos (90^\circ - \theta_4) = 0$$

$$E_3 + E_4 = E_1 + E_2$$

$$\sqrt{\left(|\vec{p}_3| c\right)^2 + \left(m_3 c^2\right)^2} + \sqrt{\left(|\vec{p}_4| c\right)^2 + \left(m_4 c^2\right)^2} = \sqrt{\left(|\vec{p}_1| c\right)^2 + \left(m_1 c^2\right)^2} + m_2 c^2$$

In den vorangehenden Gleichungen gibt es sechs unbekannte Größen ( $|\vec{p}_3|$ ,  $|\vec{p}_4|$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $m_3$  und  $m_4$ ), aber nur drei Gleichungen. Eine typische Situation in einem Hochenergie-Teilchenexperiment ist, dass einige dieser unbekanntes Größen gemessen werden und die Prinzipien Impuls und Energie zur Berechnung der verbleibenden drei Größen verwendet werden.

Wie beim Rutherford'schen Streuexperiment sagen die Messungen der ausgehenden Teilchenimpulse allein nichts über die genaue Art der Wechselwirkung bei der Kollision aus, da wir sowohl die Impuls- als auch die Energieerhaltung berücksichtigen müssen. Die Identitätsänderungen der Teilchen verraten uns viel, aber auch die Verteilung der Streuwinkel hat uns einiges mitzuteilen.

Die Energie-Impuls-Beziehung gilt auch für Teilchen mit der Masse Null, so dass ein Photon mit Energie  $E_{\text{photon}}$  über einen Impuls

$\left| \vec{p}_{\text{photon}} \right| = \frac{E_{\text{photon}}}{c}$  verfügt, der experimentell überprüft werden

kann. Man kann für ein Photon nicht  $E_{\text{photon}} = \gamma mc^2$  oder

$\vec{p}_{\text{photon}} = \gamma m \vec{v}_{\text{photon}}$  schreiben, da wegen  $\left| \vec{v}_{\text{photon}} \right| = c, \gamma = \infty$

wird. Das Ergebnis für  $\gamma m = \infty \times 0$  ist jedoch nicht definiert.

Trotzdem sind, wie wir sehen, sowohl Energie als auch Impuls eines Photons wohldefiniert.

Eine Abwandlung der relativistischen Kollisionsanalyse kann zur Identifizierung eines der ausgehenden Teilchen verwendet werden. Angenommen, wir messen  $|\vec{p}_3|$  und  $\theta_3$ , und wir kennen  $m_3$ , aber nicht  $m_4$ . Dann können wir unsere drei Gleichungen mit den drei Unbekannten  $|\vec{p}_4|$ ,  $\theta_4$  und  $m_4$  verwenden, um die unbekannte Masse  $m_4$  zu bestimmen. Dies ist eine sehr leistungsfähige Technik, wenn wir das vierte Teilchen nicht direkt beobachten können. Neutrinos zum Beispiel haben keine elektromagnetische oder starke Wechselwirkung und werden daher in der Regel von gewöhnlichen Detektoren nicht registriert. Wenn wir jedoch das andere ausgehende Teilchen messen, können wir die Eigenschaften des „unsichtbaren“ Teilchens bestimmen:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu} .$$

# Unelastische Kollisionen und quantisierte Energie

Beim Rutherford'schen Streuexperiment handelte es sich um elastische Kollisionen, da sich die inneren Energien des Goldkerns und des Alpha-Teilchens während der Wechselwirkung nicht änderten. Wenn sich die innere Energie ändert, zusätzliche Teilchen entstehen oder Licht emittiert wird, nennt man eine Kollision „unelastisch“.

Beschießt man einen Goldkern mit Alpha-Teilchen, deren Energie höher ist als die Energie der Alpha-Teilchen im Rutherford-Experiment, so kann man den Goldkern auf ein höheres (Quanten-) Energieniveau anregen, das  $\Delta E$  über dem Grundzustand des Goldkerns liegt. Ein solcher Zustand entspricht einer anderen Konfiguration der Nukleonen im Inneren des Goldkerns. Nehmen wir an, du kannst den Eingangsimpuls  $|\vec{p}_1|$  des Alpha-Teilchens und seinen Ausgangsimpuls  $|\vec{p}_3|$  und Streuwinkel  $\theta_3$  messen.

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{0}$$

$$|\vec{p}_3| \cos \theta_3 + |\vec{p}_4| \cos \theta_4 = |\vec{p}_1|$$

$$|\vec{p}_3| \cos (90^\circ - \theta_3) - |\vec{p}_4| \cos (90^\circ - \theta_4) = 0$$

$$E_3 + E_4 = E_1 + E_2$$

$$\sqrt{\left(|\vec{p}_3| c\right)^2 + \left(m_3 c^2\right)^2} + \sqrt{\left(|\vec{p}_4| c\right)^2 + \left(m_4 c^2 + \Delta E\right)^2} = \sqrt{\left(|\vec{p}_1| c\right)^2 + \left(m_1 c^2\right)^2} + m_2 c^2$$

Es gibt drei Unbekannte ( $|\vec{p}_4|$ ,  $\theta_4$  und  $\Delta E$ ) und drei Gleichungen. Von daher können wir auch  $\Delta E$  bestimmen.

Anstatt das Ziel-Teilchen lediglich zu einem Zustand höherer innerer Energie anzuregen, kann man auch annehmen, dass es zu einem Identitätswechsel kommt, bei dem sich das Ziel-Teilchen in ein anderes Teilchen verwandelt. Ein Beispiel ist die folgende Teilchenreaktion, die in den 1950er Jahren zur Entdeckung des  $\Delta^+$ -Teilchens mit Masse  $m_\Delta$  verwendet wurde, das eine etwas größere Masse als ein Proton besitzt:



