

# Moderne Mechanik

Teil 6

Das Prinzip Energie

# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

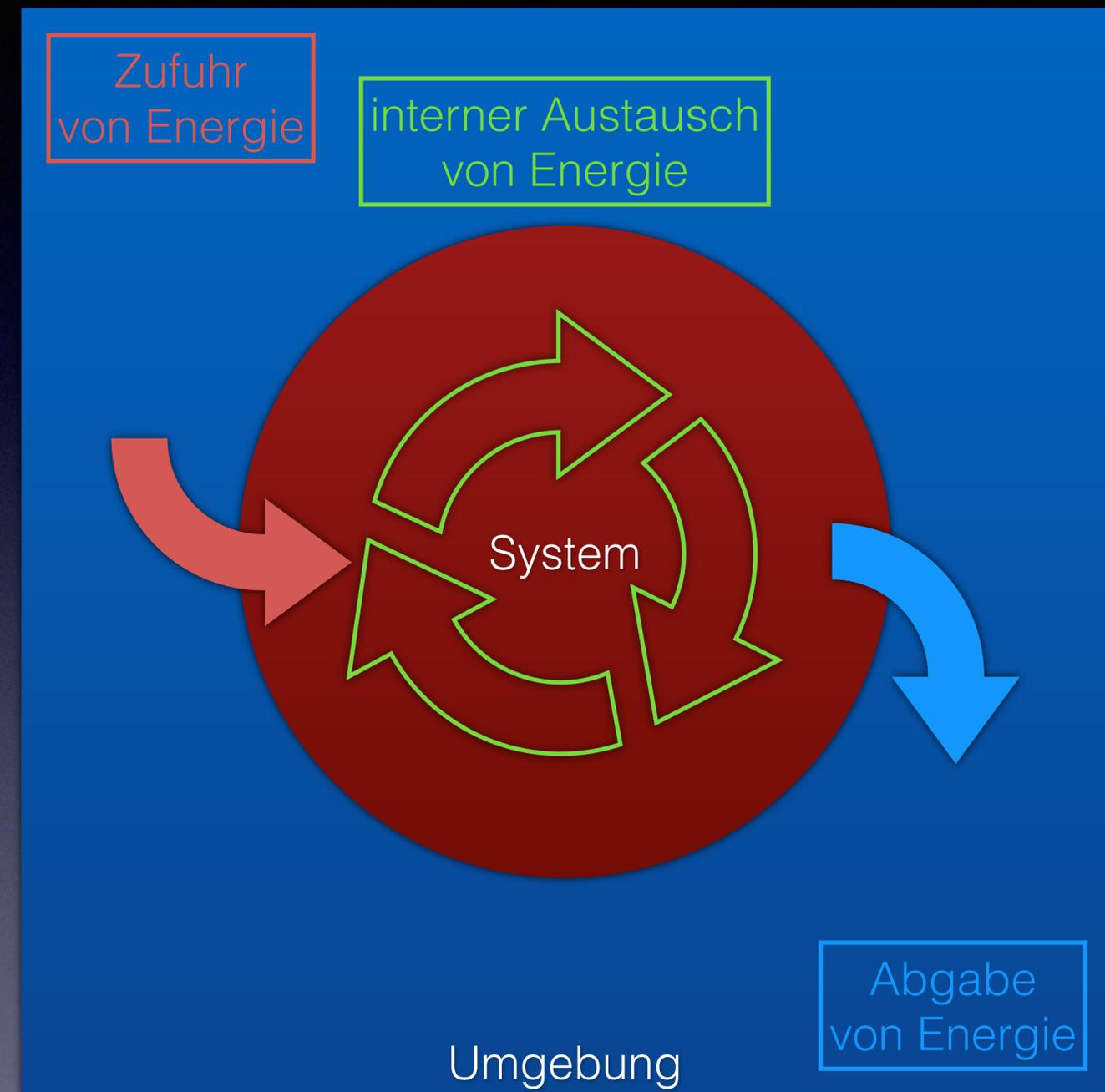
- die Gesamtenergie (Ruheenergie + kinetische Energie) eines Einteilchensystems sowie
- die Gesamtenergie eines Mehrteilchensystems (Ruheenergie, kinetische Energie, Energie im Gravitationsfeld und im elektrischen Feld) zu berechnen;
- Die Energieänderungen eines Systems mathematisch mit der von der Umgebung geleisteten Arbeit in Beziehung setzen;
- Eine detaillierte Analyse von Prozessen durchzuführen, die Änderungen der potentiellen Energie, der kinetischen Energie und der Ruheenergie beinhalten;
- Diagramme der Energie eines Mehrteilchensystems als Funktion des Abstands zu konstruieren und interpretieren.

# Übersicht

- Das Prinzip Energie
- Energie eines einzelnen Objekts
- Arbeit: mechanischer Energietransfer
- Arbeit und Energie
- Änderung der Ruheenergie
- Beweis des Prinzips Energie für ein einzelnes Teilchen
- Potenzielle Energie in Systemen mit mehreren Teilchen
- Potenzielle Energie im Gravitationsfeld
- Potenzielle Energie im elektrischen Feld
- Darstellung der Energie gegen den Abstand
- Allgemeine Eigenschaften der Potenziellen Energie
- Die Masse eines Vielteilchen-Systems
- Überlegungen: weshalb nutzen wir das Prinzip Energie?
- Identifizieren von Anfangs- und Endzuständen
- Energie in numerischen Modellen
- Ein Rätsel
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

# Das Prinzip Energie

Du weißt viel über den Energiefluss im täglichen Leben. Du nimmst chemische Energie in Form von Nahrung auf, und du verbrauchst diese chemische Energie, wenn du aktiv bist. Du setzt elektrische Energie in einem Toaster ein, und der Toaster erhöht die Temperatur des Brotes. Wenn du eine Feder zusammendrückst, kann die in der Feder gespeicherte mechanische Energie einen Ball hochschleudern. Energie kann weder erzeugt noch zerstört werden, aber sie kann ihre Form ändern. Ein System kann nur dann Energie gewinnen oder verlieren, wenn die Umgebung die gleiche Menge an Energie verliert oder gewinnt: Das Prinzip Energie lautet daher in allgemeinsten Form:  $\Delta E_{\text{sys}} + \Delta E_{\text{umg}} = 0$ .



Energie kann zwischen System und Umgebung fließen.

Es gibt eine Reihe von Mechanismen, durch die Energie zwischen System und Umgebung übertragen werden kann. In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf die „Arbeit“, also das Ergebnis einer Kraftwirkung. Andere Mechanismen werden in späteren Kapiteln behandelt. Die Gültigkeit des Prinzips Energie wurde durch eine Vielzahl von Beobachtungen und Experimenten bestätigt, an denen große und kleine Objekte beteiligt waren, die sich langsam oder mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegten und sogar Kernreaktionen durchliefen, die die Identität der Objekte veränderten. Es ist eine Zusammenfassung der Art und Weise, wie Energie in der realen Welt fließt:

- Es gilt für jedes mögliche System, unabhängig davon, wie groß oder klein es ist (von Galaxienhaufen bis zu subatomaren Teilchen) oder wie schnell es sich bewegt.
- Es gilt für jede Art von Wechselwirkung (Gravitation, Elektromagnetismus, starke oder schwache Wechselwirkung).
- Es setzt eine Wirkung (die Energieänderung eines Systems) mit einer Ursache (einer Wechselwirkung mit der Umgebung) in Beziehung.

# Energie eines einzelnen Objekts

Das einfachste mögliche System besteht aus einem einzigen Punktteilchen. Ein „Punktteilchen“ könnte sich auf ein Elektron beziehen, aber wir können auch einen Baseball oder sogar einen Planeten als Punktteilchen modellieren, wenn es während des interessierenden Prozesses keine signifikanten Veränderungen innerhalb des Systems (Objekt) gibt, wie z. B. Veränderungen der Form, der Rotation, der Vibration oder der Temperatur.

In diesem Kapitel werden wir Energie und Energieänderungen für Systeme aus Punktteilchen diskutieren. Die Betrachtung von Systemen mit ausgedehnten Objekten, die internen Veränderungen unterliegen und daher nicht als Punktteilchen modelliert werden können, wird auf Kapitel 7 verschoben.

Ein **einzelnes Teilchen** kann nur zwei Arten von Energie haben: die mit seiner Ruhemasse verbundene Energie, die so genannte „**Ruheenergie**“  $E_0$  (en: *rest energy*) und die mit seiner Bewegung verbundene Energie, die so genannte „**kinetische Energie**“  $E_{\text{kin}}$  (en: *kinetic energy*). Beide werden in einem einzigen kompakten Ausdruck zusammengefasst, der erstmals 1905 von Einstein formuliert wurde:

$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \gamma mc^2, \text{ mit}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

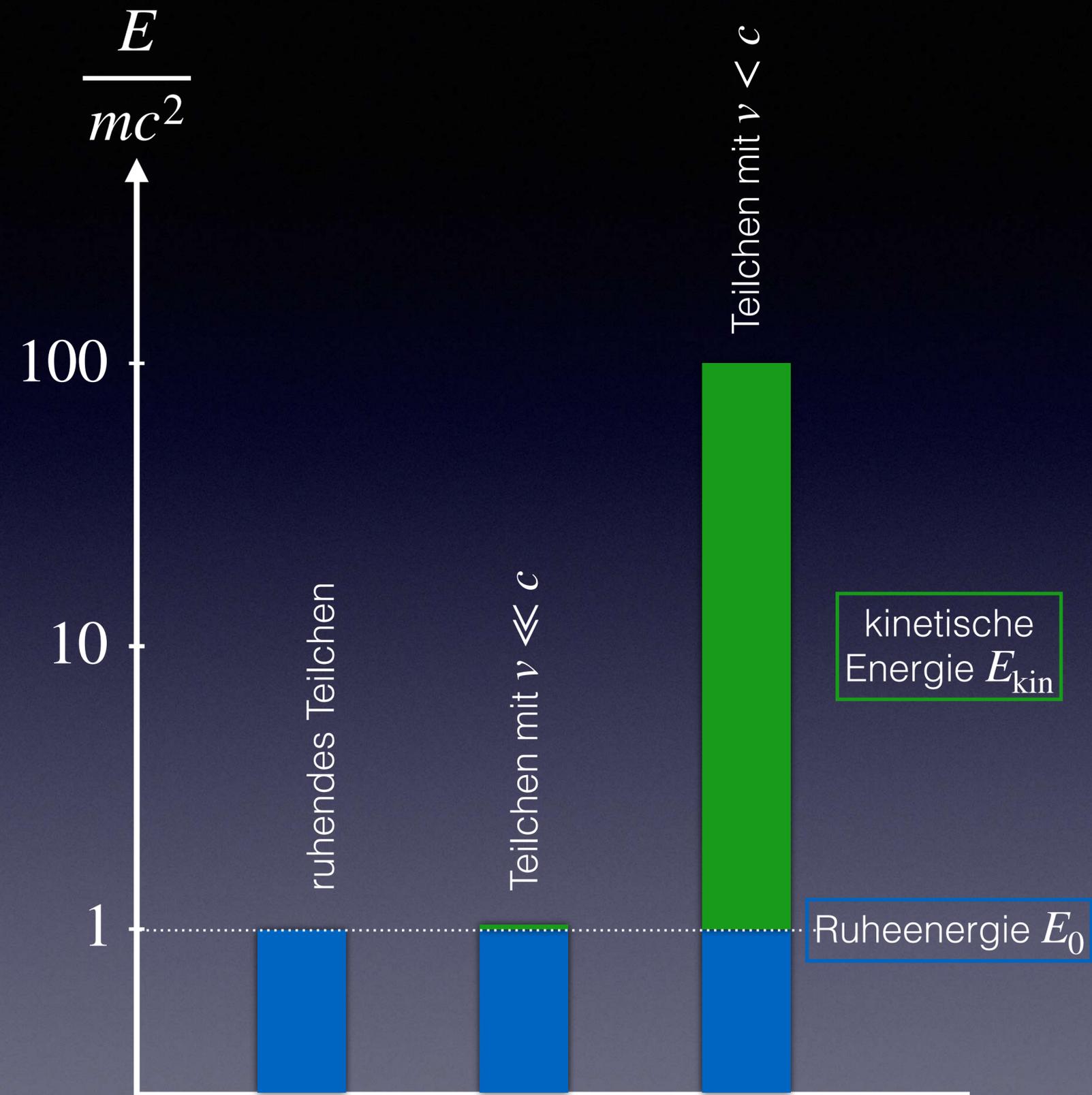
Die Energie eines Teilchens ist ein Skalar und nicht, wie der Impuls, ein Vektor.

Für  $v = 0$  ist  $\gamma = 1$ , und wir erhalten die berühmte Gleichung

$$[E_0 = ] E = mc^2 .$$

Diese hat die überraschende Interpretation, dass ein Teilchen auch dann Energie hat, wenn es ruht, was eine revolutionäre Idee war, als Einstein sie vorschlug. Wir nennen die Energiemenge, die ein Teilchen hat, wenn es ruht, die „Ruheenergie“  $E_0 = mc^2$ . Noch bemerkenswerter ist, dass Einstein erkannte, dass dies bedeutet, dass die Masse eines ruhenden Objekts, sein Energiegehalt geteilt durch eine Konstante ist:  $m = E/c^2$ . So weist z.B. ein heißes Objekt mit mehr innerer Energie eine geringfügig größere Masse als ein kaltes Objekt auf. **In Wirklichkeit sind Masse und Energie ein und dasselbe, auch wenn wir aus historischen Gründen unterschiedliche Einheiten für sie verwenden.**

Wenn man einem Teilchen mehr und mehr Energie zuführt, erhöht sich seine Energie, und es gibt keine theoretische Grenze dafür, wie viel Energie ein Teilchen abbekommen kann. Wenn sich die Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$  der Lichtgeschwindigkeit  $c$  nähert, wird der Ausdruck  $\sqrt{1 - (|\vec{v}|/c)^2}$  im Nenner sehr klein, und dementsprechend die Energie  $E$  sehr groß. Auch wenn man die Energie eines Teilchens weiter erhöhen kann, wird es sehr schwierig, seine Geschwindigkeit zu erhöhen, denn bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit erfordert jede noch so kleine Geschwindigkeitserhöhung eine enorme Zufuhr von Energie. Ein massives Teilchen kann die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen, weil dazu eine unendliche Menge an Energie erforderlich wäre.



# Kontrollpunkt 1

1. Ein Elektron hat die Masse  $9 \times 10^{-31}$  kg. Die Geschwindigkeit des Elektrons beträgt  $0.988c$  m/s. (1) Wie hoch ist seine Teilchenenergie  $E$ ? (2) Wie hoch ist seine Ruheenergie  $E_0$ ? (3) Wie hoch ist seine kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$ ? (4) Um wieviel Prozent muss man  $E_{\text{kin}}$  erhöhen, damit das Elektron auf  $0.989c$  m/s beschleunigt?

Wenn der Betrag  $v$  der Geschwindigkeit eines Teilchens klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c$ , können wir einen **Näherungsausdruck für die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$**  des Teilchens finden. In einem solchen Fall können wir die **Binomialentwicklung** verwenden:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots \right], \text{ und damit}$$

$$E \approx mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = E_0 + E_{\text{kin}} \rightarrow E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2}mv^2 \text{ (für } v \ll c\text{)}.$$

Dieser Ausdruck für  $E_{\text{kin}}$  entspricht dem von der „klassischen Physik“ her bekannten Wert.

# Kontrollpunkt 2

1. Ein Auto, das auf einer Autobahn fährt, hat eine durchschnittliche kinetische Energie von  $E_{\text{kin}} = 1.1 \times 10^5 \text{ J}$ . Seine Masse beträgt  $m = 1.5 \times 10^3 \text{ kg}$ . (1) Wie hoch ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit  $v$ ? (2) Wenn du die gesamte Ruheenergie  $E_0$  einer bestimmten Menge an Kraftstoff nutzen könntest, um dem Auto seine aktuelle kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  zu geben, welche Masse  $m_{\text{fuel}}$  an Kraftstoff würdest du benötigen? Hinweis: Die Einheit J (Joule) entspricht  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ .

Da sowohl die relativistische Energie als auch der Impuls den Faktor  $\gamma$  enthalten, erscheint es wahrscheinlich, dass sie in irgendeiner Weise miteinander verbunden sind.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\vec{v}|}{c}\right)^2}} \text{ und } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\vec{v}|}{c}\right)^2}} \rightarrow \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2} \rightarrow \vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{E} .$$

Setzt man den Ausdruck für  $\vec{v}$  in den Ausdruck für  $E$  ein und multipliziert mit der Wurzel, so erhält man:

$$E \sqrt{1 - \left(\frac{c |\vec{p}|}{E}\right)^2} = mc^2 = E_0 \rightarrow \text{quadrieren} \rightarrow E^2 - \left(c |\vec{p}|\right)^2 = E_0^2 .$$

Auf der vorangehenden Folie haben wir folgenden Zusammenhang zwischen Energie  $E$ , Masse  $m$ , Impuls  $p = |\vec{p}|$  und Lichtgeschwindigkeit  $c$  erhalten:

$$E^2 - (cp)^2 = (mc^2)^2 .$$

Diese Beziehung, die **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**, gilt in allen Bezugssystemen und für alle Teilchengeschwindigkeiten. Sowohl Energie als auch Impuls ändern sich, wenn ein Phänomen in einem anderen Bezugssystem betrachtet wird, aber diese Beziehung bleibt bestehen. Die Größe  $E^2 - (cp)^2$  wird daher als „invariante“ Größe bezeichnet - eine Größe, die sich nicht ändert, wenn das Bezugssystem gewechselt wird. Für Teilchen mit Ruheenergie null (Photon) erhalten wir  $E = cp$ .

Die Beziehung  $E^2 - (cp)^2 = (mc^2)^2$  kann verwendet werden, um einen anderen **Ausdruck für die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$**  zu finden, der sowohl **für hohe als auch für niedrige Geschwindigkeiten  $v$**  gilt:

$$E^2 - (mc^2)^2 = (pc)^2,$$

$$(E + mc^2)(E - mc^2) = p^2c^2,$$

$$(\gamma mc^2 + mc^2) E_{\text{kin}} = p^2c^2, \text{ und schließlich}$$

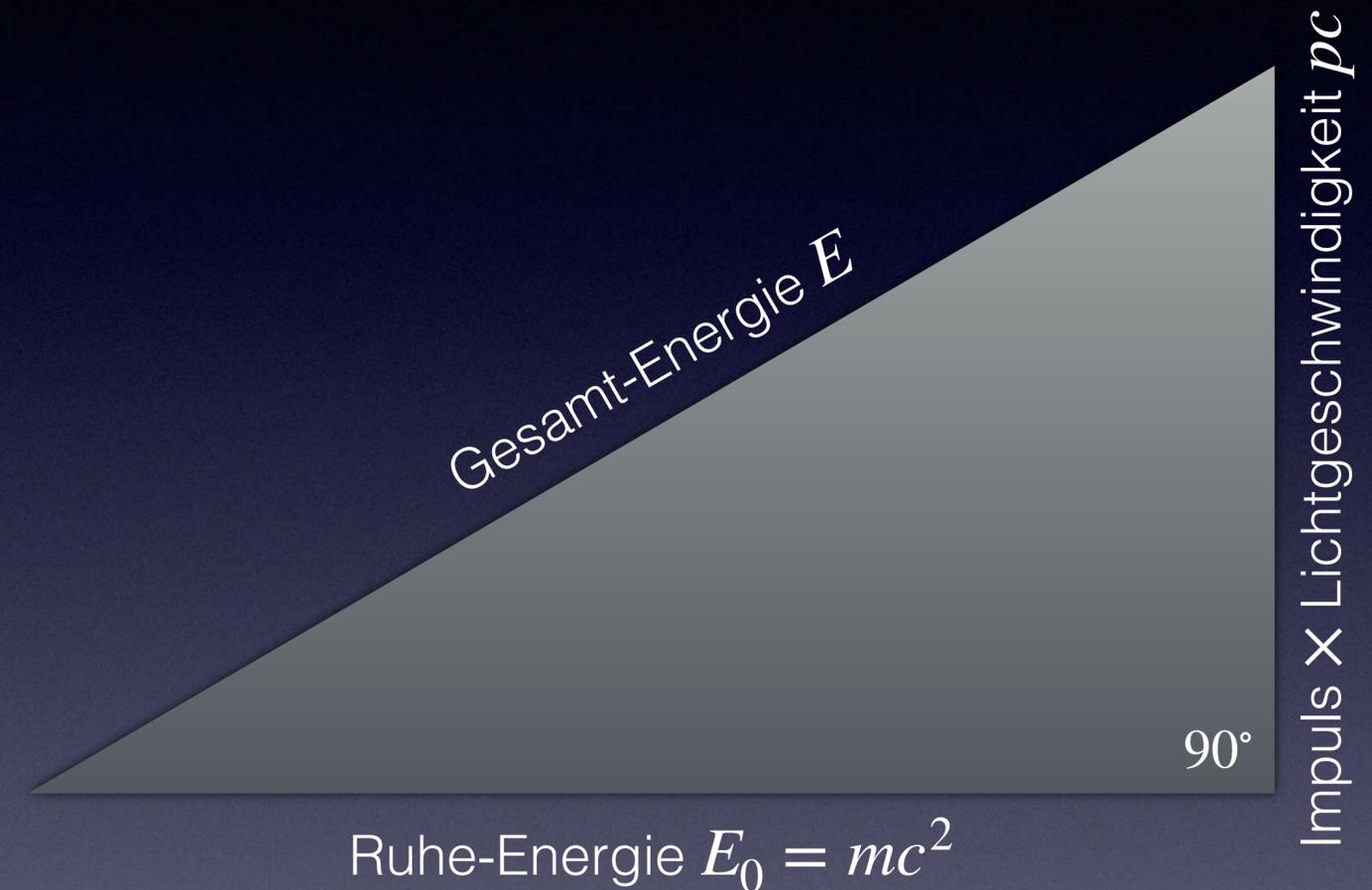
$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{(1 + \gamma) m}.$$

Für  $\gamma \approx 1$  erhalten wir den „klassischen“ Ausdruck  $E_{\text{kin}} = p^2/(2m) = mv^2/2$ .