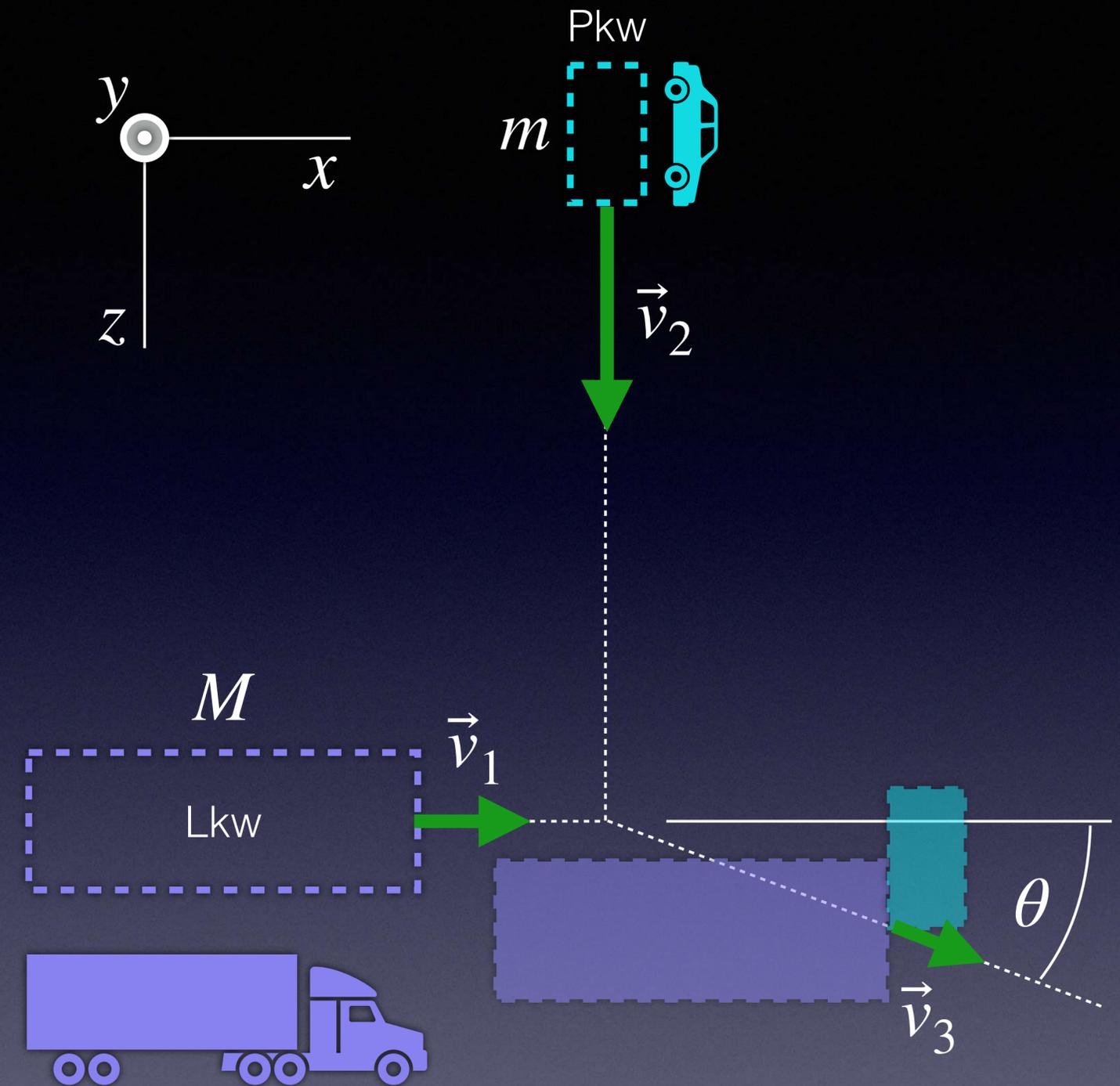
Ein Strahl negativer Pionen  $\pi^-$  bekannter Masse  $m_\pi$  und bekannter kinetischer Energie, der von einem Teilchenbeschleuniger erzeugt wird, wird auf einen Behälter mit Wasserstoffgas gerichtet, und die Ziele der Kollisionen sind die Protonen mit Masse  $m_p$ , die die Kerne der Wasserstoffatome bilden. Manchmal wechselwirkt ein eintreffendes Pion über die starke Wechselwirkung mit einem Proton und erzeugt ein  $\Delta^+$  Teilchen. Der Impuls des gestreuten Pions kann gemessen werden. In diesem Fall kann, ganz analog wie zuvor, die Masse des  $\Delta^+$  Teilchens bestimmt werden.

Die Analyse zur Bestimmung der Massenänderung ist im Wesentlichen die gleiche wie die Analyse zur Bestimmung der Änderung der inneren Energie eines angeregten Goldkerns. Tatsächlich kann man sagen, dass das  $\Delta^+$  Teilchen ein angeregter Zustand aus drei Quarks ist, wobei das Proton den Grundzustand aus drei Quarks darstellt. Der angeregte Zustand (das  $\Delta^+$  Teilchen) kann unter Aussendung eines neutralen Pions  $\pi^0$ , das ein Quark-Antiquark-Paar ist, in den Grundzustand (das Proton) übergehen. Die zusätzliche kinetische Energie ist gleich  $(m_{\Delta} - m_p) c^2$ .

Streu-Experimente sind ein wichtiges Instrument zur Entdeckung neuer Teilchen (oder neuer angeregter Zustände von aus Quarks aufgebauten Systemen).

# Kollisionen in anderen Bezugssystemen

Im Fall einer Bowlingkugel, die frontal mit einem Pingpong-Ball kollidiert, haben wir gesehen, dass es sinnvoll sein kann, die Analyse in einem beweglichen Bezugssystem durchzuführen (Kontrollpunkt 3). In diesem Abschnitt werden wir dies weiter untersuchen, indem wir eine zweidimensionale unelastische („klebende“) Kollision in zwei verschiedenen Bezugssystemen analysieren. Wir betrachten einen Zusammenstoß, bei dem ein Lkw und ein Pkw auf einer vereisten Kreuzung zusammenstoßen und ineinander verkeilt bleiben. In der nebenstehenden Abbildung sind die Geschwindigkeitsvektoren und nicht die Impulsvektoren dargestellt; ein typischer Lkw hätte aufgrund seiner viel größeren Masse einen viel größeren Impuls als der Pkw.



Wie wirkt sich die Tatsache, dass die Kreuzung vereist ist, auf unsere Möglichkeit aus, das Prinzip Impuls auf die Kollision zwischen Lkw und Pkw anzuwenden?