Die Energie-Impuls-Beziehung kann auch in einem **rechtwinkligen Dreieck** dargestellt werden (siehe nebenstehende Darstellung). Dabei ist die Gesamtenergie  $E$  die Hypotenuse.

Die Katheten sind einerseits die Ruheenergie  $E_0 = mc^2$  und das Produkt aus Impuls und Lichtgeschwindigkeit  $pc$ :

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 .$$



# Arbeit: mechanischer Energietransfer

Wir interessieren uns für die **Veränderungen der Energie  $E$  eines Systems**, die auf die **Wechselwirkung** des Systems **mit Objekten in seiner Umgebung** zurückzuführen sind. Unser Ziel ist es, herauszufinden, wie man solche Änderungen quantitativ beschreiben kann.

Das **Prinzip Impuls** setzt eine Änderung des Impulses mit dem auf ein System ausgeübten Kraftstoß in Beziehung. Der Kraftstoß ist das Produkt aus Kraft und Zeit:

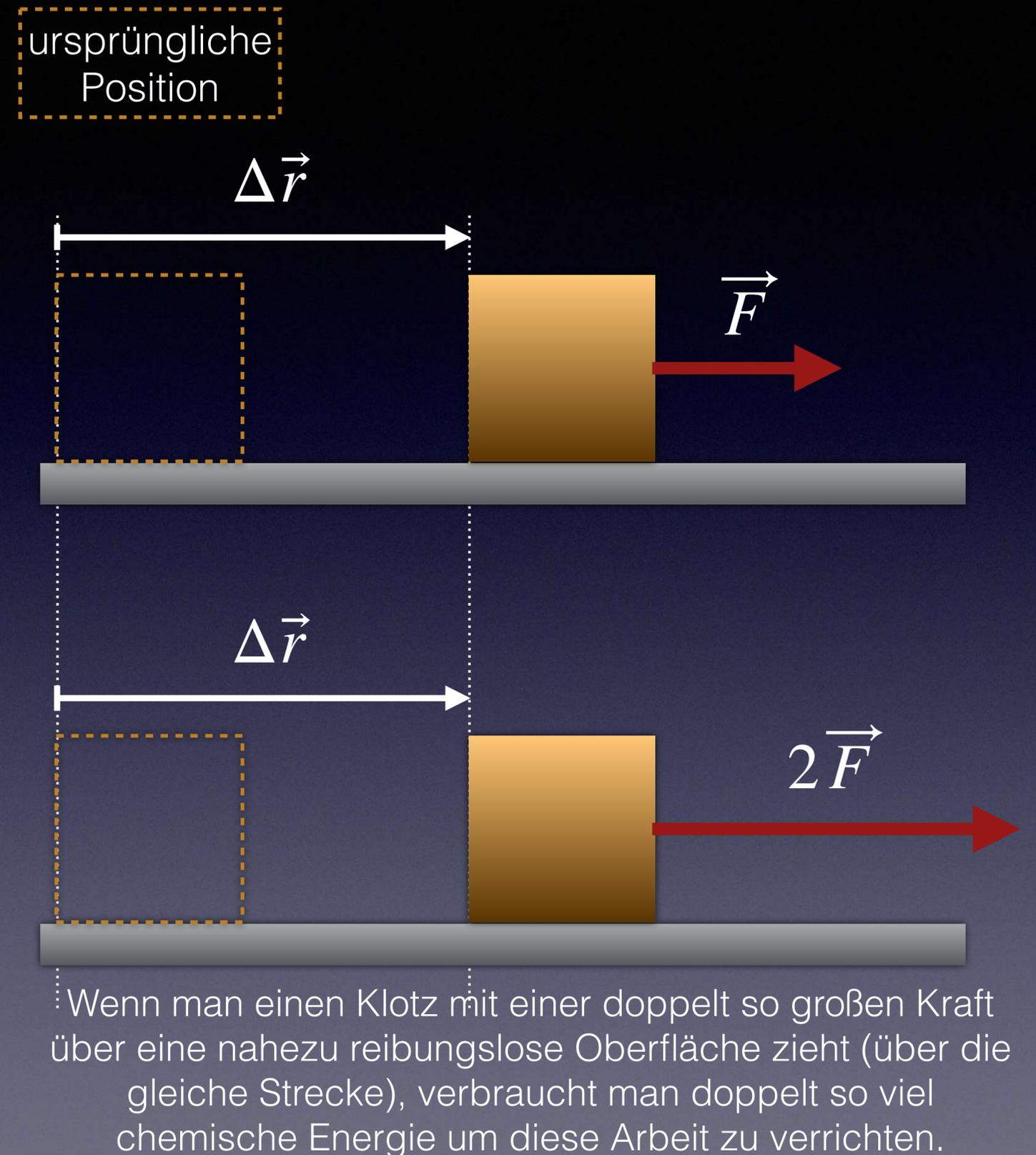
$$(\text{Impuls-Änderung}) = (\text{Kraft}) \times (\mathbf{Zeit}) .$$

Wir könnten uns fragen, welche Eigenschaft eines Systems sich aufgrund von Kräften ändert, die nicht über eine bestimmte Zeit, sondern über eine bestimmte **Wegstrecke** wirken, etwa so:

$$(?\text{-Änderung}) = (\text{Kraft}) \times (\mathbf{Weg}) .$$

Die Größe, die sich ändert, ist die **Energie des Systems**,  $\gamma mc^2$  im Falle eines einzelnen Teilchens. Die Größe, die sich aus **Kraft  $\times$  Weg** ergibt, wird „**Arbeit**“  $W$  genannt.

Nehmen wir an, du übst eine Kraft  $\vec{F}$  mit konstanter Größe in einer konstanten Richtung auf einen Klotz aus, der ursprünglich auf einer nahezu reibungsfreien Oberfläche ruhte, und ziehst ihn über einen Weg  $\Delta\vec{r}$ . Der Klotz bewegt sich dabei immer schneller, wodurch er eine gewisse kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  erhält. Würdest du mit der doppelten Kraft  $2\vec{F}$  über denselben Weg ziehen, so würde der Klotz vermutlich doppelt so viel kinetische Energie erhalten (und du müsstest dafür doppelt so viel chemische Energie aufwenden). Beachte, dass sich die Ruheenergie  $mc^2$  des Klotzes nicht ändert, nur dessen kinetische Energie.

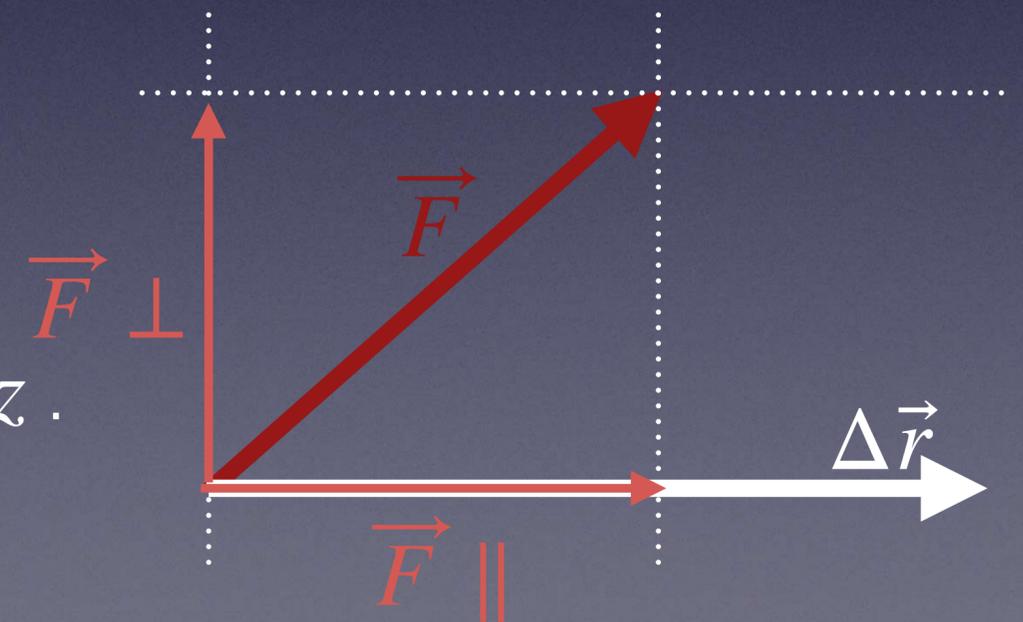


Da die Menge der aufgewendeten **Energie**  $\Delta E$  sowohl der Größe der ausgeübten **Kraft**  $\vec{F}$  als auch der **Entfernung**  $\Delta \vec{r}$ , über die ein Objekt bewegt wird, proportional zu sein scheint, definieren wir die Menge der zwischen dir und dem Objekt übertragenen **Energie** vorläufig als das (Skalar-) **Produkt aus Kraft  $\times$  Weg**,  $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ . **Diese Art der mechanischen Energieübertragung aus der Umgebung in das System wird als „Arbeit“ bezeichnet.** Wir verwenden hier das Wort „Arbeit“ als physikalischen Fachbegriff. Diese technische Bedeutung ist nur lose mit der alltäglichen Verwendung des Wortes verbunden.

Bei der Berechnung der **Arbeit**  $W$  sind wir an der Wirkung der **Kraftkomponente** interessiert, die **parallel zur Verschiebung** des Systems verläuft. Das klingt vertraut - wir haben in Kapitel 5 gesehen, dass es sinnvoll ist, eine einwirkende Kraft in zwei Teile zu unterteilen: die Komponente  $\vec{F}_{\parallel}$  einer Kraft parallel zum Impuls eines Systems, welche die Größe des Impulses (und damit die Geschwindigkeit) ändern kann, und die senkrechte Komponente  $\vec{F}_{\perp}$  der Kraft, welche die Richtung des Impulses, nicht aber dessen Betrag ändern kann. Bei der Berechnung von Arbeit zeigt sich ein ähnliches Muster: **Der Teil einer Kraft, der parallel zur Verschiebung ist, verrichtet Arbeit am System, aber der senkrechte Teil der Kraft ändert die Energie des Systems nicht:**

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \equiv |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\angle(\vec{F}, \Delta\vec{r}), \text{ oder}$$

$$W = \langle F_x, F_y, F_z \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$



# Kontrollpunkt 3

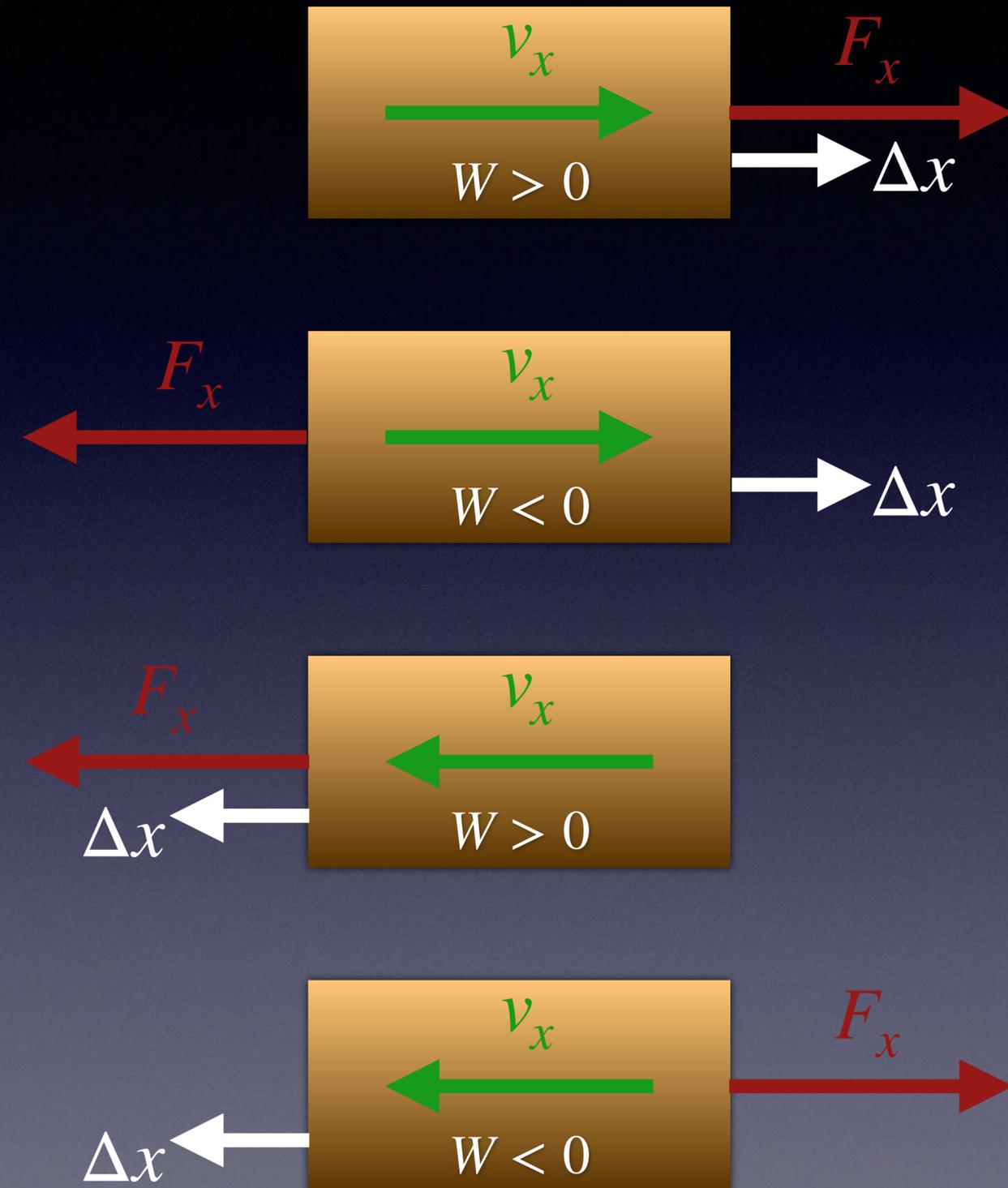
1. Ein Papierflugzeug fliegt von Position  $\vec{r}_i = \langle 6, 10, -3 \rangle$  m auf geradem Wege zu Position  $\vec{r}_f = \langle -12, 2, -8 \rangle$  m. Die Nettokraft, die während dieses Fluges durch die Erde und die Luft auf das Flugzeug wirkt, ist mit  $\vec{F} = \langle -0.03, -0.04, -0.09 \rangle$  N nahezu konstant. Wie hoch ist die gesamte Arbeit, die von der Erde und der Luft auf das Papierflugzeug ausgeübt wird?

Das Prinzip Energie besagt, dass die Energieänderung eines Systems (in diesem Fall eines einzelnen Teilchens) gleich der Energiezufuhr durch die von der Umgebung geleistete Arbeit ist:

$$\Delta E_{\text{sys}} = W_{\text{umg}} .$$

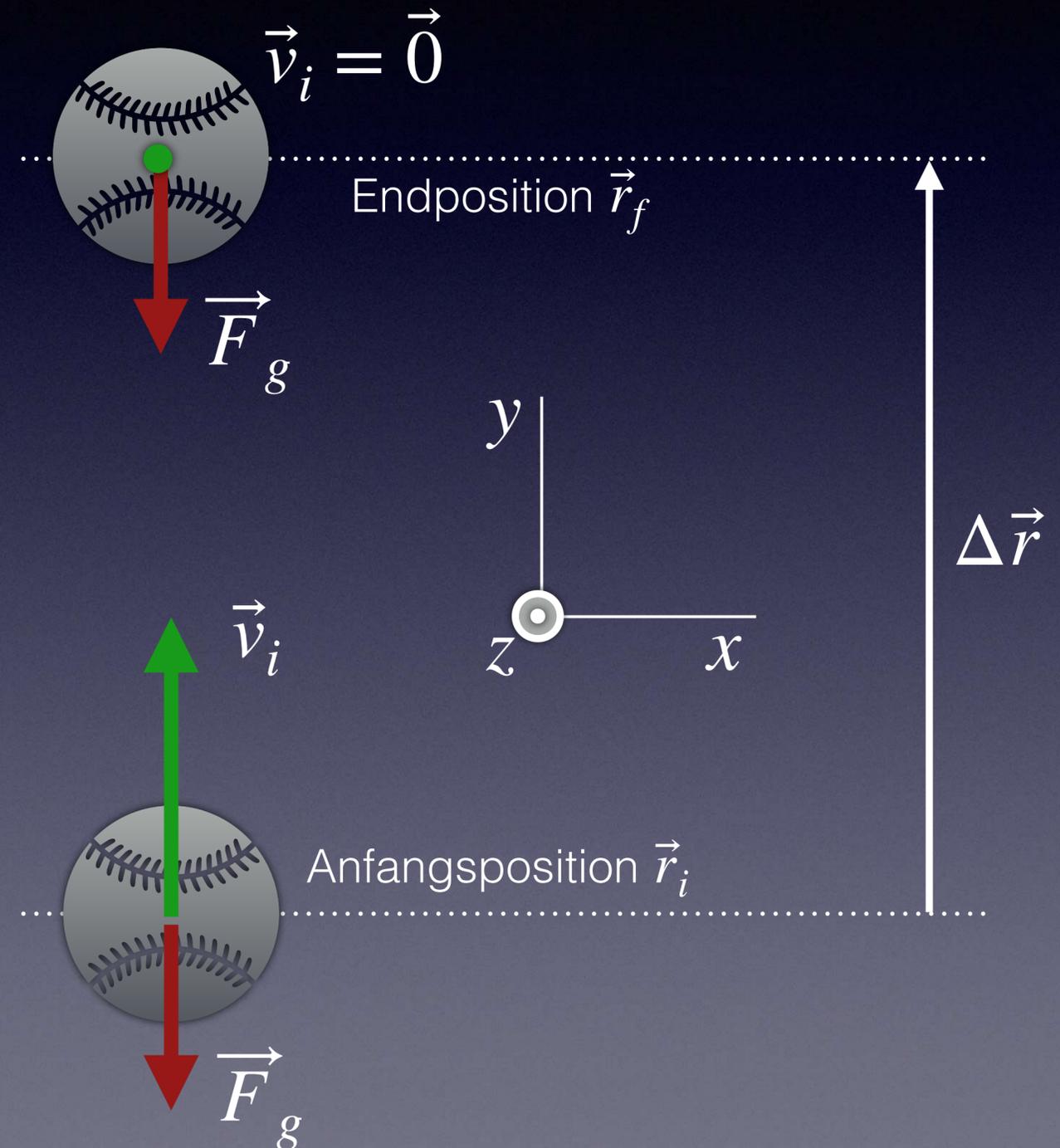
Da die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  eines Teilchens zu- oder abnehmen kann, muss die von der Umgebung geleistete Arbeit entweder positiv, null oder negativ sein.

Rechts sehen wir verschiedene Möglichkeiten für ein ein-dimensionales Beispiel.



# Kontrollpunkt 4

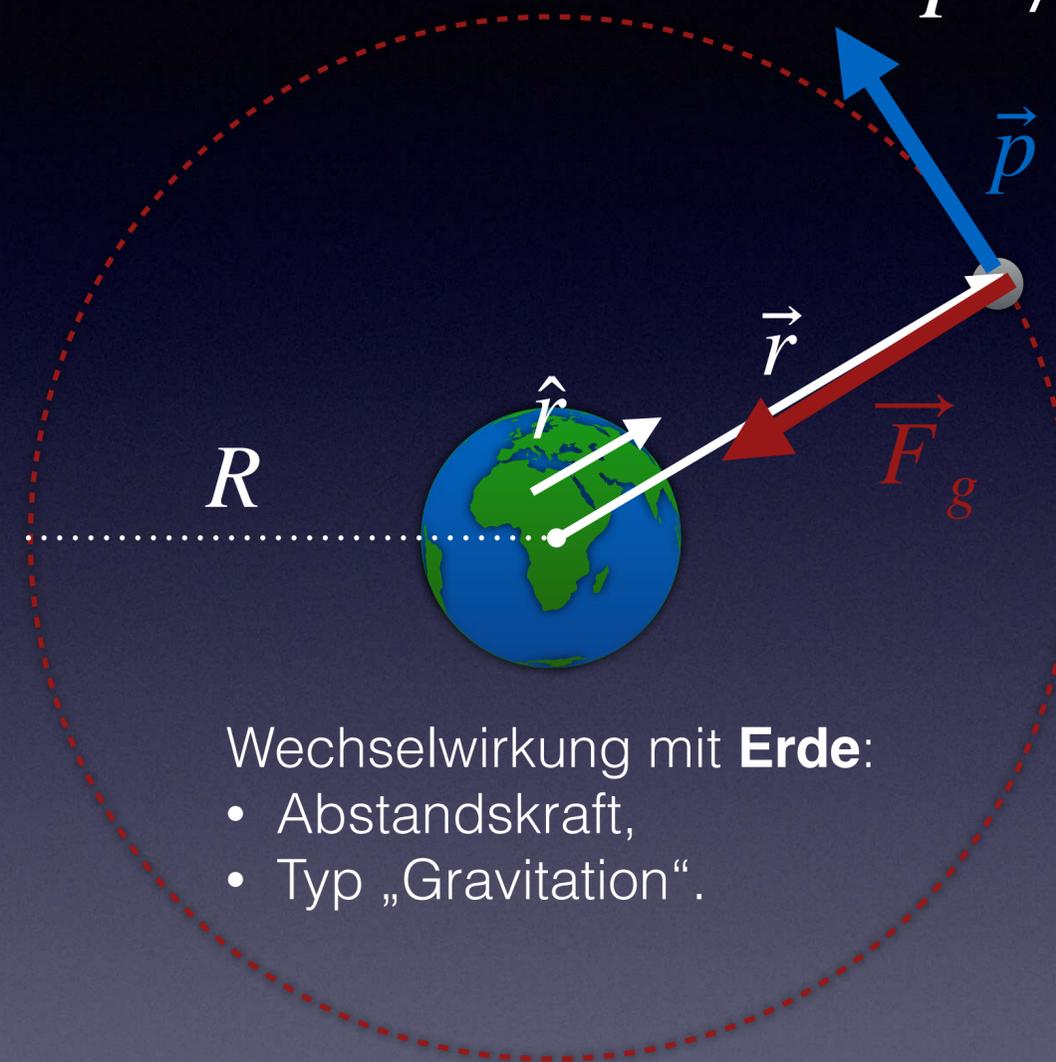
1. Du wirfst einen Ball ( $m = 250 \text{ g}$ ) senkrecht nach oben, und er steigt in die Luft. (1) Ist die Arbeit  $W$ , die am Ball verrichtet wird, positiv oder negativ, wenn man den Luftwiderstand außer Acht lässt? (2) Wie viel Arbeit wird durch die Gravitationskraft verrichtet?