Die Reibung mit der Straße ist gering, wenn die Kreuzung vereist ist, so dass wir sie, zusammen mit dem Luftwiderstand, während der kurzen Zeit des tatsächlichen Zusammenstoßes ignorieren können. Daher sollte der Gesamtimpuls des Systems Lkw+Pkw (ungefähr) konstant bleiben. Die Impulsgleichung besteht aus drei Komponenten, jeweils eine für die  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Richtungen. In der  $y$ -Richtung (senkrecht nach oben) trägt das Eis einfach die Gewichte der Fahrzeuge, so dass die Nettokraft in dieser Richtung gleich Null ist, und während des gesamten Zusammenstoßes auch Null bleibt.

Mit  $\vec{v}_3 = |\vec{v}_3| \langle \cos \theta, 0, \cos(90^\circ - \theta) \rangle$  erhalten wir:

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

$$(M + m) |\vec{v}_3| \langle \cos \theta, 0, \sin \theta \rangle = M |\vec{v}_1| \langle 1, 0, 0 \rangle + m |\vec{v}_2| \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

In Komponentenschreibweise:

$$(M + m) |\vec{v}_3| \cos \theta = M |\vec{v}_1|, \text{ und}$$

$$(M + m) |\vec{v}_3| \sin \theta = m |\vec{v}_2|.$$

Wir ermitteln zunächst den Winkel  $\theta$ , indem wir die Gleichungen für die Komponenten dividieren:

$$\frac{(M + m) |\vec{v}_3| \sin \theta}{(M + m) |\vec{v}_3| \cos \theta} = \tan \theta = \frac{m |\vec{v}_2|}{M |\vec{v}_1|},$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{m |\vec{v}_2|}{M |\vec{v}_1|} \right)$$

Nun ermitteln wir  $|\vec{v}_3|$ , indem wir die Komponentengleichungen quadrieren und anschließend addieren:

$$\left( (M + m) |\vec{v}_3| \right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \left( M |\vec{v}_1| \right)^2 + \left( m |\vec{v}_2| \right)^2,$$

$$\left( (M + m) |\vec{v}_3| \right)^2 = \left( M |\vec{v}_1| \right)^2 + \left( m |\vec{v}_2| \right)^2,$$

$$|\vec{v}_3| = \frac{\sqrt{M^2 |\vec{v}_1|^2 + m^2 |\vec{v}_2|^2}}{M + m}.$$

Die Besonderheit des vorangehend geschilderten Zusammenstoßes besteht darin, dass die Impulserhaltung allein genügend Gleichungen (zwei) liefert, um die unbekannte Endgeschwindigkeit  $|\vec{v}_3|$  und die unbekannte Richtung  $\theta$  zu bestimmen. Wenn der Pkw und der Lkw zwar zusammenstoßen, aber gleich wieder voneinander abprallen, anstatt ineinander verkeilt zu bleiben, gibt es vier Unbekannte statt zwei, weil es zwei Endgeschwindigkeiten gibt, von denen jede einen Betrag und eine eigene Richtung hat, die berechnet werden müssen. In diesem Fall liefert das Prinzip Impuls allein nicht genügend Gleichungen, um die Situation vollständig analysieren zu können.

Unter Verwendung unseres Ergebnisses für die Endgeschwindigkeit können wir die kinetische Energie nach der unelastischen Kollision berechnen (Fahrzeuge bleiben verkeilt):

$$\frac{1}{2} (M + m) \left| \vec{v}_3 \right|^2 = \frac{1}{2} (M + m) \frac{M^2 \left| \vec{v}_1 \right|^2 + m^2 \left| \vec{v}_2 \right|^2}{(M + m)^2},$$

$$\frac{1}{2} (M + m) \left| \vec{v}_3 \right|^2 = \frac{M}{M + m} \left( \frac{1}{2} M \left| \vec{v}_1 \right|^2 \right) + \frac{m}{M + m} \left( \frac{1}{2} m \left| \vec{v}_2 \right|^2 \right)$$

Da sowohl  $M/(M + m)$  als auch  $m/(M + m)$  kleiner als 1 sind, ist die kinetische Energie nach dem Zusammenstoß kleiner als die anfängliche kinetische Energie.

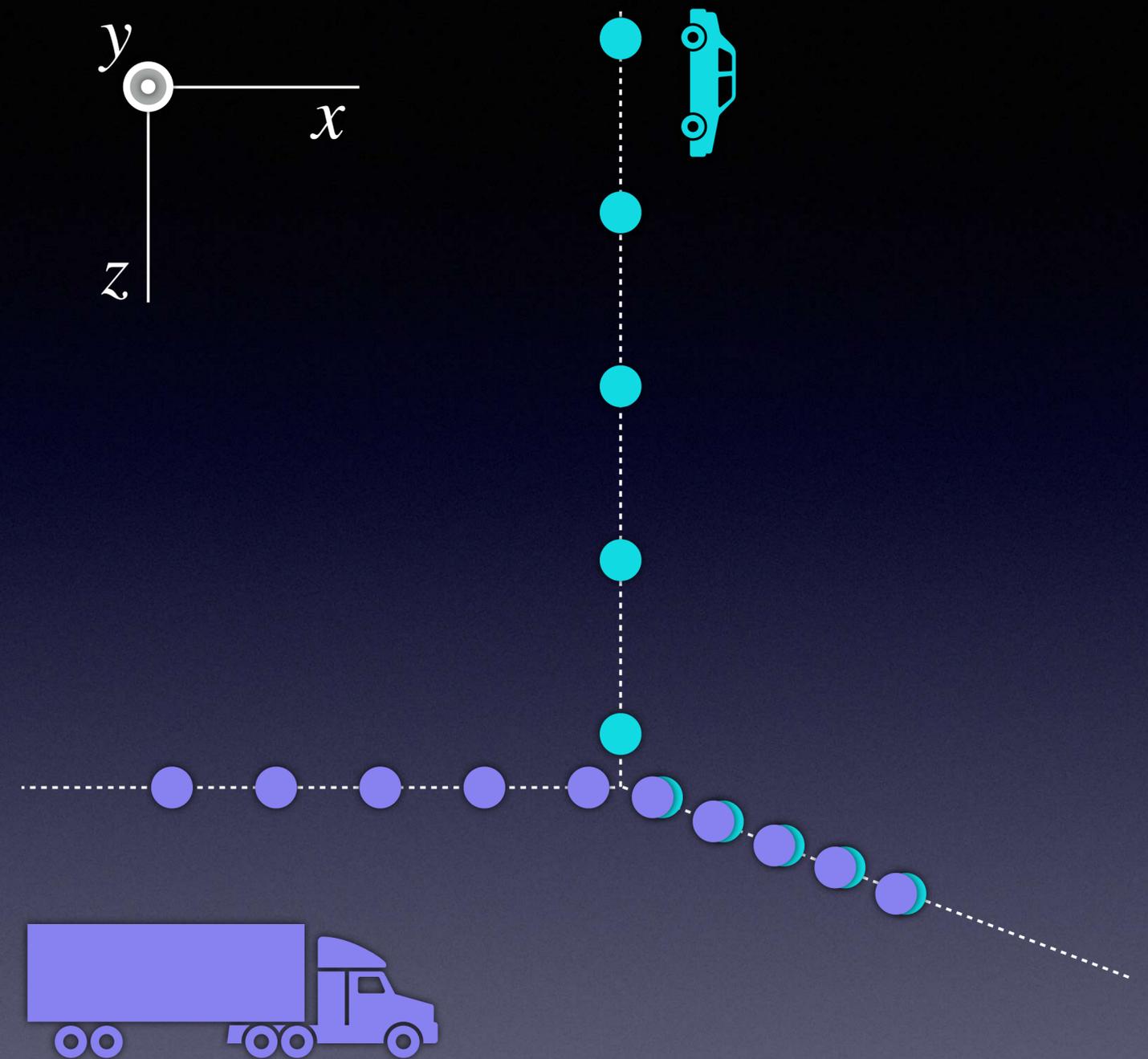
Wo bleibt die „fehlende“ kinetische Energie?