Ein interessanter Fall von „Nullarbeit“ ( $W = 0$ ) ist eine **Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit**, wie z. B. der Umlauf eines Satelliten, der die Erde auf einer kreisförmigen Bahn unter dem Einfluss der **Erdanziehungskraft** umkreist, die immer **senkrecht zur Bewegung** wirkt, wenn die Bahn ein Kreis ist. Die Geschwindigkeit und die kinetische Energie des Satelliten ändert sich nicht. Daher sollte die verrichtete Arbeit gleich Null sein. Das ist plausibel, weil die Kraft immer senkrecht zur Richtung der Bewegung steht. Wieder sehen wir wichtige **Unterschiede zwischen Energie und Impuls** sowie zwischen **Arbeit und Kraftstoß**. Die Energie des Satelliten ändert sich nicht, da sie von der Größe der Geschwindigkeit abhängt, aber der Impuls des Satelliten ändert sich kontinuierlich, da er von der Richtung der Geschwindigkeit abhängt.

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta \vec{p} \neq \vec{0}$$



Satellit auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde. Hinweis: Vektoren zur Verdeutlichung teilweise leicht versetzt eingezeichnet.

Typische Situationen und das Vorzeichen der Arbeit  $W$ :

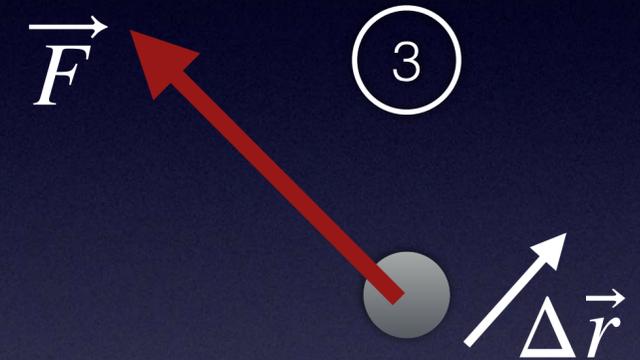
1. Eine Kraft **in Richtung der Bewegung** verrichtet positive Arbeit.
2. Eine Kraft **entgegen der Bewegungsrichtung** verrichtet negative Arbeit.
3. Eine Kraft, die **senkrecht zur Bewegungsrichtung** wirkt, verrichtet keine Arbeit.
4. Eine Kraft, die **keine Bewegung** des Objekts bewirkt, verrichtet keine Arbeit.

Kraft in Richtung der Bewegung:  $W > 0$ .



Kraft senkrecht zur Richtung der Bewegung:  $W = 0$ .

Kraft in Gegen-Richtung der Bewegung:  $W < 0$ .



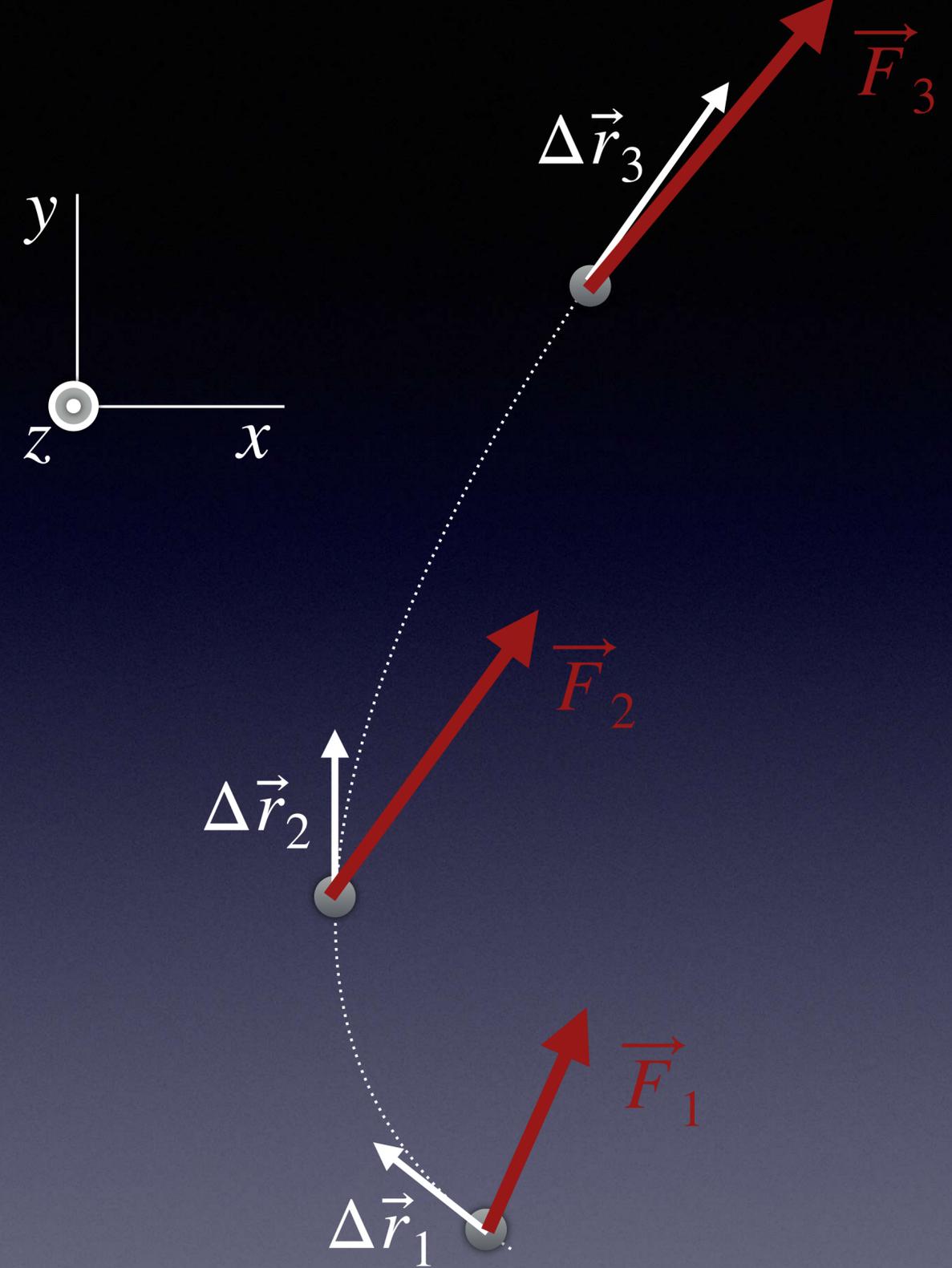
Kraft ohne Bewegung:  $W = 0$ .



# Kontrollpunkt 5

1. Gib in jedem der folgenden Fälle an, ob die von der angegebenen Kraft verrichtete Arbeit positiv, negativ oder null ist. Gib zusätzlich an, ob die kinetische Energie des betreffenden Objekts zunimmt, abnimmt oder gleich bleibt. (1) Eine Kugel bewegt sich senkrecht aufwärts, auf die eine abwärts gerichtete Gravitationskraft einwirkt. (2) Eine Kugel fällt nach unten, auf die eine nach unten gerichtete Gravitationskraft einwirkt. (3) Ein Ball bewegt sich schräg aufwärts, auf den eine abwärts gerichtete Gravitationskraft einwirkt. (4) Ein Eishockey-Puck, auf den eine nach unten gerichtete Gravitationskraft einwirkt, bewegt sich horizontal über eine praktisch reibungsfreie Eisfläche. (5) In einem Zeitraum von sechs Monaten bewegt sich die Erde, unter dem Einfluss der Gravitationskraft der Sonne, auf der Hälfte ihrer nahezu kreisförmigen Umlaufbahn.

Wenn sich eine Kraft  $\vec{F}$  während eines Prozesses in Größe oder Richtung ändert, können wir die Arbeit nicht einfach durch Multiplikation einer konstanten Kraft mit der Nettoverschiebung berechnen. Die nicht konstante Kraft wirkt auf das Objekt entlang eines Weges, und wir teilen den Weg in kleine Schritte  $\Delta\vec{r}_i$  (siehe nebenstehende Abbildung). Dies ist vergleichbar mit der Art und Weise, in der wir bei der Berechnung der Bahnen von Objekten kleine Zeitschritte  $\Delta t$  gemacht haben.



Auf ein Objekt, das sich entlang einer gekrümmten Bahn bewegt, wird eine wechselnde Kraft ausgeübt.  
Prinzipdarstellung.

Wenn unsere Schritte entlang des Weges klein genug sind, ist die Kraft innerhalb eines Schrittes annähernd konstant in Größe und Richtung. Wir können dann die gesamte geleistete Arbeit als eine Summe entlang des Weges schreiben:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r}_3 + \dots = \sum_i \left( \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \right) .$$

Falls die Schritte  $\Delta\vec{r}_i$  unendlich klein werden, können wir schreiben:

$$W = \lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \sum_i \left( \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \right) = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \left( \vec{F} \cdot \vec{v} \right) dt .$$

# Kontrollpunkt 6

1. Eine Kugel, die sich ausschließlich horizontal bewegt, trifft auf eine (entspannte) horizontale Feder, deren Steifigkeit  $k_s = 100 \text{ N/m}$  ist. Beim Zusammendrücken der Feder verlangsamt sich die Kugel, bis ihre Länge  $20 \text{ cm}$  kürzer als ihre entspannte Länge ist. (1) Wie viel Arbeit  $W$  verrichtet die Feder dann an der Kugel? (2) Entspricht das Vorzeichen von  $W$  deinen Erwartungen?

# Arbeit und Energie

Das Prinzip Energie beinhaltet eine Differenz  $\Delta E_{\text{sys}}$  zwischen der Energie  $E_{\text{sys},f}$  eines Systems in seinem Endzustand und der Energie  $E_{\text{sys},i}$  in seinem Anfangszustand. Wir bezeichnen dies als die „Differenzform“ des Energieprinzips:

$$\Delta E_{\text{sys}} = E_{\text{sys},f} - E_{\text{sys},i} = W_{\text{umg}} + \text{andere Prozesse} .$$

Äquivalent dazu ist die „Update-Form“:

$$E_{\text{sys},f} = E_{\text{sys},i} + W_{\text{umg}} + \text{andere Prozesse} .$$

Wir erkennen darin die schon im Kapitel „Prinzip Impuls“ behandelten Formen wieder.

# Kontrollpunkt 7

1. Du befindest dich außerhalb eines Raumschiffs und bewegst ein schweres Objekt mit der Masse  $m = 2000 \text{ kg}$ . Dabei übst du eine Kraft  $\vec{F} = \langle 300, 500, 0 \rangle \text{ N}$  aus, während sich das Objekt um  $\Delta\vec{r} = \langle 0.1, -0.3, 0, 2 \rangle \text{ m}$  bewegt. Ursprünglich hatte das Objekt die Geschwindigkeit  $\vec{v}_i = |0.7| \text{ m/s}$ . (1) Wie viel Arbeit verrichtest du? (2) Wie groß ist die kinetische Energie des Objekts am Ende der Verschiebung? (3) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Objekts? (4) In welche Richtung zeigt die Endgeschwindigkeit des Objekts? Hinweis: Andere Kräfte sind zu vernachlässigen.

Das Prinzip Energie bei hoher Geschwindigkeit: Auf ein Elektron (Masse  $m$ ) in einem

Teilchenbeschleuniger wirkt eine konstante elektrische Kraft  $\vec{F}$  (Diese Kraft ist viel größer als die Schwerkraft, so dass wir die Wirkung der Erde auf das Elektron vernachlässigen können).

Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ist  $v \equiv |\vec{v}_i| = k_i c$ , wobei  $c$  wie üblich die Lichtgeschwindigkeit ist. Das Elektron durchläuft einen Weg von  $\Delta\vec{r}$ . Wie groß ist seine Endgeschwindigkeit?

Wir sehen:  $0 \leq v_f < c$ .

$$E_f = E_i + W, \text{ mit } W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\gamma_f mc^2 = \gamma_i mc^2 + W$$

$$\gamma_f = \frac{\gamma_i mc^2 + W}{mc^2} \text{ und } \gamma_f = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_f}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2$$

$$v_f = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma_f}\right)^2}$$

# Kontrollpunkt 8

1. Ein Elektron mit Masse  $m = 9 \times 10^{-31}$  kg bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v = 0.9997c$ . (1) Wie groß ist die Teilchenenergie  $E$  als Vielfaches der Ruheenergie  $E_0 = mc^2$ ? (2) Wie groß ist die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  als Vielfaches von  $E_0$ ? (3) Ist die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  groß oder klein im Vergleich zur Ruheenergie  $E_0$ ? (4) Ist die kinetische Energie bei niedrigen Geschwindigkeiten, z.B.  $|\vec{v}| = 120 \text{ km/h}$  groß oder klein im Vergleich zur Ruheenergie?

# Änderung der Ruheenergie

Wie wir in den vorangegangenen Beispielen gesehen haben, enthalten sowohl die Anfangs- als auch die Endenergie des Systems Terme der Ruheenergie, die sich in der Energiegleichung aufheben, wenn ein **Teilchen** seine **Identität** nicht ändert:

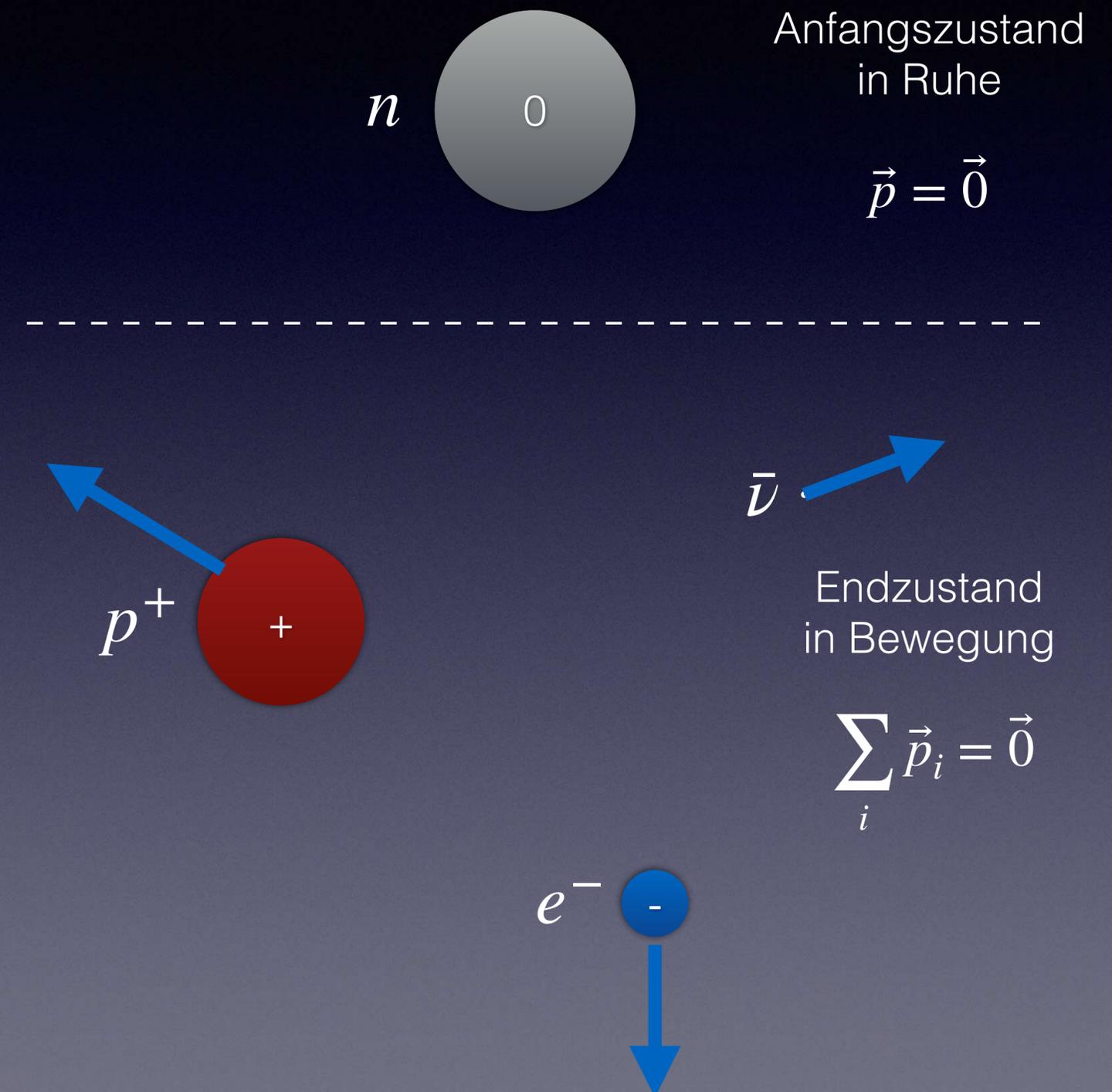
$$\cancel{E_{0,f}} + E_{\text{kin},f} = \cancel{E_{0,i}} + E_{\text{kin},i} + W .$$

Identische Ruhe-Energien

Dies ist ein wichtiger und häufiger Spezialfall, aber nicht der einzige. Bei manchen Prozessen kann sich die Masse eines Teilchens ändern, weil sich die Identität des Teilchens ändert, zum Beispiel beim Zerfall eines Neutrons in eine Proton, ein Elektron und ein Antineutrino.

Der Neutronenzerfall ist ein gutes Beispiel, um die Problematik zu veranschaulichen. Ein freies Neutron (das nicht an einen Kern gebunden ist) ist instabil und hat eine durchschnittliche Lebensdauer von etwa **15 min**. Wie nebenstehend dargestellt, zerfällt es in ein Proton, ein Elektron und ein nahezu masseloses Antineutrino, das sich fast mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt. Alle drei entstehenden Teilchen haben kinetische Energie. Das heißt, sie haben Energie, die über ihre Ruheenergie hinausgeht. Dabei ist die Energie des Antineutrinos fast ausschließlich kinetisch, da es kaum Ruheenergie hat. Dies ist eine Situation, in der sich die Identität der Teilchen und die Ruheenergie der Teilchen ändern.

Ein stationäres Neutron ( $n$ ) zerfällt in ein Proton ( $p^+$ ), ein Elektron ( $e^-$ ) und ein Antineutrino ( $\bar{\nu}$ ). Dies ist ein Beispiel für einen Prozess, bei dem es zu einem Identitätswechsel und damit zu einer Änderung der Ruheenergie kommt.



Die Masse eines Neutrons ist  $1.6749 \times 10^{-27}$  kg, so dass seine Ruheenergie  $E_0 = mc^2$  etwa  $1.51 \times 10^{-10}$  J ist. Da die Ruheenergie eines einzelnen Teilchens eine so kleine Zahl ist, wird sie gewöhnlich in der Einheit von einer **Million Elektronenvolt**, abgekürzt **MeV**, angegeben. Ein Elektronenvolt ist die Energiemenge, die ein Elektron erhält, wenn es sich durch eine elektrische Potentialdifferenz von einem Volt bewegt. (Die elektrische Potentialdifferenz wird in einem späteren Kapitel behandelt; eine gewöhnliche Taschenlampenbatterie hat eine elektrische Potentialdifferenz von 1.5 V.):

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} .$$

Die Ruheenergie eines Neutrons beträgt **939.6 MeV**, und die Ruheenergie eines Protons ist mit **938.3 MeV** etwas geringer als die eines Neutrons. Ein Elektron hat eine viel kleinere Masse; seine Ruheenergie beträgt **0.511 MeV**.

Neutronenzerfall: Wie viel kinetische Energie (in MeV) teilen sich die Zerfallsprodukte (Proton, Elektron und Antineutrino) beim Zerfall eines ruhenden, freien Neutrons? Und weshalb kann ein Proton nicht in ein Neutron zerfallen? (Keine weiteren Wechselwirkungen und masseloses Antineutrino)

$$E_f = E_i + W$$

$$\left(m_p c^2 + E_{\text{kin},p}\right) + \left(m_e c^2 + E_{\text{kin},e}\right) + E_{\text{kin},\bar{\nu}} = \left(m_n c^2 + \cancel{E_{\text{kin},n}}\right) + \cancel{W}$$

Terme identisch null

$$E_{\text{kin},p} + E_{\text{kin},e} + E_{\text{kin},\bar{\nu}} = \left(m_n - m_p - m_e\right) c^2$$

Die kinetische Energie der neu entstehenden Teilchen resultiert aus dem Massendefizit und beträgt ca. **0.8 MeV**.

Das Neutron erfährt einen Identitätswechsel, d. h. es kommt zu einer Änderung der Ruheenergie, und die Terme  $mc^2$  heben sich nicht auf. **Da die Summe der Ruheenergien der drei Zerfallsteilchen geringer ist als die Ruheenergie des Ausgangsneutrons, bleibt Energie übrig, die sich als kinetische Energie zeigt,** welche auf die drei Zerfallsteilchen verteilt wird. Die Aufteilung dieser kinetischen Energie auf die drei Teilchen ist von Neutronenzerfall zu Neutronenzerfall unterschiedlich und hängt von Wahrscheinlichkeiten ab, die mit Hilfe der Quantenmechanik und den Eigenschaften der „schwachen Wechselwirkung“, die für den Neutronenzerfall verantwortlich ist, berechnet werden können.

Ein Proton kann (unter „normalen“ Umständen) deshalb nicht in ein Neutron zerfallen, weil die Ruheenergie des Neutrons größer als die des Protons ist. Bei einem solchen Zerfall würde sich die kinetische Energie der Zerfallsprodukte als negativ herausstellen, was unmöglich ist. Die kinetische Energie ist immer positiv.

Bei einer chemischen Reaktion, wie der Verbindung von Kohlenstoff mit Sauerstoff im Feuer eines Kohlekraftwerks, liegt die resultierende kinetische Energie (die für die Erhitzung von Wasser zu Dampf verantwortlich ist) in der Größenordnung von  $1 \text{ eV}$  je umgesetzten Molekül. Bei Kernreaktionen wird weitaus mehr kinetische Energie erzeugt, im Falle des Neutronenzerfalls fast eine Million Mal mehr pro Kern, also ca.  $1 \text{ MeV}$ . Dieser Unterschied machte - und macht immer noch - den Einsatz von Kernkraftwerken zur Stromerzeugung attraktiv.

Die Anwendung des Energieprinzips ist im Grunde eine intelligente Art des „*Plug and Chug*“-Verfahrens:

- Gib das System und seine Umgebung an.
- Bestimme den Anfangs- und Endzustand.
- Schreibe das Prinzip Energie für dieses System im Detail auf.
- Benutze die gegebenen Informationen, um alle schon berechenbaren Terme auszuwerten.
- Versuche, nach der noch unbekanntem Größe aufzulösen.
- Überprüfe, ob alle Vorzeichen und Werte physikalisch sinnvoll sind.

„*Plug and Chug*“ ist in der ursprünglichen Bedeutung eine (formelbasierte) Technik, bei der Werte eingegeben werden, um eine numerische Antwort zu erhalten, ohne dass irgendwelche Problemlösungsfähigkeiten erforderlich wären.

Unsere zentrale Idee besteht also darin, sich mit Hilfe des Prinzips Energie sagen zu lassen, was man berechnen soll, um dann loszulegen.

Oft haben Schüler und Studenten den Eindruck, dass Physik darin besteht, „zu wissen, welche Formel man für eine bestimmte Art von Problem verwenden muss“, wobei für jedes Problem eine andere Formel gilt. Aber es geht uns hier darum zu vermitteln, dass es ein logisches Verfahren gibt, welches in möglichst allen Fällen funktioniert und das alleine auf dem grundlegenden Prinzip Energie beruht.

Wenn du diesem Prinzip folgst, musst du zwar immer noch denken, aber dein Denken wird durch das Prinzip selbst organisiert. Der grundlegende Rahmen ändert sich also nie.

# Beweis des Prinzips Energie für ein einzelnes Teilchen

Wir haben behauptet, dass Folgendes für ein Punkt-Teilchen gilt:

$$\Delta E_{\text{sys}} = W_{\text{umg}} .$$

Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass diese Aussage für unsere Definitionen von Teilchenenergie und Arbeit wahr ist. Vereinfachend wählen wir das Koordinatensystem so, dass die x-Achse in Richtung  $\Delta \vec{r}$  weist:

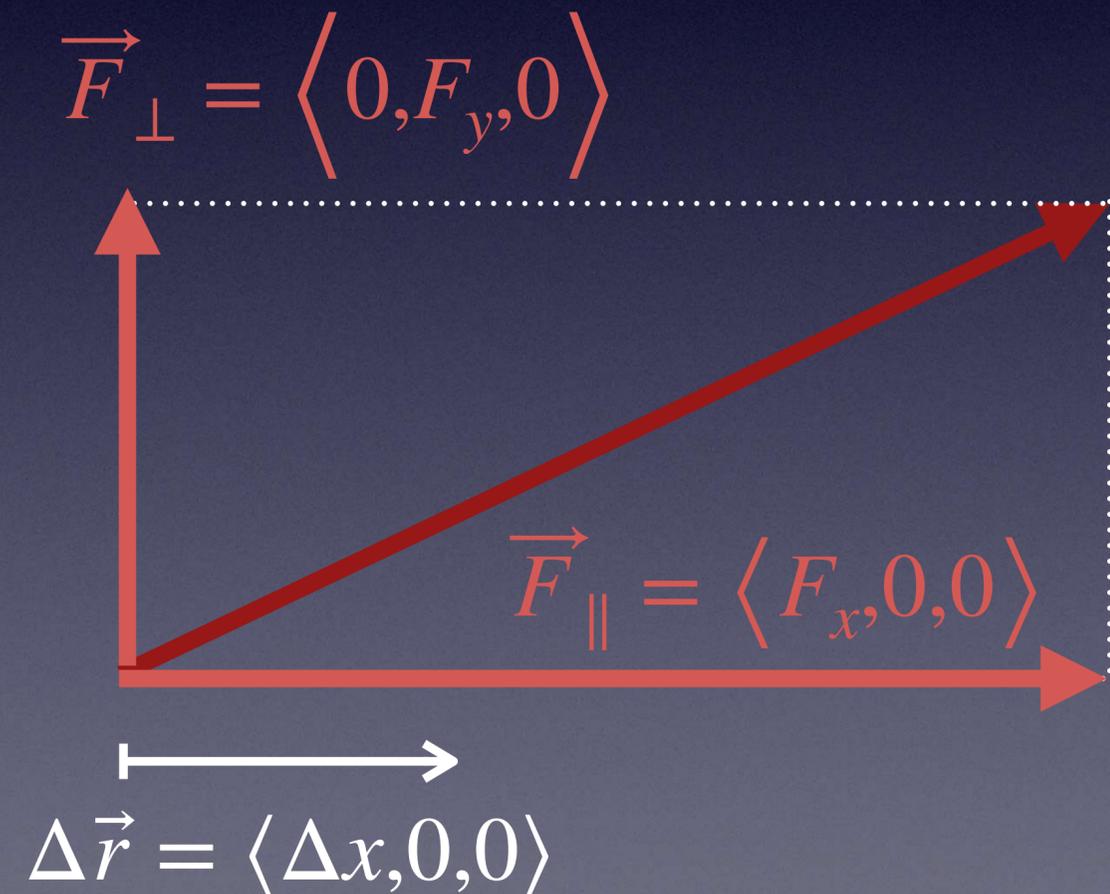
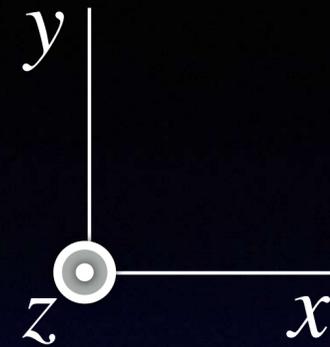
$$\Delta E_{\text{sys}} = F_x \Delta x .$$

Mit dem Prinzip Impuls folgt:

$$\Delta E_{\text{sys}} = (\Delta p_x / \Delta t) \Delta x .$$

Division mit  $\Delta x$  ergibt:

$$\frac{\Delta E_{\text{sys}}}{\Delta x} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dE_{\text{sys}}}{dx} = \frac{dp_x}{dt} .$$



## Die Gleichung

$$\frac{dE_{\text{sys}}}{dx} = \frac{dp_x}{dt}$$

besagt, dass die Energieänderung des Teilchens pro Wegeinheit (in Richtung der Bewegung) gleich der Änderung des Impulses des Teilchens in dieser Richtung pro Zeiteinheit ist. Diese Gleichung spiegelt die Tatsache wider, dass eine Änderung der Position mit einer Änderung der Energie verbunden ist, während eine Änderung über einen Zeitraum mit einer Änderung des Impulses verbunden ist. Wenn wir zeigen können, dass diese Gleichung für  $E = \gamma mc^2$  wahr ist, dann haben wir bewiesen, dass unsere Annahme,  $\Delta E_{\text{sys}} = W_{\text{umg}}$ , korrekt ist.

Beweis für kleine Geschwindigkeiten  $|\vec{v}| \ll c$  (Bewegung in  $x$ -Richtung):

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv_x^2, \text{ und somit}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}mv_x^2 \right) = mv_x \frac{dv_x}{dx} = m \frac{dx}{dt} \frac{dv_x}{dx} = m \frac{dv_x}{dt}. \text{ Ferner}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} (mv_x) = m \frac{dv_x}{dt}.$$

Somit stimmen linke und rechte Seite der Ausgangs-Gleichung überein.

Beweis für beliebige Geschwindigkeiten (Bewegung in  $x$ -Richtung):

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left( mc^2 \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-1/2} \right), \text{ ergibt}$$

$$\frac{dE}{dx} = mc^2 \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{2v_x}{c^2} \right) \frac{dv_x}{dx}, \text{ und somit}$$

$$\frac{dE}{dx} = mv_x \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{dv_x}{dx}.$$

Beweis für beliebige Geschwindigkeiten (Bewegung in  $x$ -Richtung):

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( mv_x \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-1/2} \right), \text{ ergibt}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \left( m \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-1/2} + mv_x \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{2v_x}{c^2} \right) \right) \frac{dv_x}{dt},$$

und somit

$$\frac{dp_x}{dt} = m \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \left( \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) + \frac{v_x^2}{c^2} \right) \frac{dv_x}{dt} = m \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{dv_x}{dt}.$$

Dies ist fast die gleiche Form wie die Ableitung  $dE/dx$ . Weiter können wir schreiben:

$$\frac{dv_x}{dt} \equiv \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{dv_x}{dx} v_x, \text{ und damit folgt für } \frac{dp_x}{dt} :$$

$$\frac{dp_x}{dt} = mv_x \left( 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{dv_x}{dx} .$$

Der relativistische Ausdruck für die Energie folgt also aus dem relativistischen Ausdruck für den Impuls. Diese Art der Lösung einer „Differentialgleichung“ (eine Gleichung, die Ableitungen enthält), indem man eine Lösung vorschlägt und zeigt, dass sie die Gleichung erfüllt, ist eine legitime Technik zur Lösung von Differentialgleichungen und wird in der Tat recht häufig verwendet.

# Potenzielle Energie in Systemen mit mehreren Teilchen

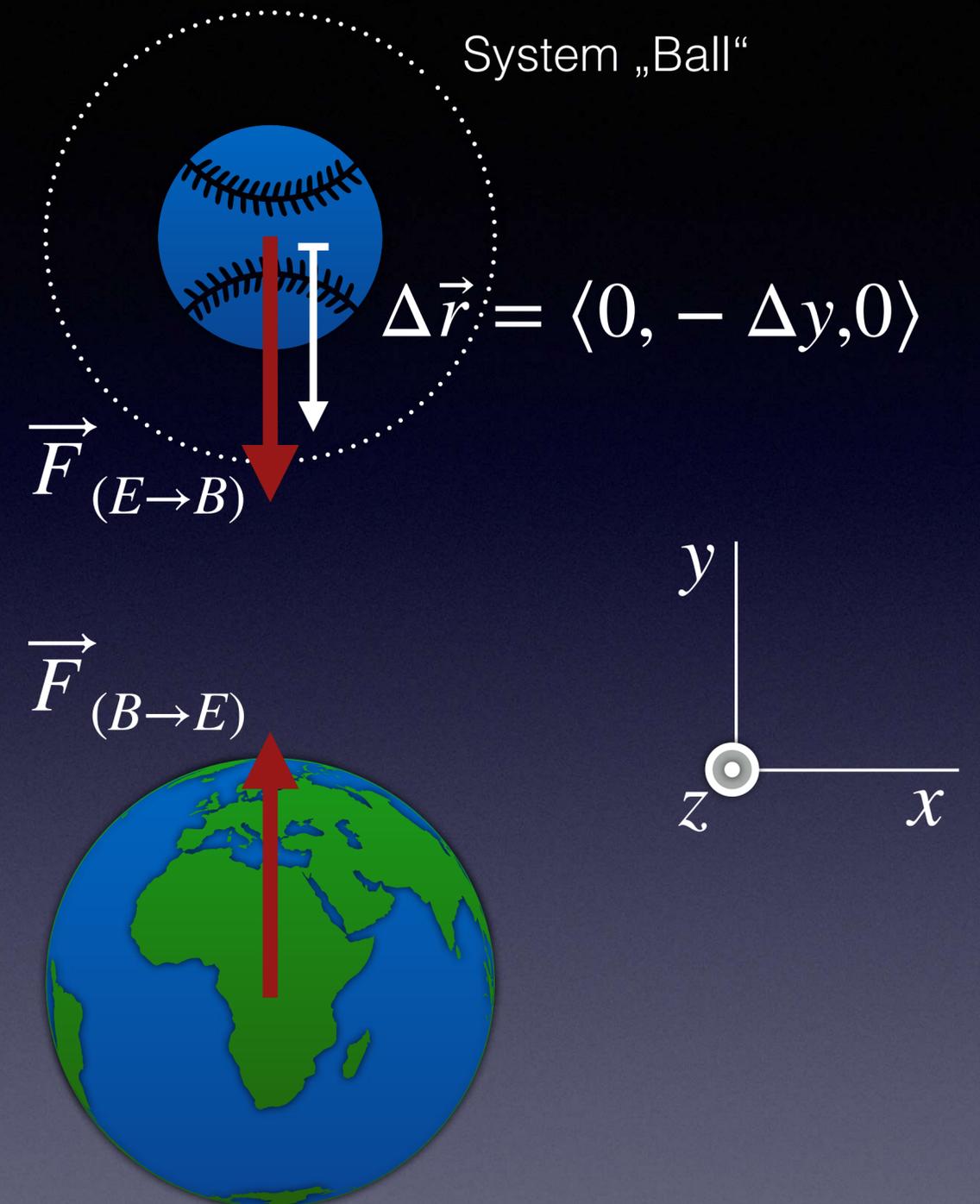
Bis zu diesem Punkt haben wir uns bei unseren Diskussionen über Energie auf Systeme beschränkt, die aus einem einzigen Teilchen bestehen (oder auf Systeme, die wir als gleichwertig mit einem Punktteilchen betrachten konnten, weil es keine internen Prozesse gab). Wir haben jedoch im Fall des Impulses gesehen, dass es oft vorteilhaft ist, ein **System** zu wählen, **das zwei oder mehr Objekte enthält**. Wir werden uns die Auswirkungen der Wahl des Systems auf die Analyse der Energieflüsse in einer einfachen Situation ansehen: ein Ball fällt aus der Ruhe auf die Erde zu.

Wenn das **System alleine aus dem Ball besteht**, ist die Erde Teil der Umgebung (siehe nebenstehende Abbildung). Die kinetische Energie des Systems (Ball) nimmt zu, da die Erde positive Arbeit auf das System ausübt. Die Gravitationskraft wirkt in dieselbe Richtung wie die Verschiebung des Balls, so dass die von der Erde auf den Ball ausgeübte Arbeit positiv ist.

$$\Delta E_B = W_{E \rightarrow B}$$

$$\Delta (m_B c^2 + E_{\text{kin},B}) \approx mg \Delta y$$

$$\Delta E_{\text{kin},B} \approx mg \Delta y, \text{ für } |\vec{v}| \ll c.$$



$$\vec{F}_{(E \rightarrow B)} \approx \langle 0, -mg, 0 \rangle$$

$$\vec{F}_{(E \rightarrow B)} = -\vec{F}_{(B \rightarrow E)}$$

Was ändert sich, **falls das System aus Ball und Erde aufgebaut ist**. Wir wissen, dass die kinetische Energie des Balls zunimmt und dass die kinetische Energie der Erde ebenfalls ein wenig zunimmt, während sie zum Ball hingezogen wird. Aber die Umgebung leistet keine Arbeit an dem System!

$$\Delta E_{\text{sys}} = W_{\text{umg}} = 0.$$

Aber:

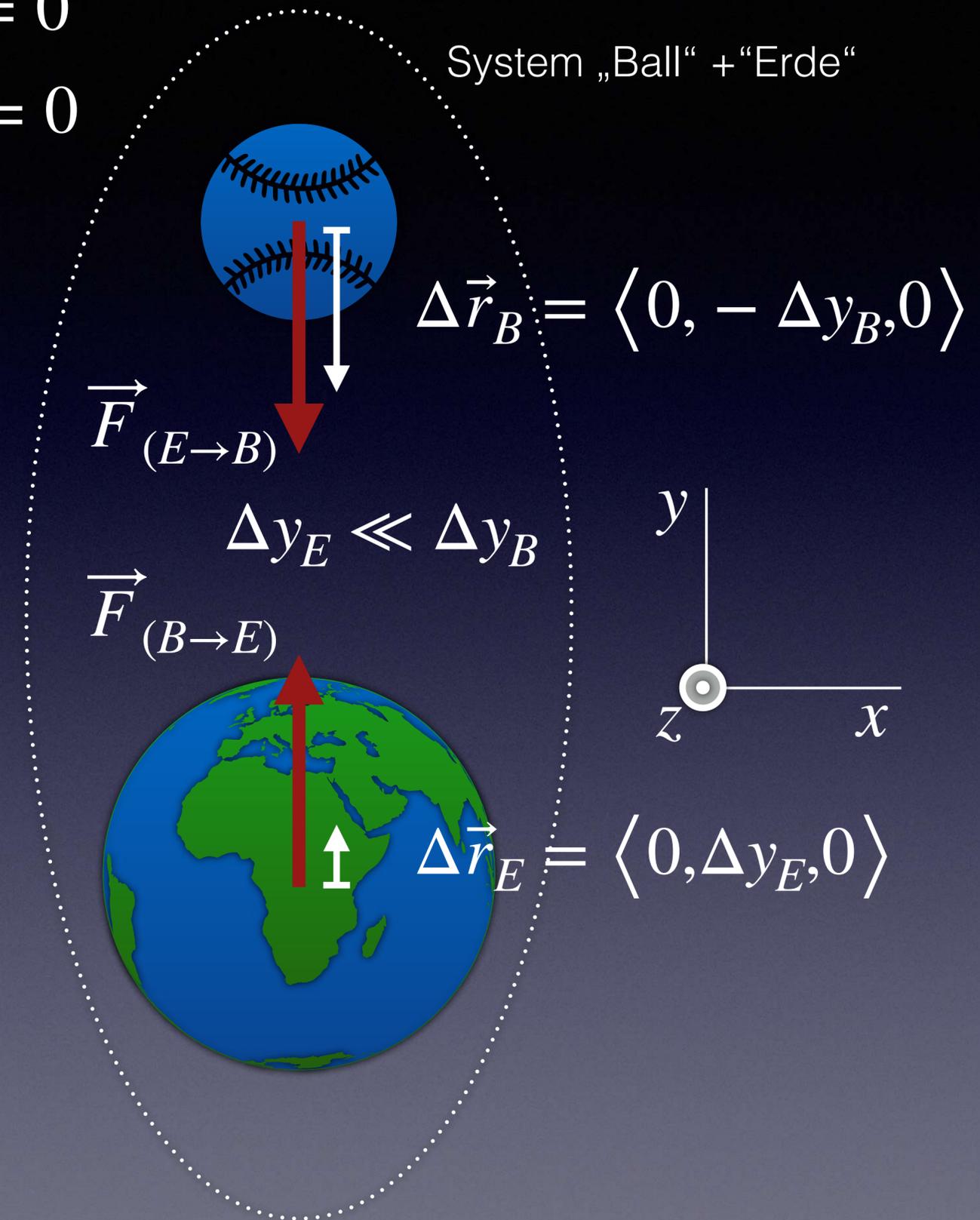
$$\Delta (m_B c^2 + E_{\text{kin},B} + m_E c^2 + E_{\text{kin},E}) \neq 0$$

$$\Delta (E_{\text{kin},B} + E_{\text{kin},E}) \neq 0$$

**Die Änderung der kinetischen Energie des Systems ist nicht gleich der von der Umgebung geleisteten Arbeit!**

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$$

$$W_{\text{umg}} = 0$$



Bevor wir zu dem Schluss kommen, dass das Prinzip Energie verletzt wurde, sollten wir die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass wir eine Art von Energie übersehen haben, die in Systemen mit mehr als einem wechselwirkenden Objekt vorhanden ist. Und dies ist in der Tat der Fall!

**In jedem System, das zwei oder mehr wechselwirkende Objekte enthält**, wie z. B. gestauchte oder gedehnte Federn, aus vielen Sternen aufgebaute Galaxien, die durch die Schwerkraft wechselwirken, oder Atome, in denen die Protonen und Elektronen elektrisch wechselwirken, **gibt es eine Energie, die mit den Wechselwirkungen zwischen Teilchenpaaren innerhalb des Systems verbunden ist**. Diese Wechselwirkungsenergie ist nicht dasselbe wie die Ruheenergie oder die kinetische Energie der einzelnen Teilchen. Wir nennen diese paarweise Wechselwirkungsenergie „**potenzielle Energie**“. Traditionell wird die potenzielle Energie durch das Symbol  $U$  dargestellt.

Da unser System („Ball“ + „Erde“) zwei interagierende Objekte enthält, ist seine Energie tatsächlich diese:

$$E_{\text{sys}} = (m_B c^2 + E_{\text{kin},B}) + (m_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + U_{B \leftrightarrow E} .$$

**Eine Änderung der potenziellen Energie ist mit einer Änderung des Abstands zwischen den interagierenden Objekten verbunden.**

Wir können uns die Änderung des Abstands als Änderung der „**Konfiguration**“ des **Mehrteilchensystems** vorstellen, z. B. wenn sich der Ball und die Erde näher zueinander bewegen, eine Feder sich dehnt oder zusammenzieht oder ein Elektron sich von einem Proton entfernt.

In unserem Fall nimmt die kinetische Energie des Systems zu, wenn sich der Ball und die Erde einander nähern, aber bei diesem Vorgang nimmt die potenzielle Energie (Wechselwirkungsenergie) ab. Die Nettoänderung der Energie des Systems ist dann Null, was mit der Tatsache übereinstimmt, dass keine Arbeit von der Umgebung auf das System ausgeübt wurde:

$$\Delta E_{\text{sys}} = \Delta \left[ (m_B c^2 + E_{\text{kin},B}) + (m_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + U_{B \leftrightarrow E} \right] = 0 .$$

Aber wie berechnen wir die potenzielle Energie sowie ihre Änderung?