Ein Teil der Energie wurde als **Schallwellen** in die Luft abgestrahlt, die beim Zusammenstoß der Fahrzeuge mit einem lauten Knall entstanden. Ein Teil der Energie ging in die Erhöhung der **Temperatur** der Fahrzeuge, so dass ihre thermische Energie nun höher ist als zuvor (größere Zufallsbewegungen der Atome). Ein Teil der Energie floss in die **Verformung** der Metallkarosserien von Lkw und Pkw. Ein verbogener Kotflügel hat eine höhere innere Energie, die mit einer Änderung der Konfiguration der Atome verbunden ist. Manchmal kann man diese Energie zurückgewinnen (z. B. wenn man eine Feder zusammendrückt, um sie später wieder freizugeben), und man spricht dann von „elastisch gespeicherter“ Energie. Manchmal kann man die Energie jedoch nicht zurück erhalten, weil die Konfigurationsänderung „eingefroren“ wird. Unser Zusammenstoß ist ein Beispiel für eine „unelastische“ Kollision, bei der ein gewisser Teil der anfänglichen kinetischen Energie in Formen überführt wird, die uns nicht mehr zugänglich sind.

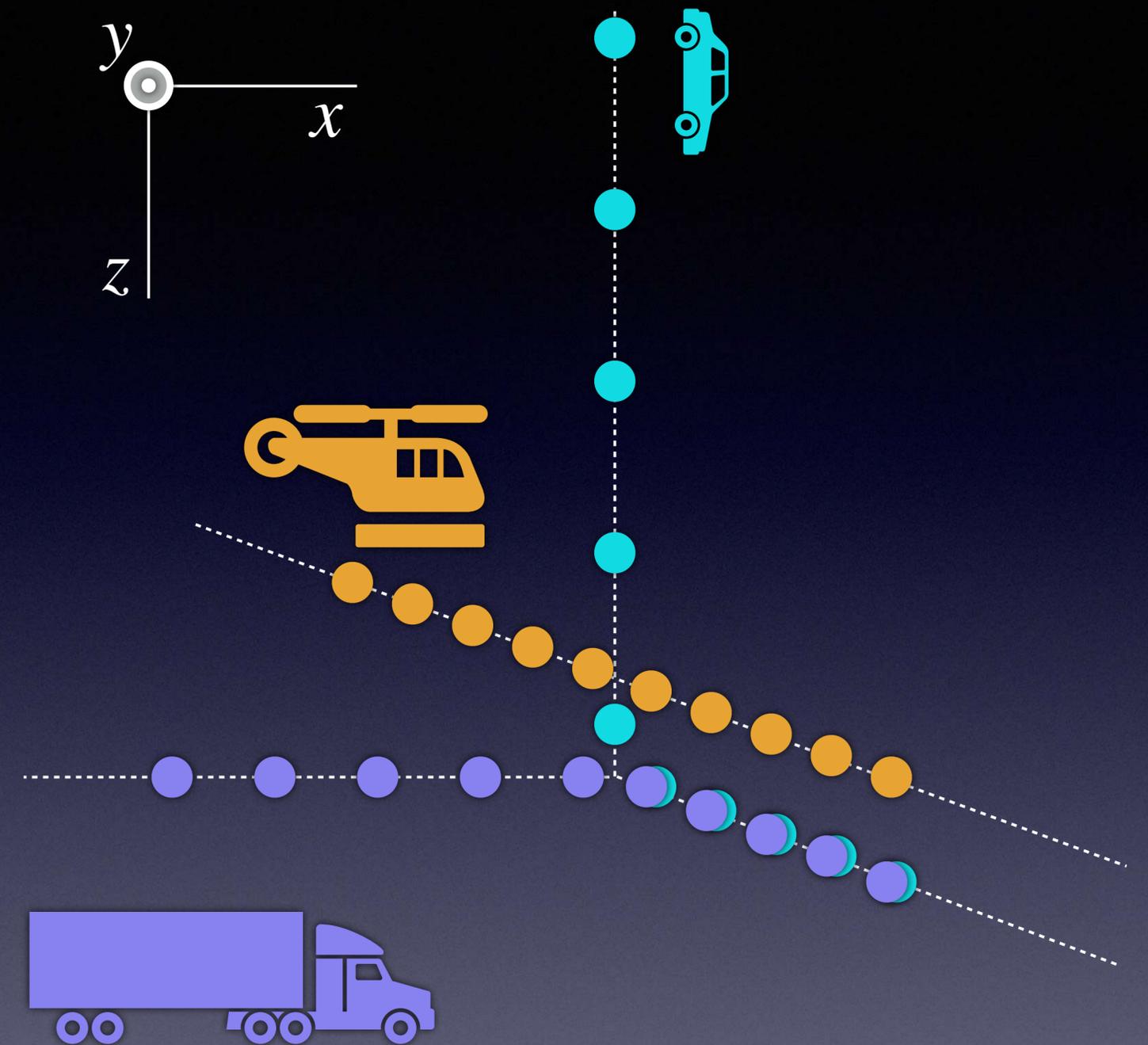
# Kontrollpunkt 4

K4.1: Fahrzeug 1 bewegt sich in Richtung Norden und Fahrzeug 2 in Richtung Westen. Dann stoßen sie zusammen. Sie bleiben ineinander verkeilt und hinterlassen Reifenabriebsspuren auf der Fahrbahn, die zeigen, dass Fahrzeug 1 um  $30^\circ$  abgelenkt wurde (Fahrzeug 2 wurde also um  $60^\circ$  abgelenkt). (1) Was kannst Du über die Fahrzeuge vor dem Zusammenstoß sagen?