Wenn wir das System „Ball“ plus „Erde“ betrachten, wird die Kraft  $\vec{F}_{(E \rightarrow B)}$ , die auf den Ball wirkt, von einem anderen Objekt (hier „Erde“) innerhalb des Systems ausgeübt. Wir nennen eine solche Kraft eine „**innere Kraft**“, die „**innere Arbeit**“  $W_{\text{int}}$  verrichtet. Eine einfache Umstellung des Energieprinzips für das System „Ball“ allein führt zu einer nützlichen Methode, um die Energie im aus beiden Objekten bestehenden System zu berücksichtigen:

$$\Delta E_B = W_{E \rightarrow B} \rightarrow \Delta E_B - W_{(E \rightarrow B)} = 0 .$$

Für ein System mit mehr als einem Objekt definieren wir die Änderung der potentiellen Energie  $\Delta U_{E \leftrightarrow B}$  als den negativen Wert von  $W_{\text{int}}$ . Für unser aus zwei Objekten aufgebautes System erhalten wir:

$$\Delta U_{E \leftrightarrow B} \equiv - W_{(E \rightarrow B)} - W_{(B \rightarrow E)} \rightarrow \Delta E_E + \Delta E_B + \Delta U_{E \leftrightarrow B} = 0 .$$

Das Prinzip Energie ist für ein Mehrteilchensystem im Grunde dasselbe wie für ein Einteilchensystem. Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehen Größen, die dem System innewohnen, während auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die externen Wechselwirkungen auf das System aufgrund von Objekten in der Umgebung stehen:

$$\Delta E_{\text{sys}} = W_{\text{umg}} \cdot$$

Der Unterschied liegt in den Arten von Energie, die in jedem System zu finden sind:

- **Ein Ein-Teilchen-System hat nur Ruheenergie  $E_0$  und kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$ .**
- **Ein Mehr-Teilchen-System verfügt zusätzlich über potenzielle Energie  $U$ .**

Die von der Umgebung geleistete Arbeit, die positiv oder negativ sein kann, ist eine Form der Energiezufuhr zu einem System. Diese Arbeit kann sowohl die Teilchenenergie als auch die potenzielle Energie in einem Mehrteilchensystem beeinflussen.

Exkurs: Neutrinos wurden aufgrund des Prinzips Energie entdeckt. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts stellten Wissenschaftler fest, dass bei Kernreaktionen, dem so genannten „Betazerfall“, bei denen bestimmte radioaktive Kerne spontan ein Elektron aussenden und sich ein Neutron im Kern in ein Proton verwandelt, offenbar die Energie nicht vollständig erhalten bleibt. (In der frühen Geschichte der Atomphysik wurden die energiereichen Elektronen als „Betastrahlen“ bezeichnet.) Man erwartete, dass die emittierten Elektronen alle genau die gleiche Energie haben würden, die der Veränderung des Kerns entspricht, aber stattdessen wurde beobachtet, dass die emittierten Elektronen eine große Bandbreite an Energien aufwiesen. War das Prinzip Energie also tatsächlich nicht universell gültig? Der Schweizer Physiker Wolfgang Pauli machte daraufhin den „kühnen“ Vorschlag, dass ein unsichtbares Teilchen, das später „Neutrino“ genannt wurde, ebenfalls emittiert würde, wobei es sich die Energie mit dem Elektron teilte. Pauli war von der universellen Richtigkeit der Energieerhaltung so überzeugt, dass er bereit war, ein unsichtbares Teilchen zu postulieren, anstatt die Energieerhaltung zu verwerfen. Es dauerte dann noch viele Jahre, bis Experimente empfindlich genug waren, um die schwer fassbaren Neutrinos nachzuweisen.

Nachdem wir die Grundidee der potenziellen Energie in einer Situation mit konstanter innerer Kraft veranschaulicht haben, betrachten wir nun ein aus drei Teilchen bestehendes System, die Kräfte aufeinander ausüben und auf die auch Objekte in der Umgebung, außerhalb dieses Systems, einwirken, wie auf der nachfolgenden Folie zu sehen ist. Es könnte sich zum Beispiel um drei geladene Teilchen handeln, die elektrische Kräfte aufeinander ausüben, aber auch über Federn mit Objekten in der Umgebung verbunden sind. Die Kräfte, die von anderen Teilchen im System ausgeübt werden, werden als „innere“ Kräfte bezeichnet. Die Kräfte, die von Objekten in der Umgebung ausgeübt werden, werden als „äußere“ Kräfte bezeichnet.

$$\Delta E_1 = \left( \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_1 \equiv W_{1,\text{umg}} + W_{1,\text{int}}$$

$$\Delta E_2 = \left( \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_2 \equiv W_{2,\text{umg}} + W_{2,\text{int}}$$

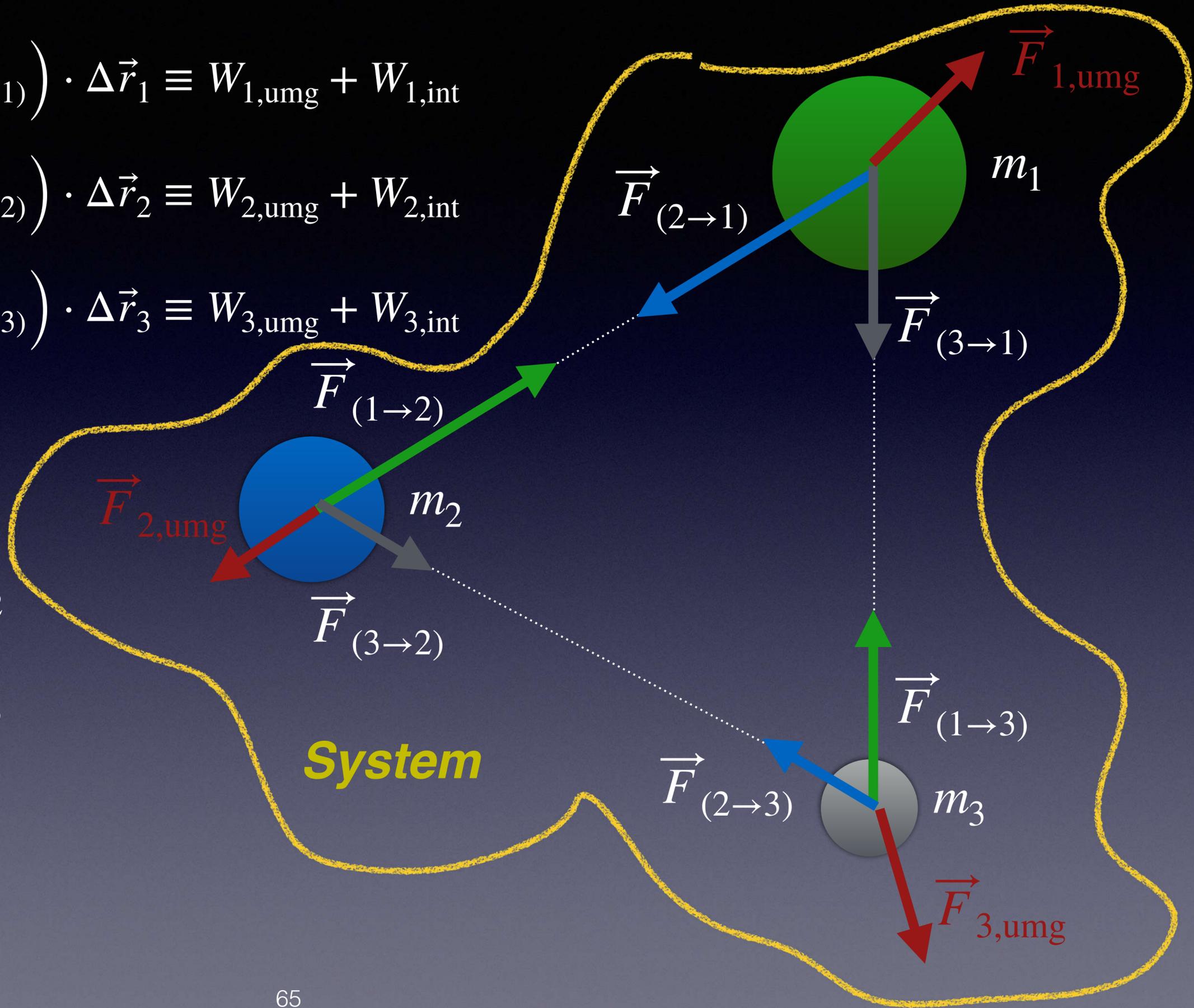
$$\Delta E_3 = \left( \vec{F}_{3,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 3)} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 3)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_3 \equiv W_{3,\text{umg}} + W_{3,\text{int}}$$

$$W_{1,\text{int}} = \left( \vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_1$$

$$W_{2,\text{int}} = \left( \vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_2$$

$$W_{3,\text{int}} = \left( \vec{F}_{(1 \rightarrow 3)} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 3)} \right) \cdot \Delta \vec{r}_3$$

$$\Delta U = - \left( W_{1,\text{int}} + W_{2,\text{int}} + W_{3,\text{int}} \right)$$

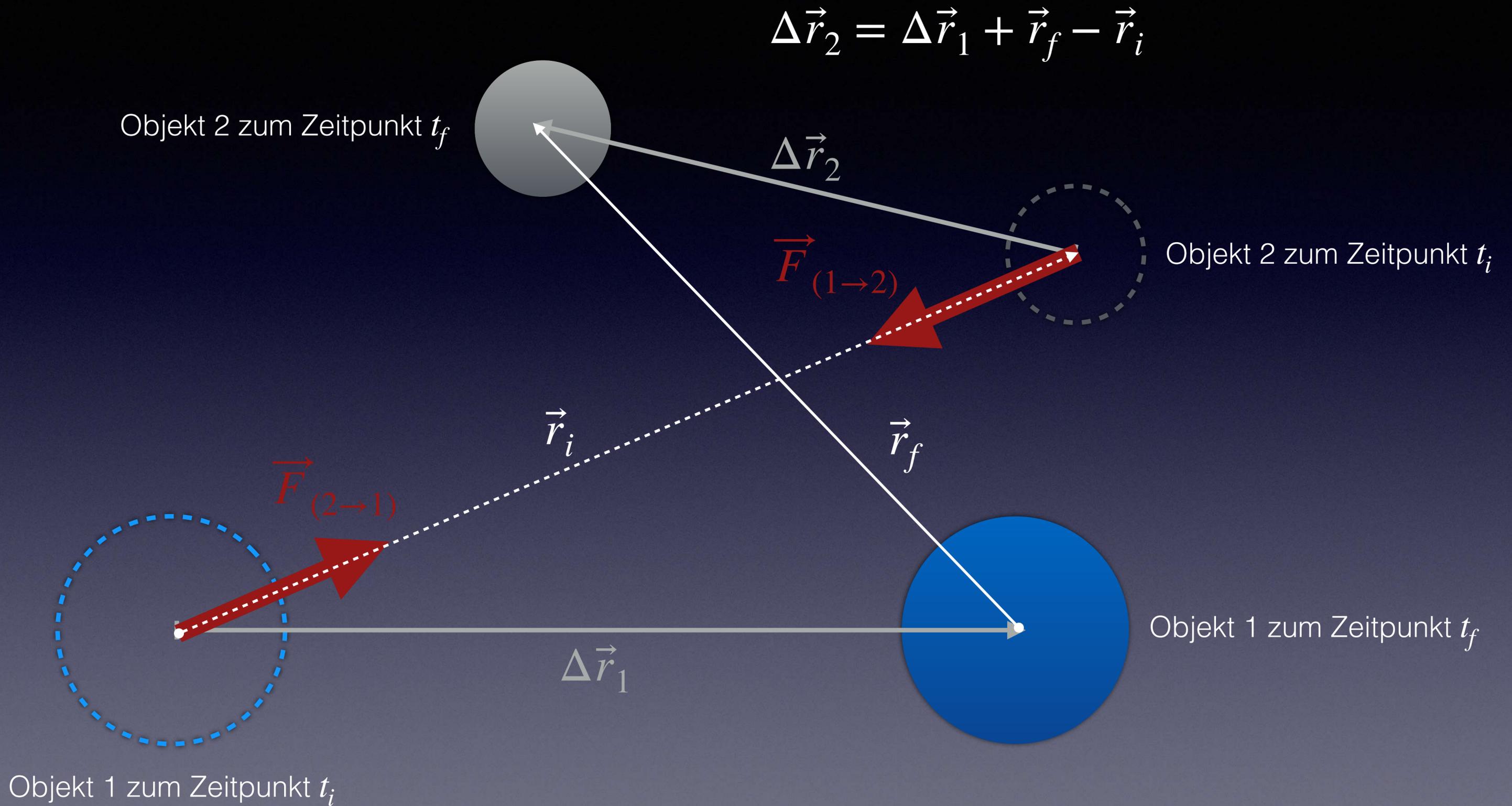


# Potenzielle Energie im Gravitationsfeld

Als Nächstes werden wir einen Ausdruck für die **potenzielle Energie in einem Gravitationsfeld** ableiten, also für den allgemeineren Fall, dass die Kraft  $\vec{F}_g$  vom Abstand abhängt. Zur Erinnerung:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}, \text{ mit } \vec{r} \text{ als relativem Positionsvektor.}$$

Dazu untersuchen wir die Änderung der potentiellen Energie zweier Objekte unter dem Einfluss der gravitativen Wechselwirkung. Wir wissen: Die Impulsänderung ist bei beiden Objekten gleich groß, da beide Kräfte über das gleiche Zeitintervall wirken. Die verrichtete Arbeit ist jedoch unterschiedlich, weil die beiden Kräfte über unterschiedliche Entfernungen wirken. Dies ist ein wichtiger Unterschied zwischen Impuls und Arbeit und somit zwischen dem Prinzip Impuls bzw. Energie.



Wir erhalten für die Änderung der potenziellen Energie:

$$\Delta U_{1\leftrightarrow 2} \equiv -W_{\text{int},1\leftrightarrow 2} = - \left( \vec{F}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \Delta \vec{r}_2 + \vec{F}_{2\rightarrow 1} \cdot \Delta \vec{r}_1 \right).$$

Wegen  $\vec{F}_{(2\rightarrow 1)} = -\vec{F}_{(1\rightarrow 2)}$  erhalten wir

$$\Delta U_{1\leftrightarrow 2} = -\vec{F}_{(1\rightarrow 2)} \cdot (\Delta \vec{r}_2 - \Delta \vec{r}_1).$$

Und mit  $\Delta \vec{r}_2 = \Delta \vec{r}_1 + \vec{r}_f - \vec{r}_i$ , sowie mit  $\Delta \vec{r}$  als Änderung des relativen Positionsvektors, folgt

$$\Delta U_{1\leftrightarrow 2} = -\vec{F}_{(1\rightarrow 2)} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) \equiv -\vec{F}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \Delta \vec{r} \rightarrow dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Daher können wir die **Änderung der potenziellen Energie über die relativen Verschiebungen zwischen Teilchenpaaren berechnen**, und jede Änderung der potenziellen Energie ist deshalb mit einer Änderung der „Konfiguration“ verbunden (Teilchenpaare rücken zusammen oder auseinander).

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, handelt es es sich bei dem Gravitationsfeld um ein konservatives Kraftfeld (rotationsfrei, Linienintegral zwischen zwei Punkten ist wegunabhängig). Wir können daher schreiben:

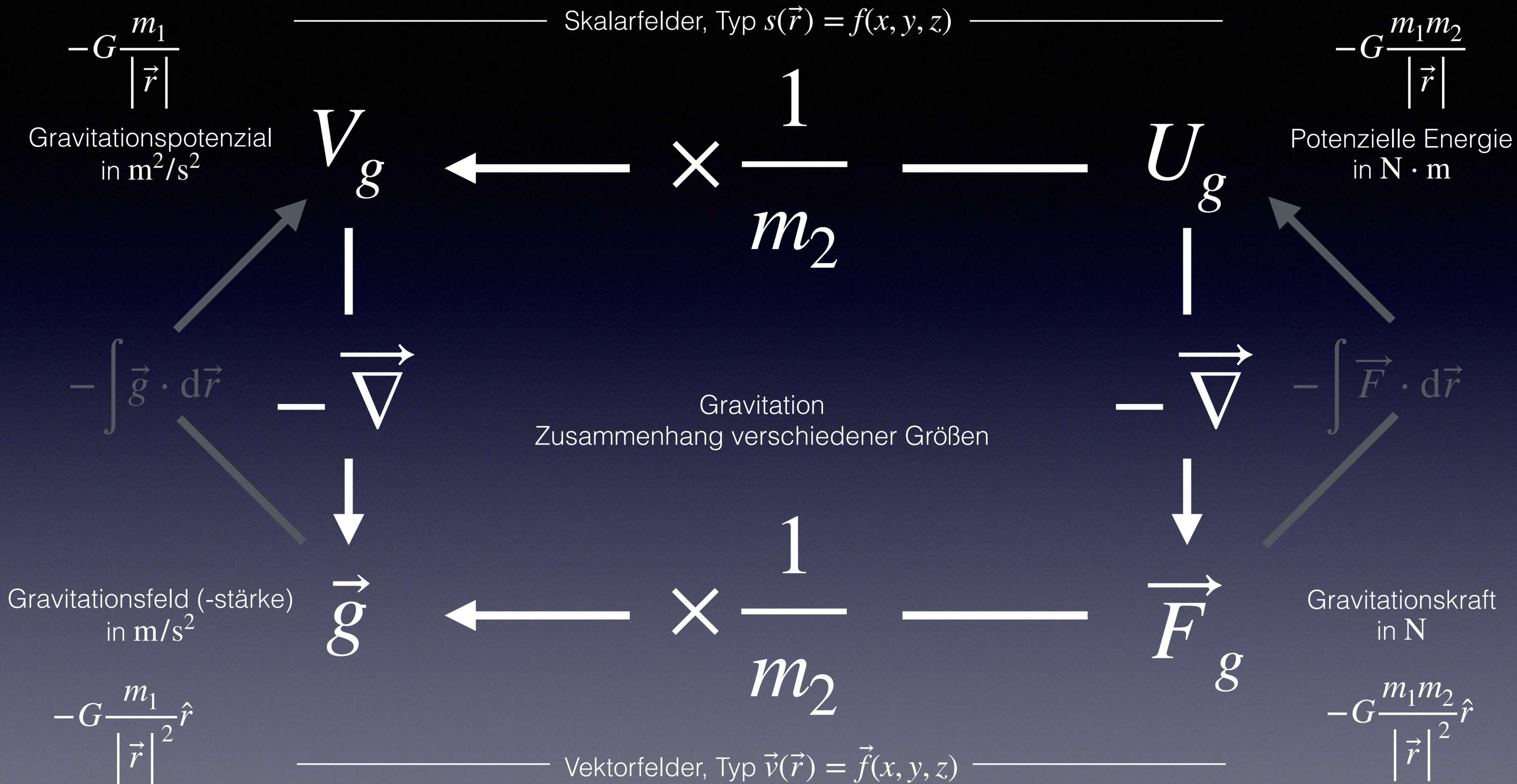
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U, \text{ mit } \vec{\nabla} \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle. \text{ Für die Umkehrung}$$

$$\Delta U = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dW = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' .$$

Um einen Ausdruck für die **potenzielle Energie  $U_g$  im Gravitationsfeld** zu finden, muss man nur noch einen Ausdruck finden, dessen (negativer) Gradient die Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  ist, die in Gegen-Richtung  $-\hat{r}$  des relativen Positionsvektors  $\vec{r}$  wirkt. Für

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad \text{erhalten wir} \quad U_g = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|} + C_\infty.$$

Das negative Vorzeichen von  $U_g$  besagt, dass die potenzielle Energie stets negativ ist. Sie nimmt bei Annäherung der beiden Objekte ab und wächst mit zunehmender Entfernung an. Für unendlich großen Abstand geht  $U_g \rightarrow C_\infty$ , wobei  $C_\infty = 0$  vorgegeben wird.



End-Position  $\vec{r}_f$    $m_s$

$$U_g(\vec{r}_f) = -G \frac{M_E m_s}{|\vec{r}_f|}$$

Beispiele für drei alternative Wege zwischen den Positionen  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_f$

Rotationsfreies, konservatives Vektorfeld  $\vec{F}_g$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}_g \cdot d\vec{\Gamma} = 0$$

$$-\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = U_g(\vec{r}_f) - U_g(\vec{r}_i)$$

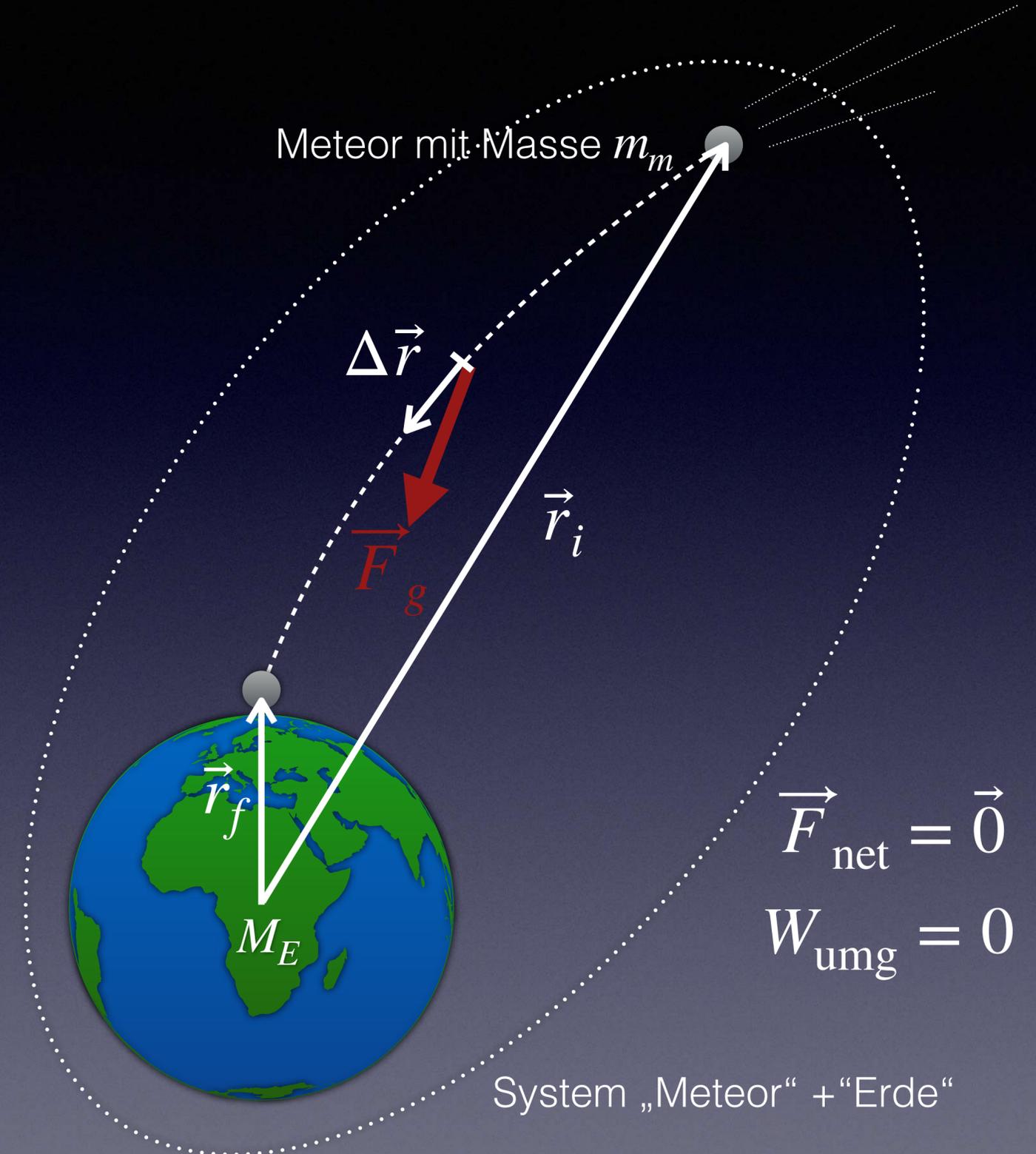
Die Arbeit zwischen den Positionen  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_f$  ist unabhängig vom gewählten Weg 1, 2 oder 3.

$$U_g(\vec{r}_i) = -G \frac{M_E m_s}{|\vec{r}_i|}$$

Anfangs-Position  $\vec{r}_i$

Die potenzielle Energie  $U_g$  ist eng mit  $\vec{F}_g$  verknüpft. Wenn die Arbeit, die eine Kraft auf einen Körper ausübt, der sich von  $\vec{r}_i$  nach  $\vec{r}_f$  bewegt, nicht vom Weg zwischen diesen Positionen abhängt, dann weist die von  $\vec{r}_i$  aus gemessene Arbeit jedem anderen Punkt im Raum einen skalaren Wert zu und definiert das skalare Feld  $U_g$ , mit  $\vec{F}_g = -\vec{\nabla} U_g$ .