Wir können zeigen, dass der Lkw-Pkw-Kollisionsprozess aus der Sicht eines Hubschraubers, der die Szene mit der Endgeschwindigkeit des ineinander verkeilten Systems aus Lkw und Pkw überfliegt, viel einfacher aussieht. Dies wird zu neuen Erkenntnissen führen. Nehmen wir an, der Unfall ereignet sich bei Nacht, und vom Hubschrauber aus sieht man nur die in gleichen Zeitabständen blinkenden Lichter, die auf den beiden Fahrzeugen angebracht sind. Nebeneinanderstehende Abbildung zeigt eine Mehrfachbelichtung der Szene, die man von einem Hubschrauber aus sehen würde, der über der Kreuzung schwebt.

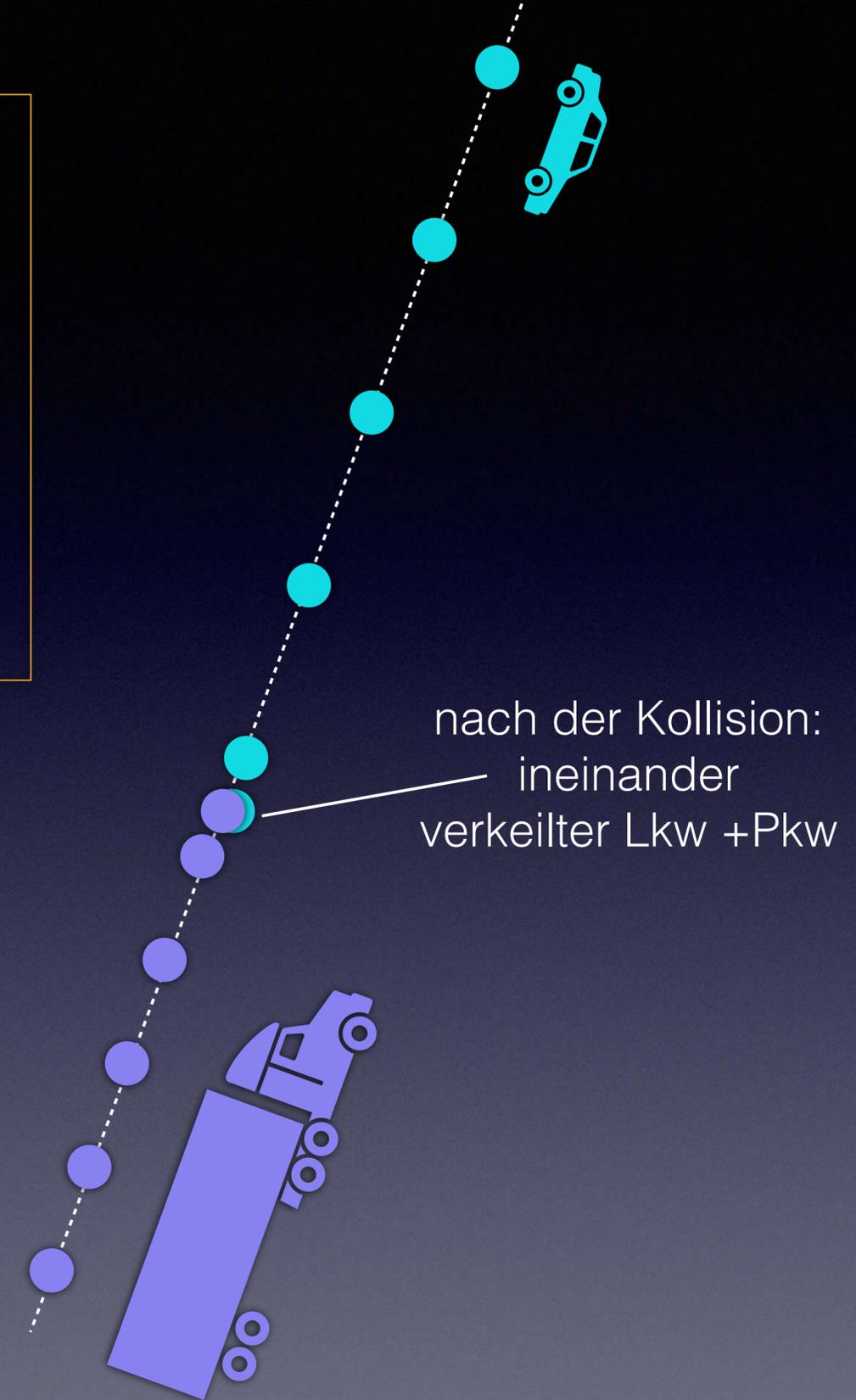
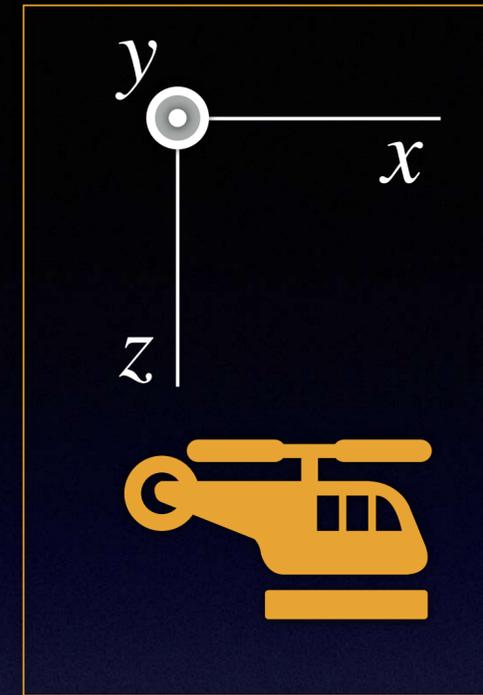


Nehmen wir stattdessen jetzt an, dass der Hubschrauber die Kreuzung mit der gleichen Geschwindigkeit überfliegt, die die ineinander verkeilten Fahrzeuge nach dem Zusammenstoß haben. Das so erhaltene Bild ist in einem wichtigen Sinne „einfacher“ als das ursprüngliche Bild. Von der bewegten Beobachtungsplattform aus sehen wir, wie der Lkw und der Pkw ineinander fahren und dann stehen bleiben (da Hubschrauber, Lkw und Pkw jetzt die gleiche Geschwindigkeit haben). In diesem (bewegten) Bezugssystem ist es offensichtlich, dass kinetische Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, denn nach der Kollision ist die kinetische Energie Null.