Im Februar 2013 fiel in der Nähe von Tscheljabinsk, Russland, ein großer Meteor auf die Erde, dessen Masse auf etwa  $m_m = 1.2 \times 10^7 \text{ kg}$  geschätzt wurde. Der Meteor explodierte spektakulär in einer Höhe von ca. 30 km oberhalb der Erdoberfläche. Betrachte einen Meteor mit der gleichen Masse, der auf die Erde (Masse  $M_E = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ ) fällt. Wähle dabei die Erde und den Meteor als System. Wie ändert sich die kinetische Energie des Meteors, wenn er aus einer Entfernung von  $|\vec{r}_i| = 10^5 \text{ km}$  bis auf  $|\vec{r}_f| = 10^4 \text{ km}$  auf die Erde zufällt (Entfernung jeweils vom Erdmittelpunkt aus gemessen)? Erkläre die Vorzeichen der Änderungen der kinetischen und potenziellen Energie des Systems.



$$\Delta \left[ (M_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + (m_m c^2 + E_{\text{kin},m}) + U_{g,E \leftrightarrow m} \right] = W_{\text{umg}} = 0.$$

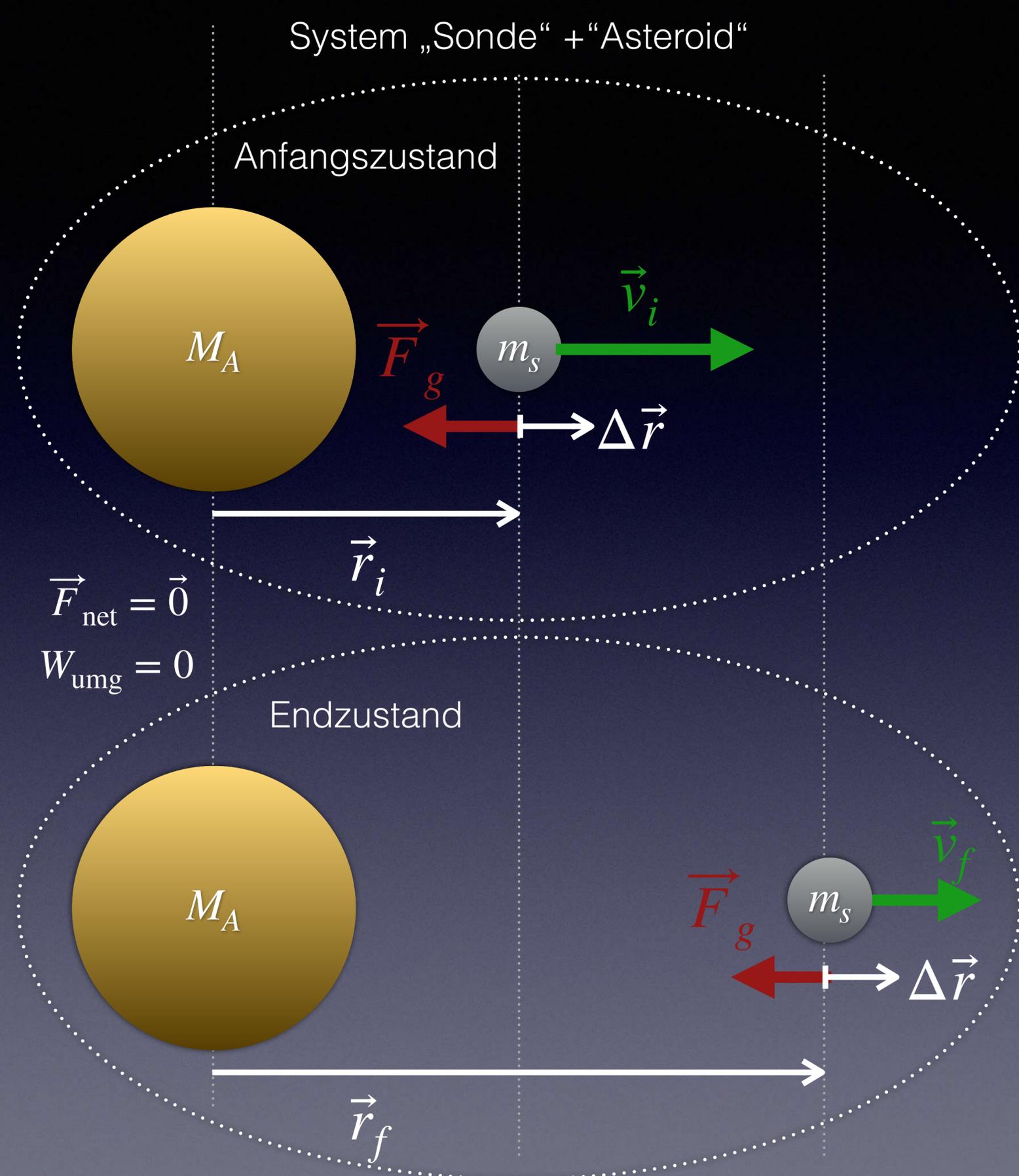
Näherungen: (1) Ruhemassen bleiben konstant; (2) kinetische Energie der Erde bleibt konstant; (3) keine externe Arbeit.

$$\Delta E_{\text{kin},m} = - \Delta U_{g,E \leftrightarrow m} = - \left( U_{g,E \leftrightarrow m,f} - U_{g,E \leftrightarrow m,i} \right),$$

$$\Delta E_{\text{kin},m} = GM_E m_m \left( \frac{1}{|\vec{r}_f|} - \frac{1}{|\vec{r}_i|} \right) > 0.$$

Die kinetische Energie des Meteors wächst in gleichem Maße an, wie die potenzielle Energie des Systems Erde-Meteor abnimmt.

Eine unbemannte Raumsonde landet auf einem Asteroiden, nimmt eine Probe auf und fliegt zur Erde zurück; ihre Gesamtmasse beträgt  $m_s = 1500 \text{ kg}$ . In einer Entfernung von  $|\vec{r}_i| = 200 \text{ km}$  vom Zentrum des Asteroiden beträgt ihre Geschwindigkeit  $|\vec{v}_i| = 5 \text{ m/s}$  und ihr Antrieb wird abgeschaltet. In dem Moment, in dem sie sich in einer Entfernung von  $|\vec{r}_f| = 500 \text{ km}$  vom Zentrum des Asteroiden befindet, ist ihre Geschwindigkeit auf  $|\vec{v}_f| = 4.1 \text{ m/s}$  gesunken. Berechne die Masse  $M_A$  des Asteroiden. Hinweis: Zur Übersichtlichkeit sind verschiedene Vektoren in der nebenstehenden Grafik versetzt dargestellt.



$$\Delta \left[ (M_A c^2 + E_{\text{kin},A}) + (m_s c^2 + E_{\text{kin},s}) + U_{g,A \leftrightarrow s} \right] = W_{\text{umg}} = 0 .$$

Näherungen: (1) Ruhemassen bleiben konstant; (2) kinetische Energie des Asteroiden bleibt konstant; (3) keine externe Arbeit.

$$\Delta U_{g,A \leftrightarrow s} = - \Delta E_{\text{kin},s} \rightarrow \left( U_{g,A \leftrightarrow s,f} - U_{g,A \leftrightarrow s,i} \right) = - \left[ (E_{\text{kin},s})_f - (E_{\text{kin},s})_i \right] ,$$

$$GM_A m_s \left( \frac{1}{|\vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_f|} \right) = \frac{1}{2} m_s \left( |\vec{v}_i|^2 - |\vec{v}_f|^2 \right) > 0 .$$

Die kinetische Energie der Sonde nimmt in gleichem Maße ab, wie die potenzielle Energie des Systems Asteroid-Sonde zunimmt.

Für die Masse  $M_A$  des Asteroiden erhalten wir ( $m_s$  fällt dabei heraus):

$$M_A = \frac{\frac{1}{2} \left( |\vec{v}_i|^2 - |\vec{v}_f|^2 \right)}{G \left( \frac{1}{|\vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_f|} \right)} .$$

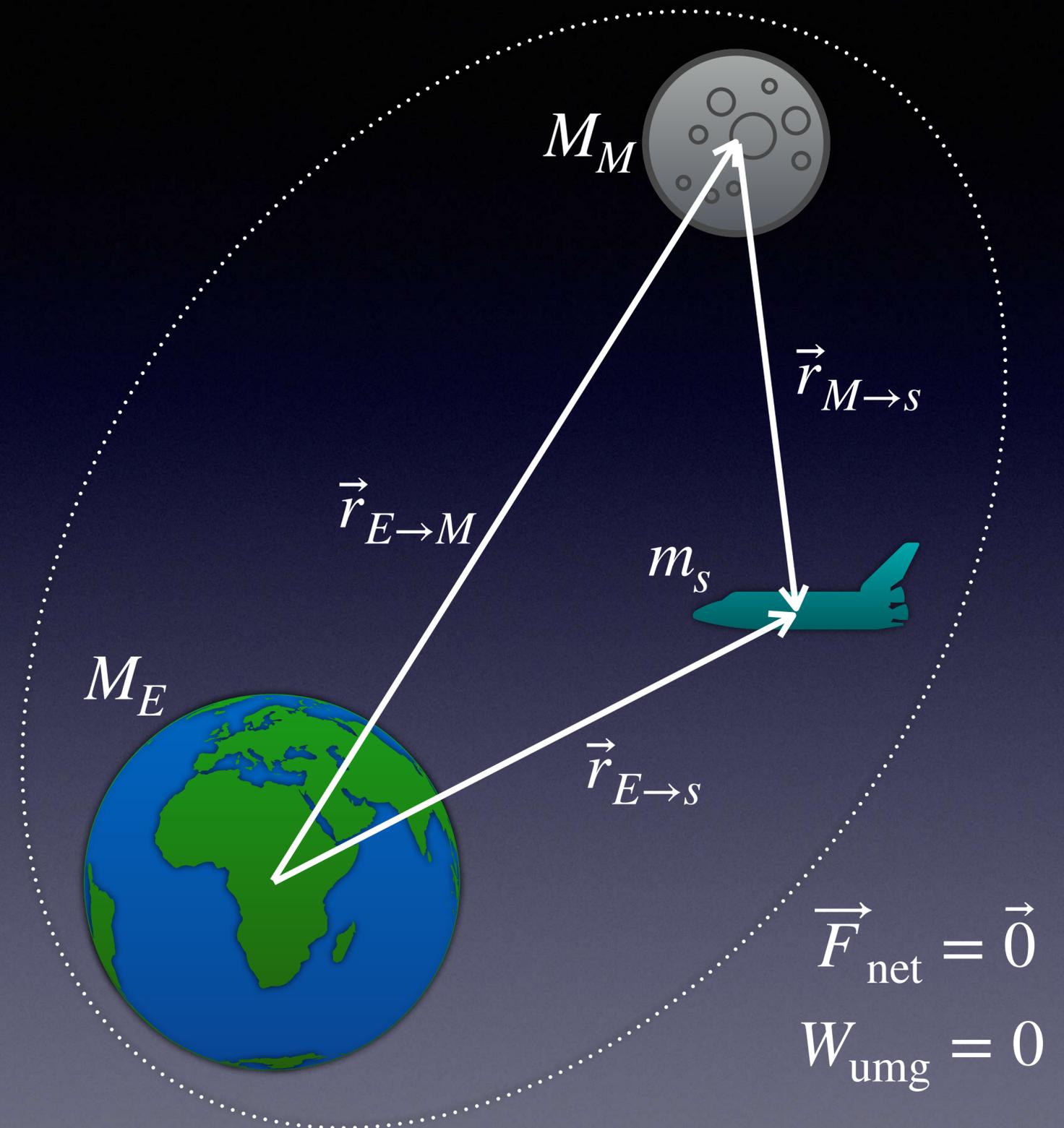
Hinweis: Solange  $M_A \gg m_s$  gilt, ist  $\Delta E_{\text{kin},A} \ll \Delta E_{\text{kin},s}$ , und die Änderung der Energie des Asteroiden bleibt für das vorliegende Problem praktisch vernachlässigbar.

Hätten wir zur Lösung dieses Problems auch das Prinzip Impuls anstelle des Prinzips Energie anwenden können? Nein, wir hätten das Prinzip Impuls nicht anwenden können, ohne ein iteratives Computerprogramm zu schreiben, da wir nicht genau wissen, wie viel Zeit zwischen Anfangs- und Endzustand vergeht (Die Geschwindigkeit ändert sich in diesem Fall mit einer nicht konstanten Rate). Wir können aber das Prinzip Energie anwenden, da uns insbesondere die Entfernungen genau bekannt sind.

Bislang haben wir das Prinzip Energie auf Zwei-Teilchen-Systeme angewandt.

In dem nebenstehen skizzierten Problem gibt es drei „Teilchen“: das Raumschiff mit Masse  $m_s$ , die Erde mit Masse  $M_E$  und den Mond mit Masse  $M_M$ .

Hierfür wollen wir auf der nächsten Folie die Anwendung des Prinzips Energie formulieren.



In unserem aus drei „Teilchen“ aufgebauten System, haben wir es mit drei Paar-Interaktionen,  $U_{g,E\leftrightarrow M}$ ,  $U_{g,E\leftrightarrow s}$  und  $U_{g,M\leftrightarrow s}$  zu tun. Für die Energieerhaltung können wir daher schreiben:

$$\Delta \left[ (M_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + (M_M c^2 + E_{\text{kin},M}) + (m_s c^2 + E_{\text{kin},s}) + U_{g,E\leftrightarrow M} + U_{g,E\leftrightarrow s} + U_{g,M\leftrightarrow s} \right] = W_{\text{umg}} = 0$$

Näherungen für den einfachsten Fall: (1) Ruhemassen bleiben konstant; (2) kinetische Energie von Erde und Mond bleibt konstant; (3) Abstand zwischen Erde und Mond bleibt konstant; (4) keine externe Arbeit. Dann erhalten wir für die Änderung der kinetischen Energie des Spaceshuttle:

$$\Delta E_{\text{kin},s} = - \Delta \left( U_{g,E\leftrightarrow s} + U_{g,M\leftrightarrow s} \right).$$

$$\Delta \left( \frac{1}{2} m_s |\vec{v}|^2 \right) + \Delta \left( -G \frac{M_E m_s}{|\vec{r}_{E\rightarrow s}|} \right) + \Delta \left( -G \frac{M_M m_s}{|\vec{r}_{M\rightarrow s}|} \right) = 0.$$

Wir leiten nun aus dem vollständigen Ausdruck für  $\Delta U_g$  der potenziellen Gravitationsenergie eine Näherung für den Bereich der Erdoberfläche ab. Betrachten wir ein System, das aus der Erde und einem Objekt mit (Probe-) Masse  $m$  besteht. Wir bewegen das Objekt von der Erdoberfläche an einen Ort, der sich in geringem Abstand  $\Delta y$  über der Erdoberfläche befindet. Wenn der Radius der Erde  $R_E \gg \Delta y$  ist, dann ist die Änderung der potenziellen Energie des Systems  $mg\Delta y$ .

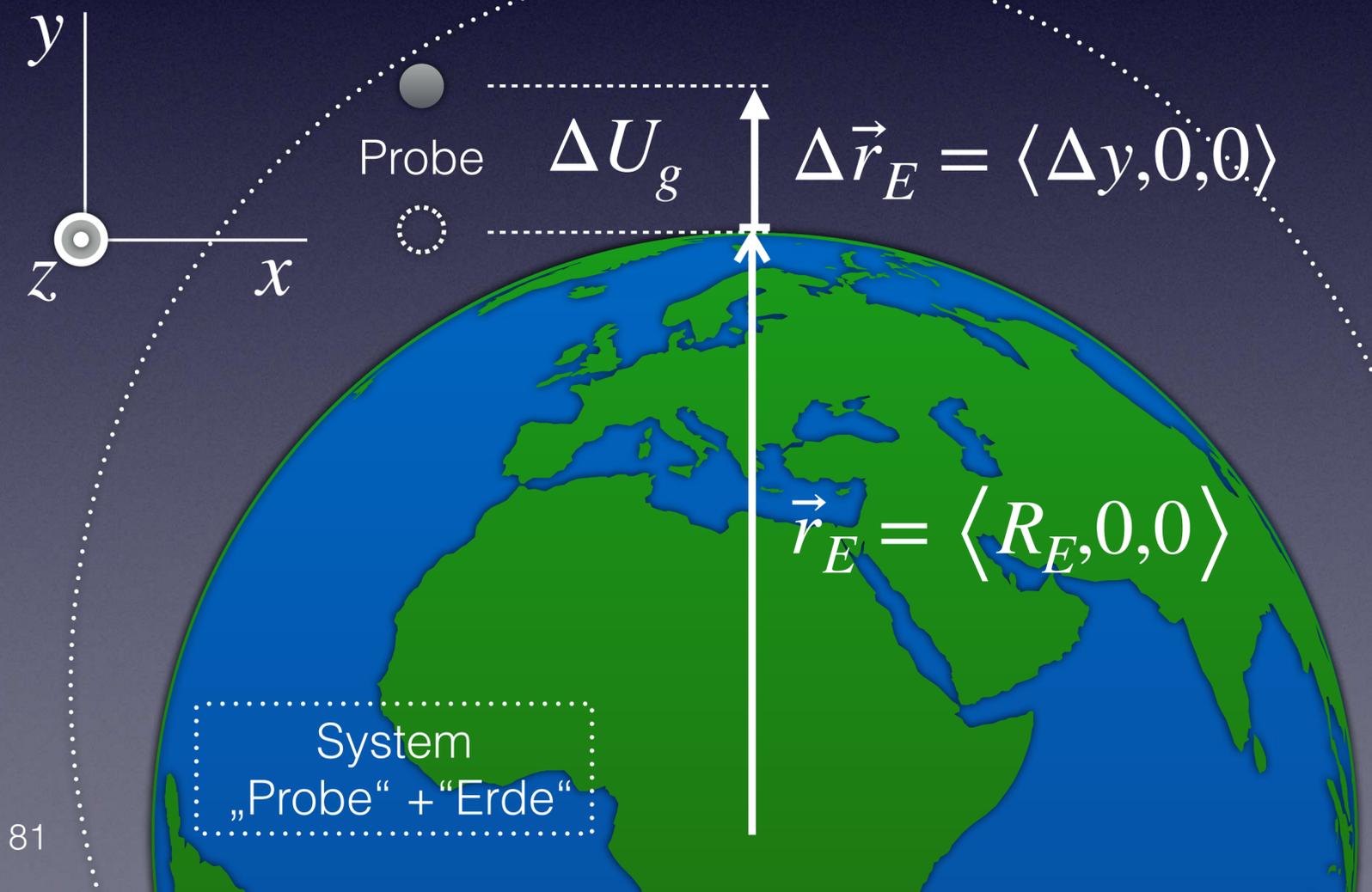
Das Vorzeichen ist korrekter Weise positiv: Wenn man sich weiter nach oben (vom Erdmittelpunkt entfernt) bewegt, so wird  $U_g$  größer (Zunahme zu größeren Anständen).

$$U_g(\vec{r}_E) = -G \frac{M_E m}{R_E}$$

$$U_g(\vec{r}_E + \Delta \vec{r}) = -G \frac{M_E m}{R_E + \Delta y}$$

$$\Delta U_g = -GM_E m \left( \frac{1}{R_E + \Delta y} - \frac{1}{R_E} \right)$$

$$\Delta U_g \approx m \frac{GM_E}{R_E^2} \Delta y = m |\vec{g}(\vec{r}_E)| \Delta y \equiv mg\Delta y$$



# Kontrollpunkt 9

1. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt ein Ball mit einer Geschwindigkeit von  $\vec{v}_i = \langle 0, -6, 0 \rangle$  m/s, und seine Position befindet sich bei  $\vec{r}_i = \langle 0, 35, 0 \rangle$  m über der Erdoberfläche. (1) Wie schnell fällt der Ball, wenn er sich bei  $\vec{r}_f = \langle 0, 20, 0 \rangle$  m oberhalb der Erdoberfläche befindet, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigen kann?
2. Angenommen, du wirfst einen Ball in einem Winkel zur Horizontalen, und beim Verlassen deiner Hand bei  $\vec{r}_i = \langle x_i, y_i, 0 \rangle$  m beträgt seine Geschwindigkeit  $\vec{v}_i = \langle v_{x,i}, v_{y,i}, 0 \rangle$  m/s. Unter der Annahme, dass Luftwiderstand und Erdkrümmung vernachlässigt werden können, beträgt die Geschwindigkeit des Balls am Scheitelpunkt seiner Flugbahn  $\vec{v}_f = \langle v_{x,i}, 0, 0 \rangle$  m/s. (1) Berechne  $y_f$  für den Scheitelpunkt der Flugbahn in Abhängigkeit von den anderen bekannten Größen. Verwende dabei das Prinzip Energie. (2) Welche Aussage kannst du zu  $x_f$  machen?

# Potenzielle Energie im elektrischen Feld

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass das Gesetz der elektrischen (Anziehungs- oder Abstoßungs-) Kraft für zwei geladene Teilchen dem Gesetz der (stets anziehenden) Gravitationskraft sehr ähnlich ist:

$$\vec{F}_{c(1 \rightarrow 2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}, \text{ mit } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

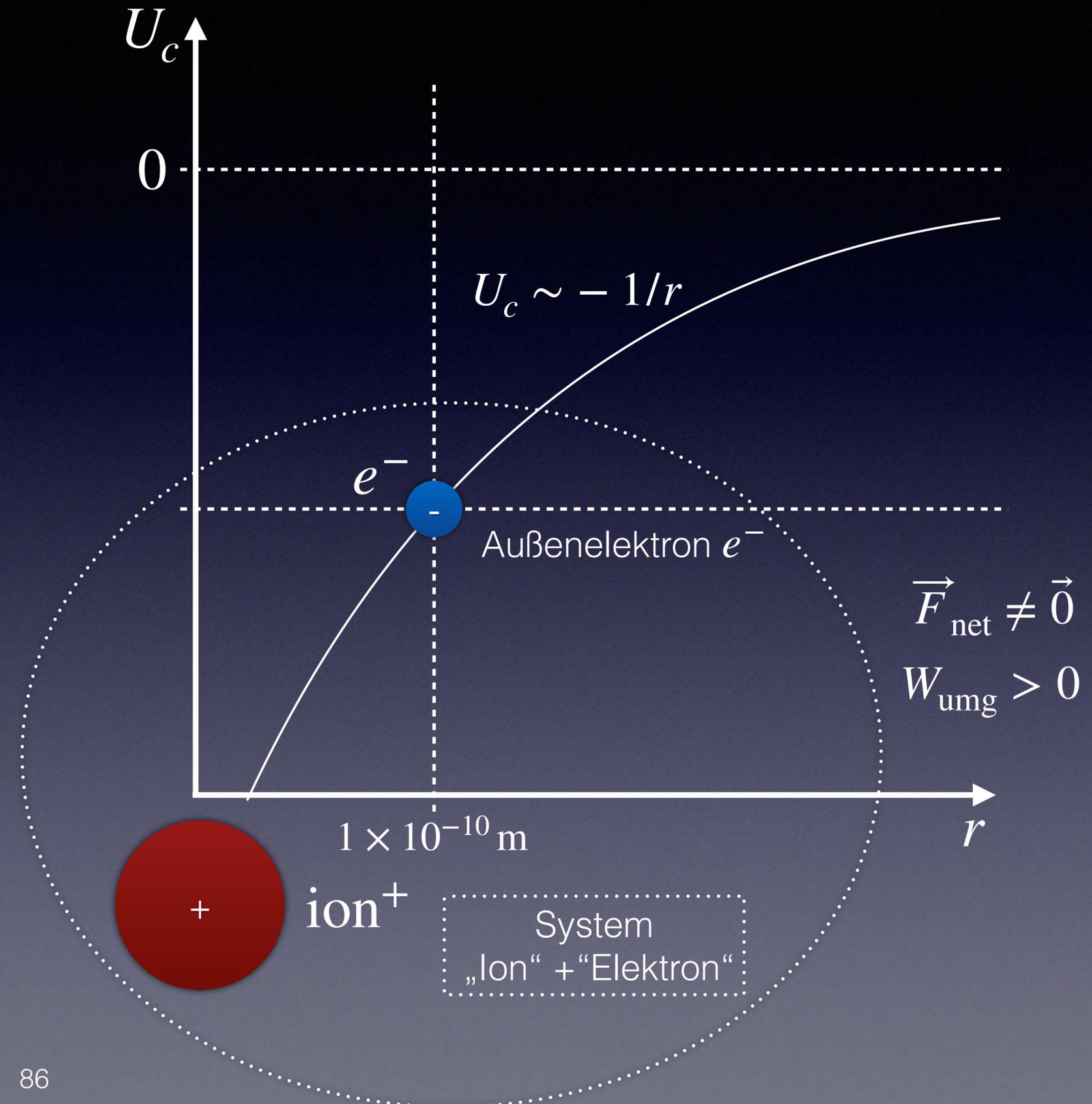
Die Größen  $q_1$  und  $q_2$  stehen für die Ladungsmenge der beiden Teilchen (gemessen in Coulomb) und  $|\vec{r}|$  für den Abstand zwischen ihnen.

Da es sich sowohl bei  $\vec{F}_c$  wie auch bei  $\vec{F}_g$  um eine Kraft proportional zu  $1/|\vec{r}|^2$  handelt, hat die potenzielle Energie  $U_c$  des elektrischen Feldes eine Form, die derjenigen für die potenzielle Energie  $U_g$  der Gravitation sehr ähnlich ist:

$$U_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|} . \quad \begin{array}{l} U_c > 0: \text{ abstoßend;} \\ U_c < 0: \text{ anziehend.} \end{array}$$

Es gibt kein Minuszeichen wie bei  $U_g$ , denn wenn die elektrische Wechselwirkung anziehend ist, wie die Gravitation, und  $q_1$  und  $q_2$  unterschiedliche Vorzeichen haben, folgt das Minuszeichen von selbst. Haben beide Ladungen das gleiche Vorzeichen, so ist die Wechselwirkung abstoßend, und der Ausdruck für  $U_c$  wird positiv.

Eine bestimmte Energiemenge ist erforderlich, um ein Außenelektron aus einem neutralen Atom zu entfernen, wobei ein positives „Ion“ zurückbleibt, dem ein Elektron fehlt. Die Ladung des Ions ist  $e$  (mit  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ); die Ladung des Elektrons ist  $-e$ . Die Mindestenergie, um ein Außenelektron zu entfernen, wird als „Ionisierungsenergie“ bezeichnet. Ein typisches Atom hat einen Radius von etwa  $1 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Schätze eine typische Ionisierungsenergie in Joule (J) und rechne das Ergebnis anschließend in Elektronenvolt (eV) um.



Energieerhaltung:

$$\Delta \left[ \left( m_{\text{ion}} c^2 + E_{\text{kin,ion}} \right) + \left( m_e c^2 + E_{\text{kin,e}} \right) + U_{c,\text{ion} \leftrightarrow e} \right] = W_{\text{umg}} .$$

Näherungen: (1) Ruheenergie unverändert; (2) Elektron anfänglich im Abstand  $r_a$  vom Atomkern; (3) kinetische Energien, da nicht bekannt, werden zu null angenommen. Damit erhalten wir:

$$W_{\text{umg}} \approx U_{c,f} - U_{c,i} = \overset{\substack{\text{Minuszeichen wegen} \\ \text{Anziehung}}}{\downarrow} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_\infty} - \frac{1}{r_a} \right) \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_a} .$$

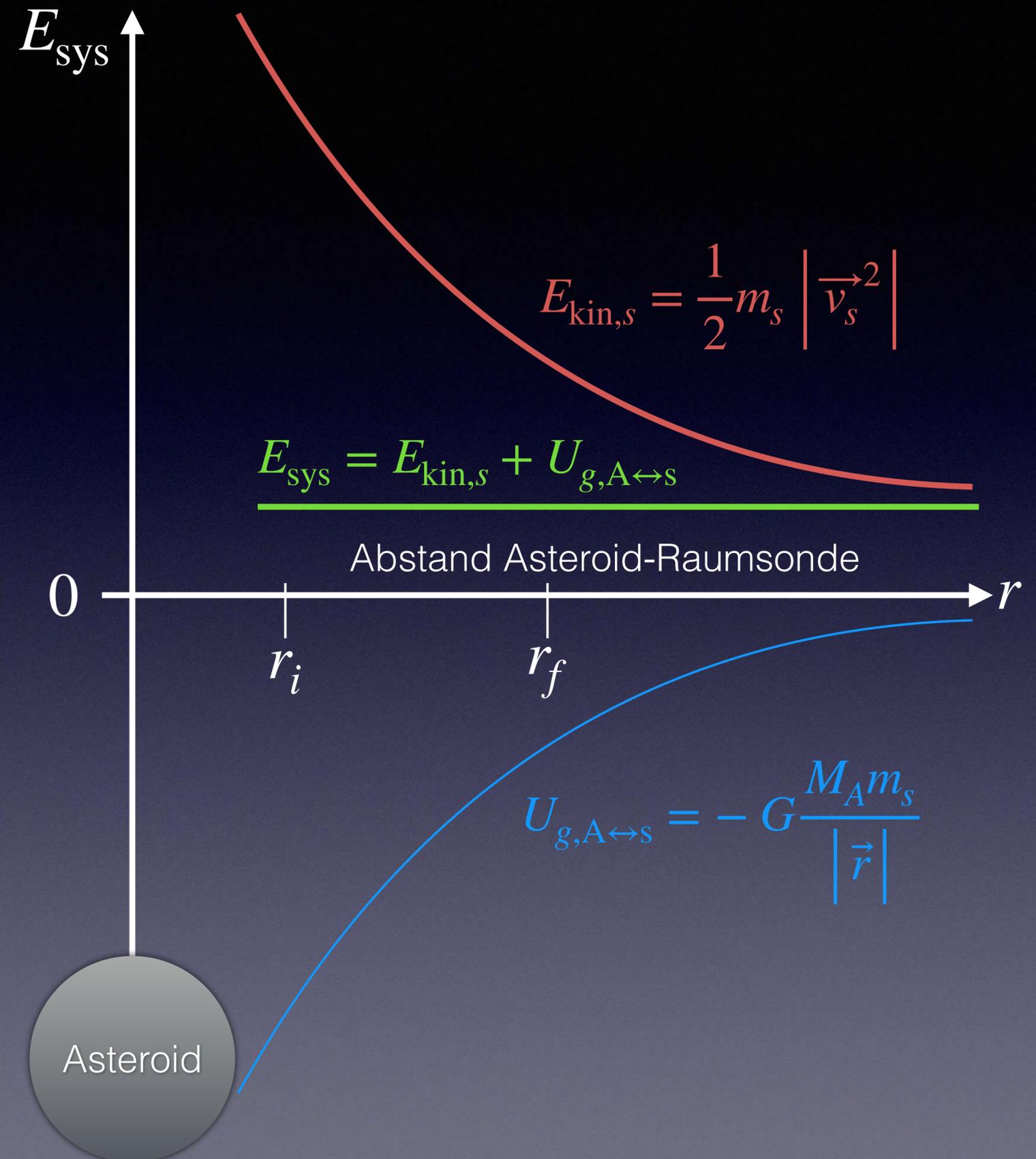
$$W_{\text{umg}} \approx 2.3 \times 10^{-18} \text{ J}; \quad 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}; \quad W_{\text{umg}} \approx 14 \text{ eV} .$$

# Kontrollpunkt 10

1. Zwei Protonen werden mit einer kinetischen Energie von jeweils  $0.1 \text{ MeV}$  aus sehr großer Entfernung aufeinander „geschossen“. Berechne den Abstand  $r_f$  zwischen den Protonen, wenn sie schließlich zum Stillstand kommen. (1) Wie wählst du das System. (2) Schreibe die vollständige Gleichung nach dem Prinzip Energie auf; (3) Welcher Term der Gleichung enthält die unbekannte Größe? (4) Berechne  $r_f$  näherungsweise.

# Darstellung der Energie gegen den Abstand

Eine grafische Darstellung der Energie kann außerordentlich hilfreich sein, um über einen Prozess nachzudenken. In der nebenstehenden Abbildung zeigen wir ein Energiediagramm für die Raumsonde, die einen Asteroiden verlässt, also den auf einer vorangehenden Folie schon einmal analysierten Prozess. Dargestellt sind die potenzielle Gravitationsenergie  $U_{g,A\leftrightarrow s}$ , die kinetische Energie  $E_{\text{kin},s}$  der Raumsonde und die Summe  $E_{\text{sys}} = U_{g,A\leftrightarrow s} + E_{\text{kin},s}$  als Funktion des Abstands  $r$  zwischen dem Zentrum des Asteroiden und der Raumsonde. Wir vernachlässigen dabei die Ruheenergien, die sich während der Bewegung nicht ändern.

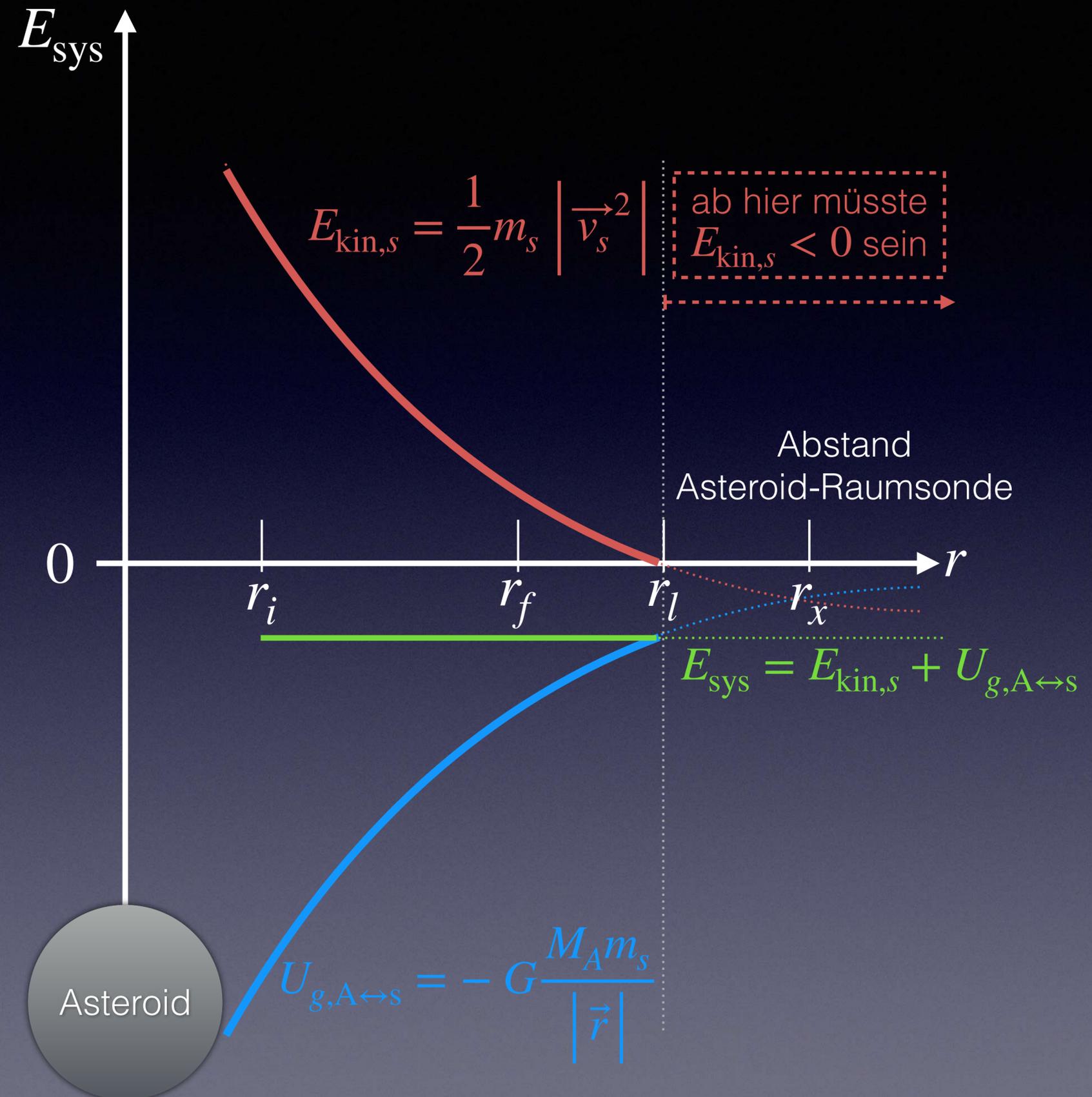


Wichtige Merkmale in der grafischen Darstellung sind:

1. Die potenzielle Gravitationsenergie  $U_{g,A\leftrightarrow s}$  ist negativ, weil die Wechselwirkung anziehend und nicht abstoßend ist, und die potenzielle Energie nimmt mit zunehmendem Abstand zu.
2. Mit zunehmender potenzieller Energie nimmt die kinetische Energie  $E_{kin,s}$  des Raumfahrzeugs ab.
3. Da das kombinierte System aus Asteroid und Raumsonde nur eine vernachlässigbare Arbeit verrichtet, bleibt die Energie  $E_{sys}$  des Systems konstant, und der Graph von  $E_{sys}$  ist eine gerade horizontale Linie auf dem Diagramm.
4. Entfernt sich die Raumsonde immer weiter vom Asteroiden, so kann man aus dem Diagramm ersehen, dass deren kinetische Energie weiter sinkt und sich der Kurve für  $E_{sys}$  bei großem Abstand immer mehr annähert, da  $U_{g,A\leftrightarrow s}$  gegen null geht.

Dies ist ein Beispiel für ein „ungebundenes“ System, da sich der Abstand zwischen Raumsonde und Asteroid unbegrenzt vergrößern wird. Für ein gravitativ ungebundenes System ist  $E_{sys}$  größer als Null.

Als Beispiel für ein „gebundenes“ System betrachten wir wieder die Raumsonde und den Asteroiden, geben aber diesmal der Raumsonde eine geringere Anfangsgeschwindigkeit mit, die senkrecht vom Asteroiden wegführt. Als Funktion des Abstands zwischen Asteroid und Raumsonde wird wieder ein Diagramm mit der potenziellen Energie  $U_{g,A\leftrightarrow s}$  sowie der kinetischen Energie  $E_{\text{kin},s}$  erstellt. Wenn sich die Raumsonde vom Asteroiden entfernt, fällt ihre kinetische Energie, während die potenzielle Energie steigt. Du kannst auf dem Diagramm sehen, dass die kinetische Energie für einen Abstand  $r_l$  auf Null fällt. Ein Abstand  $r_x$  kann nicht erreicht werden, da die kinetische Energie immer eine positive Größe sein muss. Was geschieht? Das Raumschiff kommt bei  $r_l$  kurzzeitig zum Stillstand (Wendepunkt), dreht um und beschleunigt auf den Asteroiden zu; schließlich stürzt es auf dessen Oberfläche.



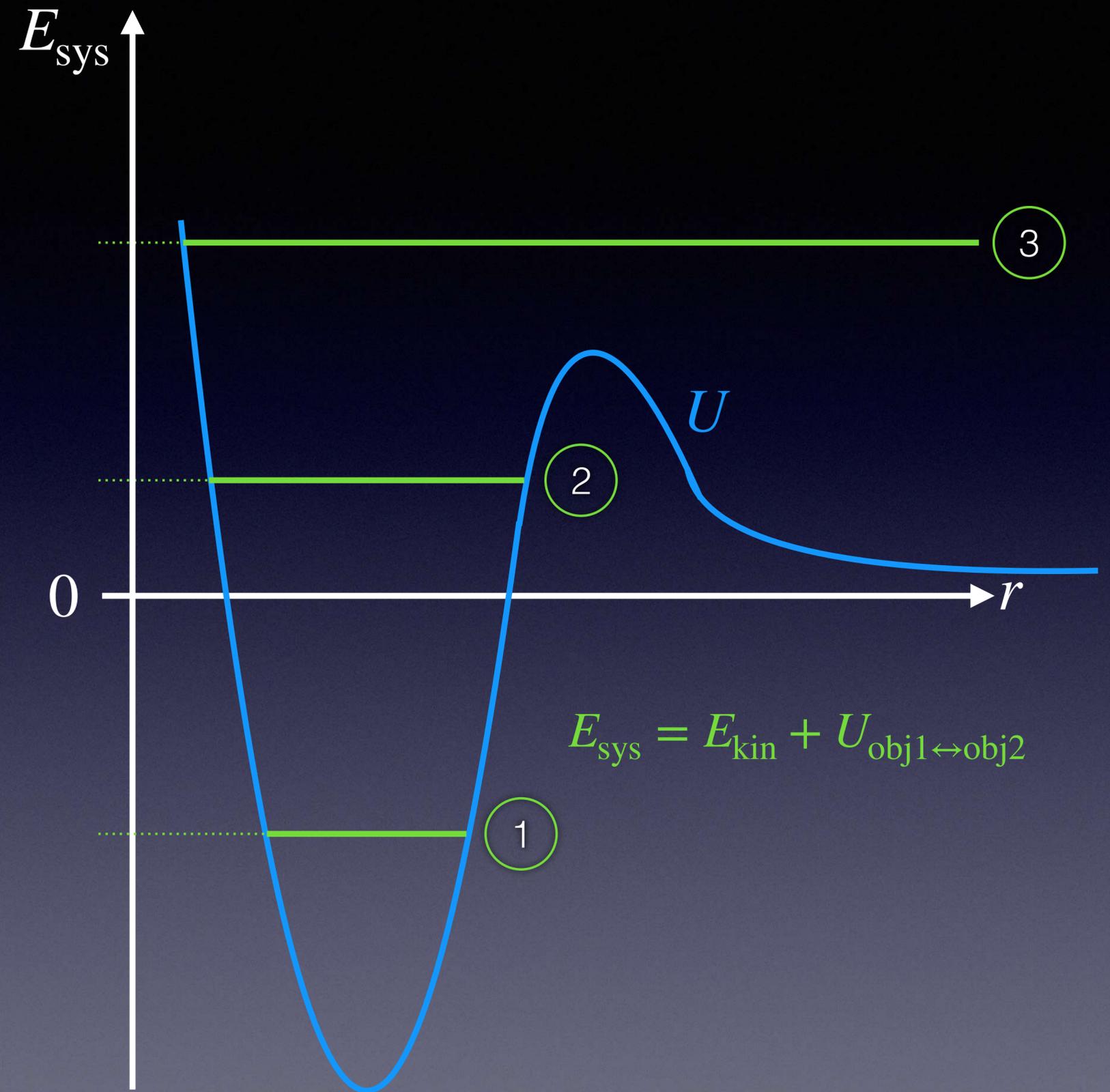
Ein Beispiel für ein ungebundenes System ist die Erde und ein Raumschiff, dessen Anfangsgeschwindigkeit so groß ist, dass sich das Raumschiff von der Erde immer weiter entfernt und nie wieder zurückkehrt.