In dem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Helikopter-Bezugssystem nehmen wir die Kollision wie nebenstehend dargestellt wahr.

Der Grund dafür, dass wir uns vorstellen, diese Beobachtungen bei Nacht zu machen, ist, dass wir nicht durch den sich bewegenden Hintergrund abgelenkt werden. Wenn du diese Kollision aus einem sich bewegenden Hubschrauber bei Tageslicht betrachtest, besteht eine starke Tendenz, deine Bewegung mental zu kompensieren und dich (mental) in den Bezugsrahmen der Straße zu versetzen, wodurch du die wichtige Tatsache übersehen könntest, dass der Pkw und der Lkw nach der Kollision relativ zu dir stillstehen.



Die Betrachtung einer Kollision aus einem sich bewegenden Bezugssystem kann Einblicke in alle Arten von Kollisionen geben, nicht nur in solche, die ideal unelastisch ablaufen. Der entscheidende Punkt, der zu einer nützlichen Verallgemeinerung führt, ist, dass der Gesamtimpuls des Systems aus Lkw und Pkw nach der Kollision gleich Null ist, wenn die Fahrzeuge relativ zum Hubschrauber unbewegt sind.

Da sich der Hubschrauber mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wissen wir, dass das Prinzip Impuls ebenfalls in diesem gleichmäßig bewegten Bezugssystem gilt. Deshalb muss auch der anfängliche Gesamtimpuls des Systems Lkw+Pkw Null sein, falls der finale Gesamtimpuls, nach der Kollision, Null ist. Das macht den Vorgang so einfach: Der Gesamtimpuls ist vor und nach der Kollision im bewegten Bezugssystem gleich Null.

Wenn wir die Szene aus einem sich bewegenden Bezugssystem betrachten, müssen wir von jeder der Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  eine unveränderliche, konstante Geschwindigkeit  $\vec{v}_R$  subtrahieren, die des sich bewegenden Bezugssystems, und diese Subtraktion ändert nichts an dem Prinzip Impuls für das aus Lkw+Pkw bestehende System. Allgemein gilt:

$$\frac{d}{dt} \left( m \left( \vec{v} - \vec{v}_R \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( m\vec{v} \right) = \vec{F}_{\text{net}} .$$

Es ist offensichtlich, dass wir einen Einblick in eine Kollision gewinnen, wenn wir diese in einem bewegten Bezugssystem betrachten, in dem der Gesamtimpuls  $\vec{p}_{\text{sys},R} = \vec{0}$  ist. Wie bestimmen wir die geeignete Geschwindigkeit  $\vec{v}_R$  für ein solches Bezugssystem? Zum Beispiel erhalten wir für zwei zum System gehörende Objekte:

$$\vec{p}_{\text{sys},R} = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_R) + m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_R) = \vec{0} ,$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 - (m_1 + m_2) \vec{v}_R = \vec{0} ,$$

$$\vec{v}_R = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} .$$

Es ist jetzt Zeit, uns an die Definition des Schwerpunkts  $\vec{r}_M$  eines (hier aus zwei Punkt-Objekten bestehenden System) zu erinnern:

$$\vec{r}_M = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} .$$

Für zeitlich unveränderliche Massen gilt:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{\vec{p}_{\text{sys}}}{M_{\text{sys}}} .$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis: In einem Bezugssystem, das sich mit  $\vec{v}_R = \vec{v}_M$  bewegt, ist der Gesamtimpuls des Systems Null.

Das mit dem Schwerpunkt bewegte Referenzsystem wird auch als Schwerpunktsystem („*center of mass system*“, CMS) bezeichnet. Es ist ein Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt des betrachteten physikalischen Systems im Ursprung des Koordinatensystems ruht. Im Schwerpunktsystem sind viele dynamische Vorgänge besonders einfach zu beschreiben.

Aus der Definition des Schwerpunktsystems folgt direkt, dass in ihm der Gesamtimpuls der beteiligten Massen zu jeder Zeit, vor wie nach einem Stoß- oder Reaktionsvorgang, gleich Null ist.

Die Transformation von einem System in das andere ist eine Galilei- (klassisch) oder Lorentz-Transformation (relativistisch).

Geschwindigkeit  $\vec{v}_R$  für das Lkw+Pkw-System:

$$\vec{v}_R = \frac{M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{M + m} .$$

Geschwindigkeiten des Lkw und des Pkw im Schwerpunktsystem:

$$\vec{v}_{1,R} = \vec{v}_1 - \frac{M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{M + m} = \frac{m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{M + m} ,$$

$$\vec{v}_{2,R} = \vec{v}_2 - \frac{M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{M + m} = \frac{M(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{M + m} .$$

Die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_{1,R}$  (Lkw) und  $\vec{v}_{2,R}$  (Pkw) sind entgegengesetzt gerichtet.

Für den Gesamtimpuls  $\vec{p}_{\text{sys},R}$  im Schwerpunktsystem erhalten wir:

$$M \frac{m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{M + m} + m \frac{M (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{M + m} = \vec{0}$$

Nach der Kollision sind die Geschwindigkeiten von Lkw und Pkw in dem Schwerpunktsystem beide Null  $\vec{v}_{3,R} = \vec{0}$ . Aus diesem Grund ist der Verlust an kinetischer Energie, der in andere Energiearten umgewandelt wird, im Schwerpunktsystem gleich der gesamten kinetischen Energie unmittelbar vor der Kollision.

Für  $\vec{v}_3$  im ruhenden System erhalten wir unmittelbar

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_{3,R} + \vec{v}_R = \vec{v}_R = \frac{M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{M + m}.$$

Mit  $\vec{v}_1 = |\vec{v}_1| \langle 1,0,0 \rangle$  und  $\vec{v}_2 = |\vec{v}_2| \langle 0,0,1 \rangle$  erhalten wir mit

$$\vec{v}_3 = \left\langle \frac{M |\vec{v}_1|}{M + m}, 0, \frac{m |\vec{v}_2|}{M + m} \right\rangle$$

dasselbe Ergebnis wie für das ruhende Bezugssystem.

Im vorangehenden Kapitel haben wir die kinetische Energie eines Systems zerlegt in eine auf die Bewegung des Massenschwerpunkts bezogene (translatorische) kinetische Energie und in die mit der Relativbewegung zum Massenschwerpunkt verbundene kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rel}} , \text{ mit } E_{\text{kin,rel}} = E_{\text{kin,rot}} + E_{\text{kin,vib}} , \text{ worin}$$

$$E_{\text{kin,trans}} = \frac{|\vec{p}_{\text{sys}}|}{2M_{\text{sys}}} \text{ ist.}$$

In dem ruhenden Bezugssystem ist  $E_{\text{kin,trans}} > 0$  (und konstant) und in dem CMS ist  $E_{\text{kin,trans}} = 0$ . Vor dem Zusammenstoß ist in beiden Systemen  $E_{\text{kin,rel}} > 0$  und nach dem Zusammenstoß gilt  $E_{\text{kin,rel}} = 0$ .

# Kontrollpunkt 5

K5.1: Ein Pkw mit  $m = 1000 \text{ kg}$ , der mit einer Geschwindigkeit von  $30 \text{ m/s}$  nach Osten fährt, stößt frontal mit einem (leichten) Lkw der Masse  $M = 3000 \text{ kg}$  zusammen, der mit der Geschwindigkeit  $20 \text{ m/s}$  nach Westen fährt. Die Fahrzeuge bleiben nach dem Zusammenstoß ineinander verkeilt. (1) Verwende das Bezugssystem-Konzept des Schwerpunktsystems CMS, um zu bestimmen, wie viel kinetische Energie bei dem Zusammenstoß verloren geht.

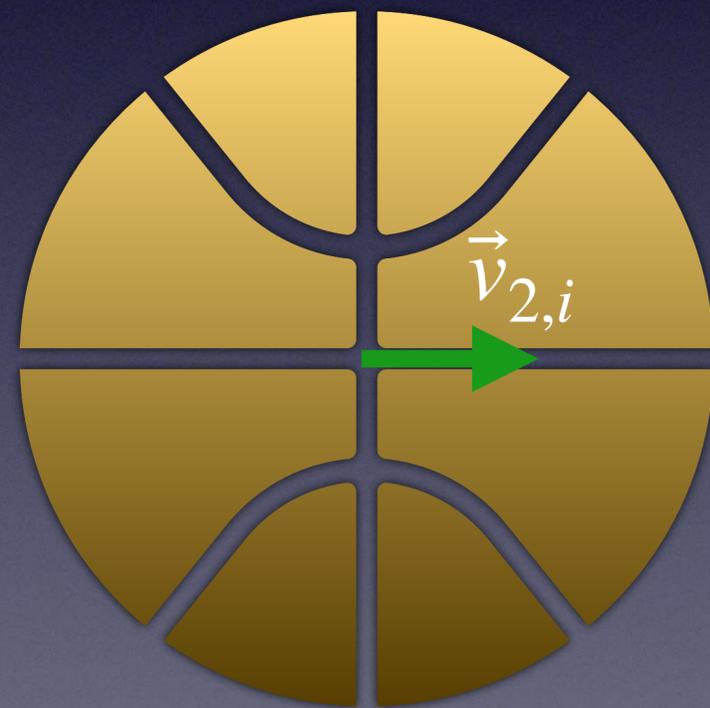
Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: (1)  $E_{\text{kin},1,i} = 300 \text{ J}$ ; (2)  $|\vec{v}_{1,f}| = |\vec{v}_{2,f}| = 5 \text{ m/s}$ ; (3)  
 $E_{\text{kin},1,f} + E_{\text{kin},2,f} = 150 \text{ J}$  (4)  $\Delta E_{\text{int}} = 150 \text{ J}$ .

K2.1: (1)  $|\vec{p}_{1,i}| = 6.82 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , mit  $\vec{p}_{2,f} = -\vec{p}_{1,i}$  folgt  
 $|\vec{v}_{2,f}| \approx 2.27 \times 10^{-24} \text{ m/s}$ . (2)  $E_{\text{kin},2,f} \approx 1.6 \times 10^{-23} \text{ J}$ ; zum  
Vergleich  $E_{\text{kin},1,i} \approx 150 \text{ J}$ . (3) Der Einfluss des Rückstoßes auf die  
Bewegung der Erde bleibt vernachlässigbar, was an der sehr kleinen  
übertragenen kinetischen Energie abgelesen werden kann.

K3.1: Dazu betrachten wir das Problem in zwei Bezugssystemen: einem ruhenden System und einem mit der anrollenden Bowlingkugel mitbewegten System.

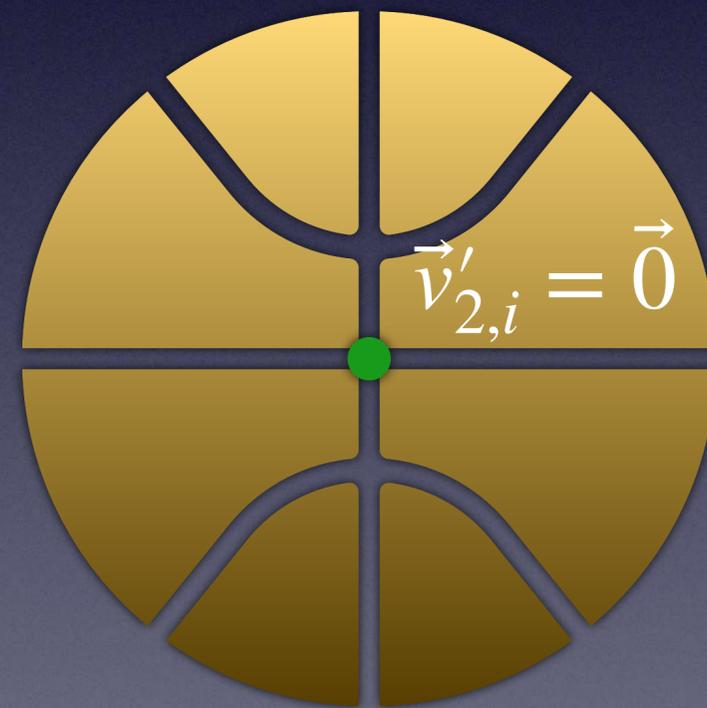
ruhendes Bezugssystem



$M$

$$\vec{v}_{1,i} = \vec{0}$$

mitbewegtes Bezugssystem



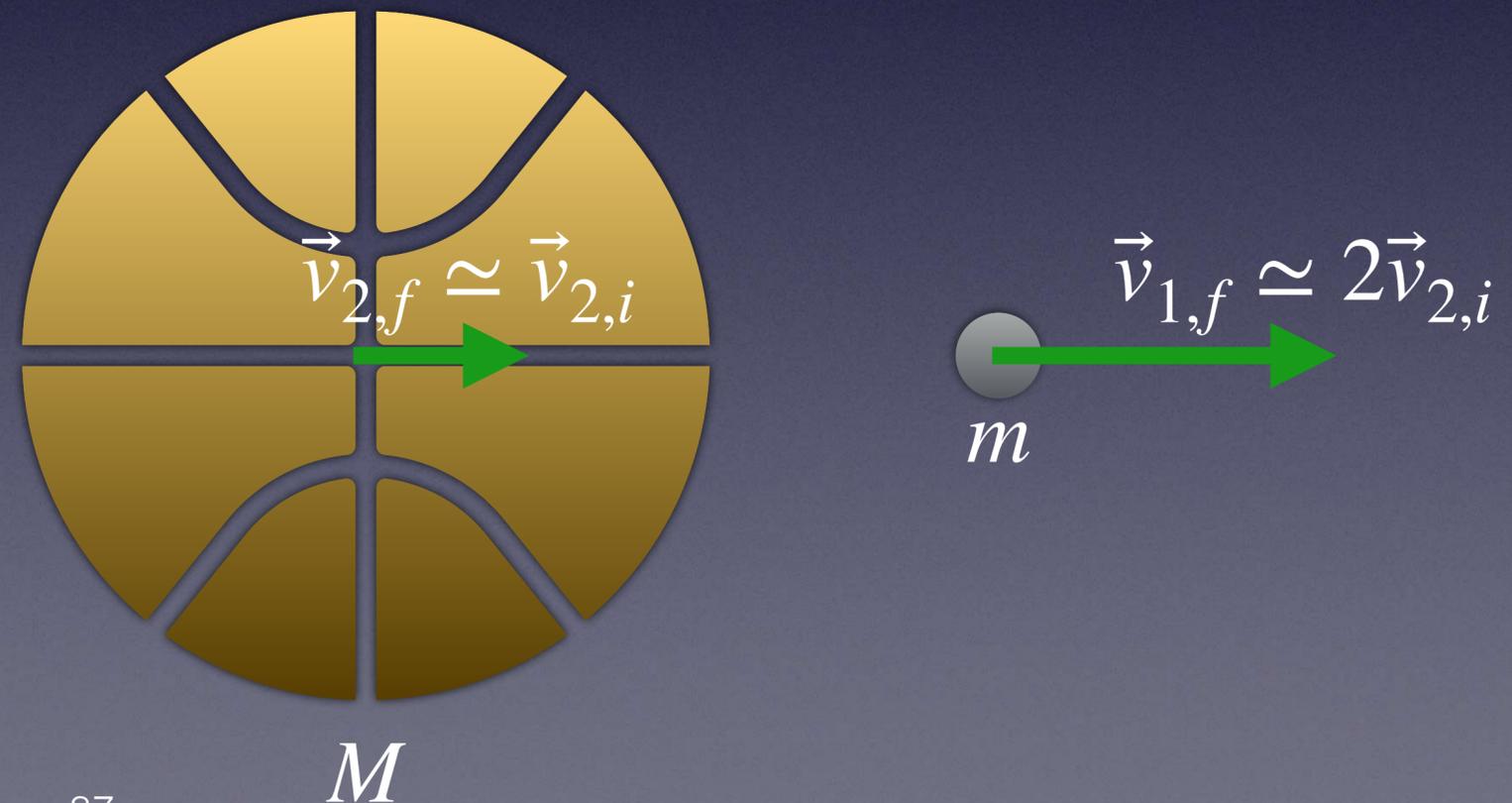
$M$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_R$$

$$\vec{v}'_{1,i}$$

In dem mitbewegten System,  $\vec{v}_R \equiv \vec{v}_{2,i}$ , ist  $\vec{v}'_{1,i} = -\vec{v}_R$ , und damit gilt für  $M \gg m$  näherungsweise  $\vec{v}'_{1,f} \approx +\vec{v}_R$ , und (1) damit im ruhenden System  $\vec{v}_{2,f} \approx 2\vec{v}_R = 2\vec{v}_{2,i}$ . (2) Durch Übergang in das mit der Bowling-Kugel gleichförmig mitbewegte Bezugssystem gelten dort die physikalischen Gesetze in unveränderter Weise wie in dem ruhenden System. Dadurch überführen wir das Problem auf das schon bekannte Problem der ruhenden schweren Bowling-Kugel.

*Situation nach dem Zusammenstoß  
im ruhenden Bezugssystem*



K4.1: (1) Der Impuls von Fahrzeug 1 war um den Faktor  $\sqrt{3}$  größer als der Impuls von Fahrzeug 2.

K5.1: Alle Geschwindigkeiten in x-Richtung.

$$v_R = \frac{mv_1 - Mv_2}{m + M} = -7.5 \text{ m/s}, \quad v_{1,R} = v_1 - v_R = 37.5 \text{ m/s},$$

$$v_{2,R} = v_2 - v_R = -12.5 \text{ m/s}, \quad mv_{1,R} + Mv_{2,R} = 0 \text{ (Kontrolle)},$$

$E_{\text{kin},R} = E_{\text{kin},1,R} + E_{\text{kin},2,R} = 937.5 \text{ kJ}$ . (1) Die vor dem Zusammenstoß vorhandene kinetische Energie geht „verloren“ (Umwandlung in innere Energie).

# Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 11 - Drehimpuls