Ein weiteres Beispiel: Wenn einem Atom eine Energiemenge zugeführt wird, die größer oder gleich seiner Ionisierungsenergie ist, kann sich ein Elektron aus dem Atom lösen und entkommen.

Für ein durch Gravitation oder elektrische Anziehung ungebundenes System ist  $E_{\text{kin}} + U \geq 0$ , was in einem Energiediagramm leicht zu erkennen ist. Nur wenn das System durch große Abstände zwischen den Objekten getrennt werden kann, ist die Energie niemals negativ.

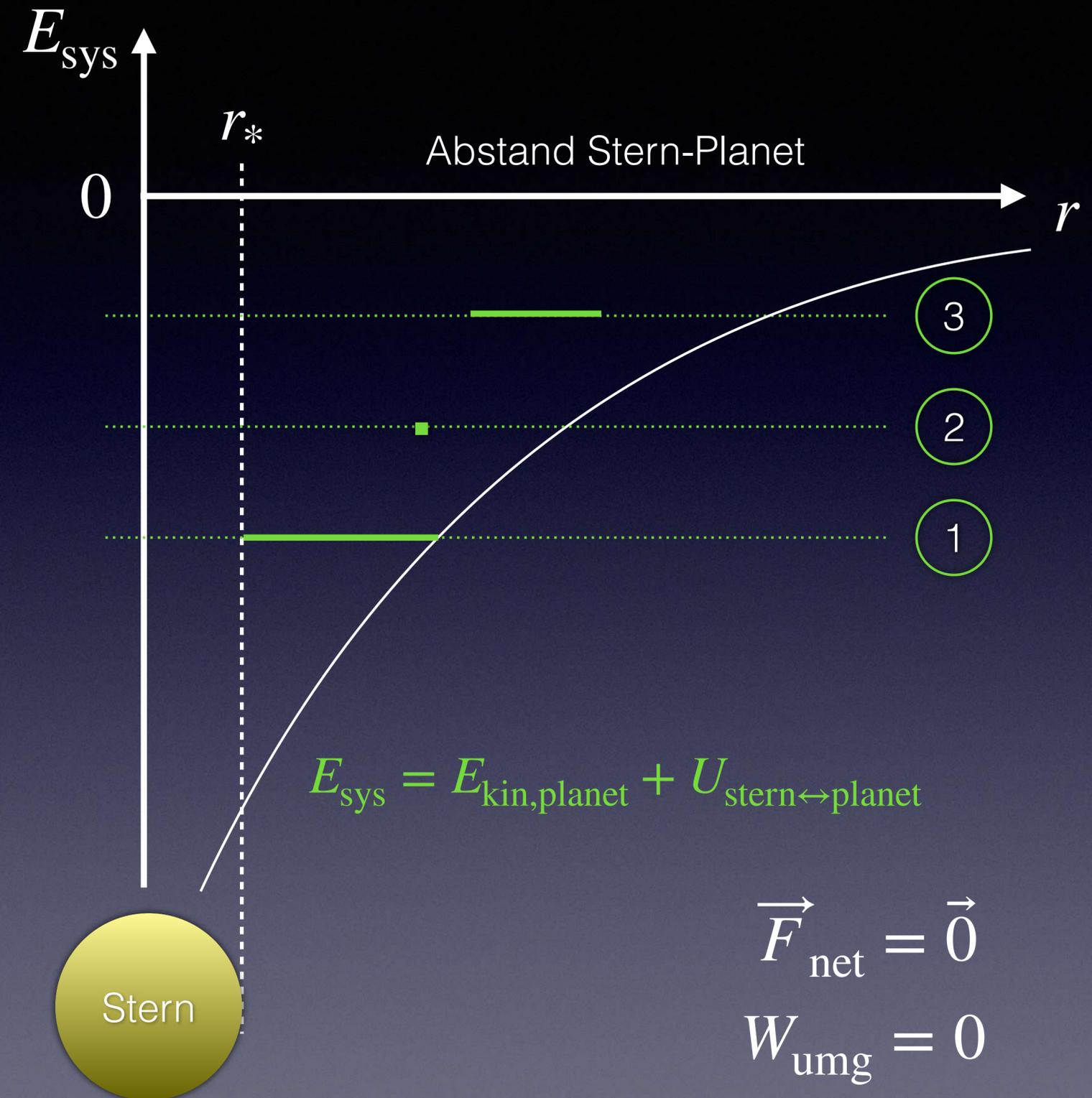
# Kontrollpunkt 11

Betrachte das nebenstehende Energiediagramm für ein System mit zwei Objekten und die drei verschiedenen angegebenen Energiezustände. (1) Welcher dieser Werte für die Energie  $E_{\text{sys}}$  stellt einen gebundenen Zustand dar? (2) Welcher stellt einen ungebundenen Zustand dar? (3) Welcher repräsentiert einen gebundenen Zustand mit genügend Energie, um ungebunden zu sein, aber mit einer Barriere  $U$ , die (klassischer Weise) ein Entweichen verhindert?

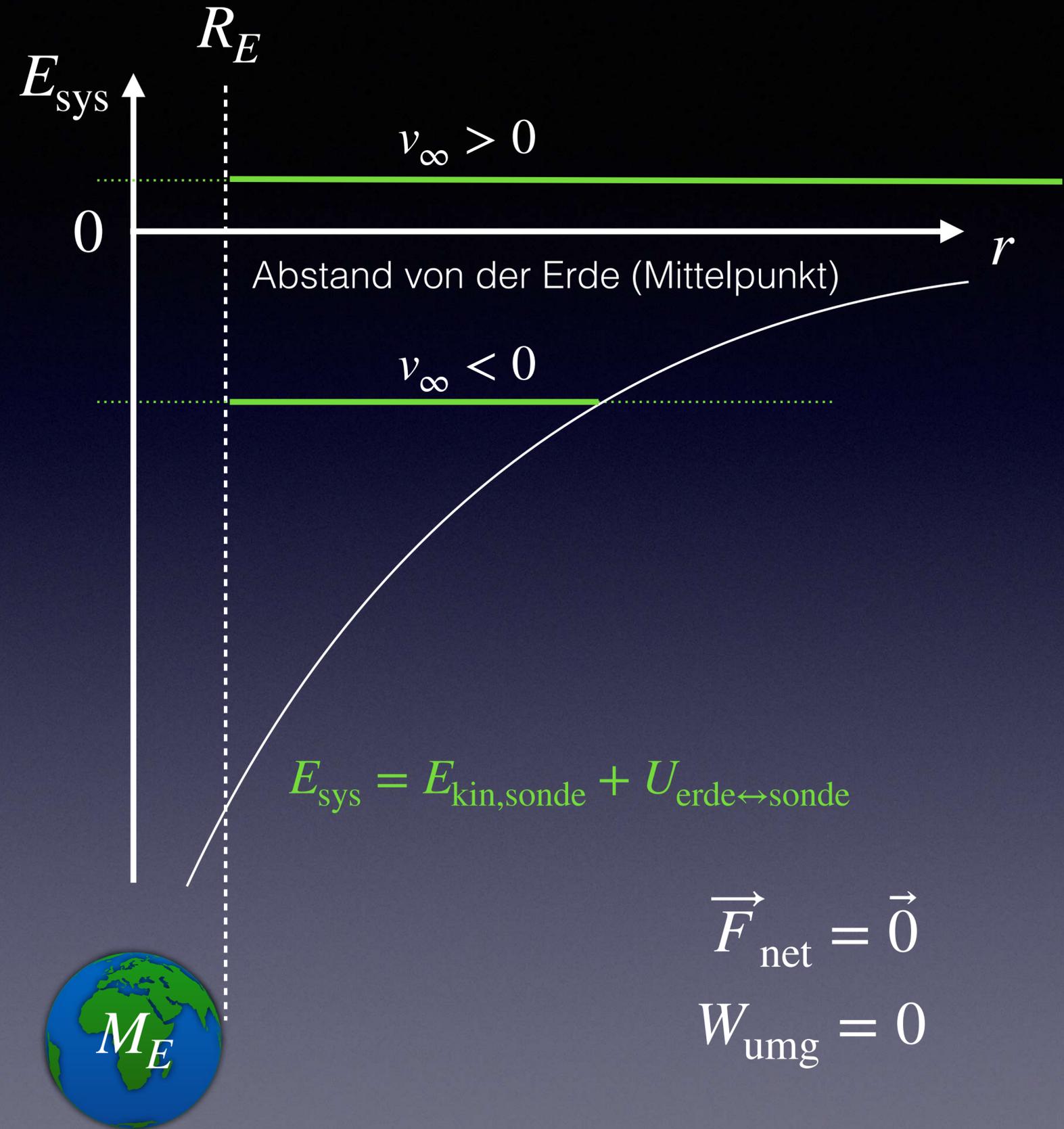


# Kontrollpunkt 12

Betrachte nebenstehendes Energiediagramm für ein System aus zwei Objekten: ein Planet umkreist „seine“ Sonne. Dargestellt sind drei verschiedene Verläufe von  $E_{\text{sys}}$ . (1) Welche Art von Bewegung wird durch die jeweilige Situation (1, 2, und 3) dargestellt? Denke dabei insbesondere über den Bereich von  $r$  in jeder Situation nach.



Eine Analyse auf der Grundlage des Prinzips Energie ermöglicht die Beantwortung der folgenden Frage: Mit welcher Mindestgeschwindigkeit  $v_{\text{flucht}}$  muss eine Raumsonde die Erde (Radius  $R_E$  und Masse  $M_E$ ) verlassen, damit sie davonfliegen kann, ohne jemals zurückzukehren. Wir nehmen vereinfachend an, dass der Luftwiderstand keine Rolle spielen soll, die Ruhemassen unveränderlich sind, und sich auch keine anderen Objekte in der Nähe befinden.



Die minimale Energie des Systems aus Erde und Raumschiff ist, wenn man davon ausgeht, dass die kinetische Energie der Erde vernachlässigbar ist, folgende:

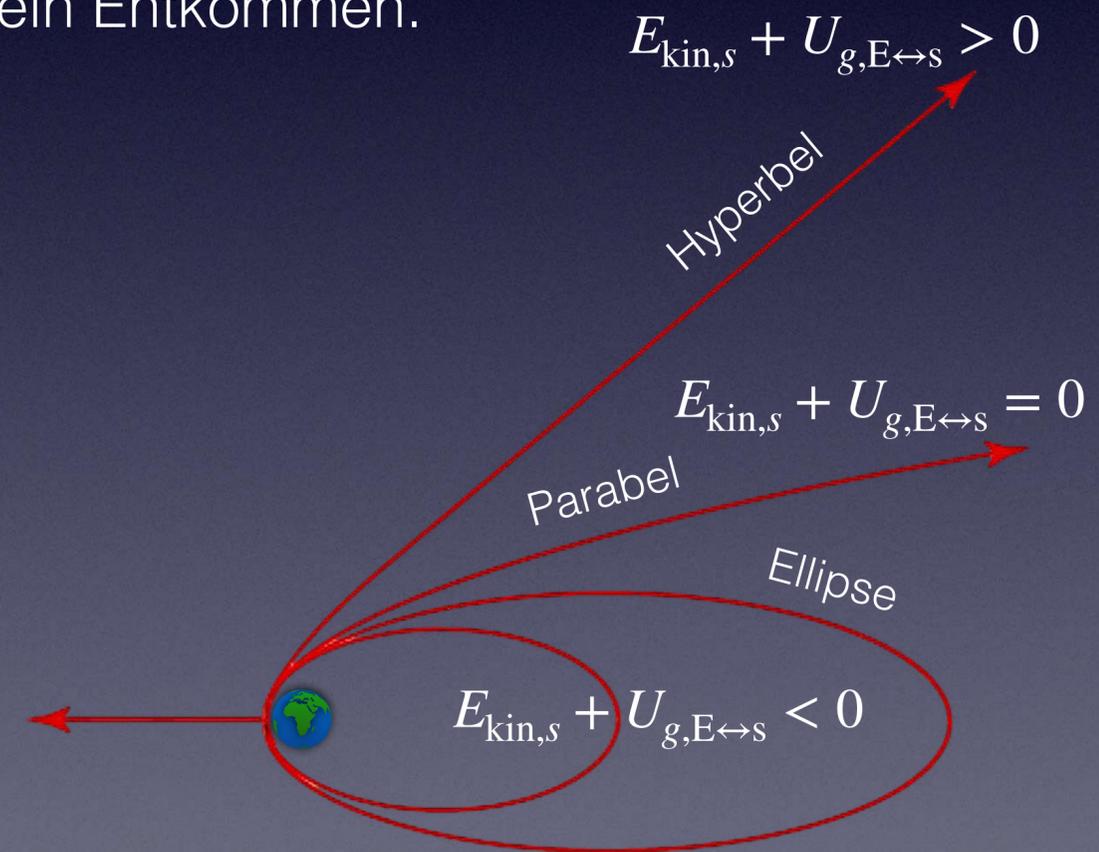
$$\frac{1}{2}m_s v_{\text{flucht}}^2 - G \frac{M_E m_s}{R_E} = 0 \rightarrow v_{\text{flucht}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}, \text{ für } v \ll c; \text{ Erde: } v_{\text{flucht}} \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

Falls die Geschwindigkeit unter der Fluchtgeschwindigkeit liegt, gibt es kein Entkommen.  
Fallunterscheidung möglicher Bahnen:

$$\frac{1}{2}m_s v_i^2 - G \frac{M_E m_s}{R_E} > 0 : v_\infty > 0; \text{ Gerade oder Hyperbel.}$$

$$\frac{1}{2}m_s v_i^2 - G \frac{M_E m_s}{R_E} = 0 : v_\infty = 0; \text{ Gerade oder Parabel.}$$

$$\frac{1}{2}m_s v_i^2 - G \frac{M_E m_s}{R_E} < 0 : \text{kein Entkommen; Gerade, Kreis oder Ellipse.}$$



# Kontrollpunkt 13

1. Drehe das Argument „Fluchtgeschwindigkeit“ um. (1) Wenn ein Objekt aus großer Entfernung aus der Ruhelage auf die Erde fällt, mit welcher Geschwindigkeit trifft es dann auf die obere Atmosphäre? Ergänzungen: Ein Komet oder Asteroid, der aus großer Entfernung kommt, könnte aufgrund seiner Wechselwirkung mit der Sonne sogar eine noch höhere Geschwindigkeit haben. Man nimmt an, dass ein solch massiver Einschlag die Dinosaurier vor ca. 66 Millionen Jahren ausgelöscht hat.

# Allgemeine Eigenschaften der potenziellen Energie

Es gibt verschiedene Arten von potenzieller Energie, die jeweils mit einer bestimmten Art von Kraft verbunden sind. So wird beispielsweise die Arbeit einer elastischen Kraft als elastische potenzielle Energie bezeichnet; die Arbeit der Gravitationskraft wird als potenzielle Gravitationsenergie bezeichnet; die Arbeit der Coulomb-Kraft wird als elektrische potenzielle Energie bezeichnet; die Arbeit der starken oder schwachen Kernkraft, die auf die Baryonenladung einwirkt, wird als potenzielle Kernenergie bezeichnet; die Arbeit der intermolekularen Kräfte wird als intermolekulare potenzielle Energie bezeichnet. Chemische potenzielle Energie, wie z. B. die in fossilen Brennstoffen gespeicherte Energie, ist die Arbeit der Coulomb-Kraft bei der Umordnung der Konfigurationen von Elektronen und Kernen in Atomen und Molekülen. Die thermische Energie besteht in der Regel aus zwei Komponenten: der kinetischen Energie der zufälligen Bewegungen der Teilchen und der potenziellen Energie ihrer Konfiguration.

Das negative Vorzeichen steht für die Konvention, dass Arbeit, die gegen ein Kraftfeld verrichtet wird, die potenzielle Energie erhöht, während Arbeit, die durch das Kraftfeld verrichtet wird, die potenzielle Energie verringert. Siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/Potential\\_energy](https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_energy) .

Es gibt einige allgemeine Eigenschaften der potenziellen Energie, die nicht nur für Gravitationswechselwirkungen gelten, sondern auch für andere Arten von Wechselwirkungen:

- Die potenzielle Energie hängt vom Abstand zwischen Teilchenpaaren ab, nicht von ihren individuellen Positionen. (Wie wir gesehen haben, hängt dies von der Reziprozität der Gravitations- und elektrischen Kräfte ab).
- Die potenzielle Energie muss gegen Null gehen, wenn der Abstand zwischen den Teilchen sehr groß wird.
- Wenn eine Wechselwirkung anziehend ist, wird die potenzielle Energie negativ, wenn der Abstand zwischen den Teilchen abnimmt.
- Wenn eine Wechselwirkung abstoßend ist, wird die potenzielle Energie positiv, wenn der Abstand zwischen den Teilchen abnimmt.

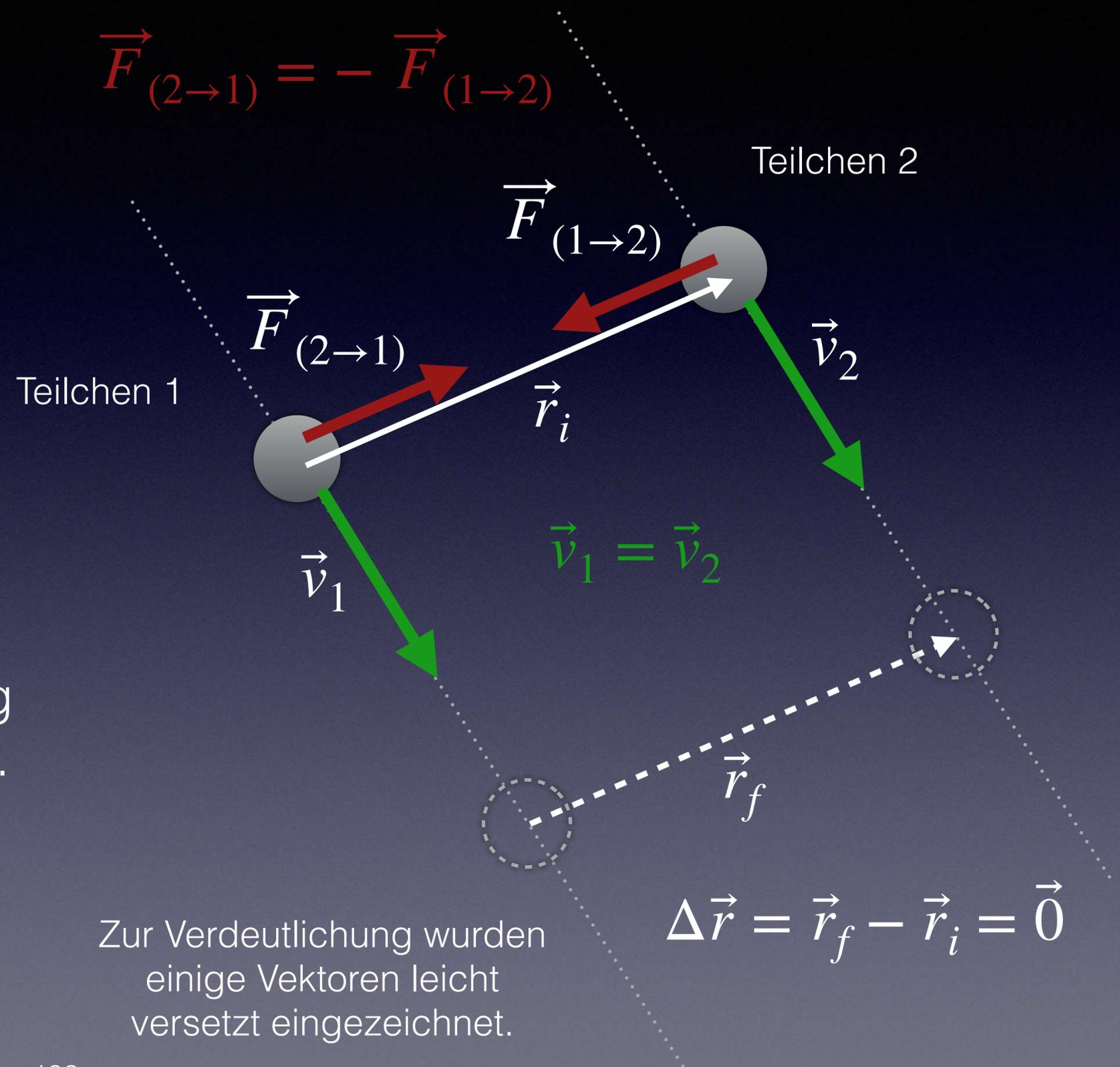
Sehen wir uns die Konsequenzen, dass die potenzielle Energie vom Abstand zwischen den wechselwirkenden Objekten abhängt, auf den folgenden Folien etwas genauer an.

Angenommen, zwei Teilchen sind Teil eines „starr“ Systems und bewegen sich gemeinsam mit der gleichen Geschwindigkeit (siehe nebenstehende Abbildung).

Wie groß ist  $\Delta \vec{r}$ ?

Wie groß ist  $\Delta U_{1 \leftrightarrow 2}$ ?

Da  $\Delta \vec{r} = \vec{0}$  ist  $\Delta U_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ . Die potenzielle Energie dieses gleichförmig bewegten starren Systems ist konstant.

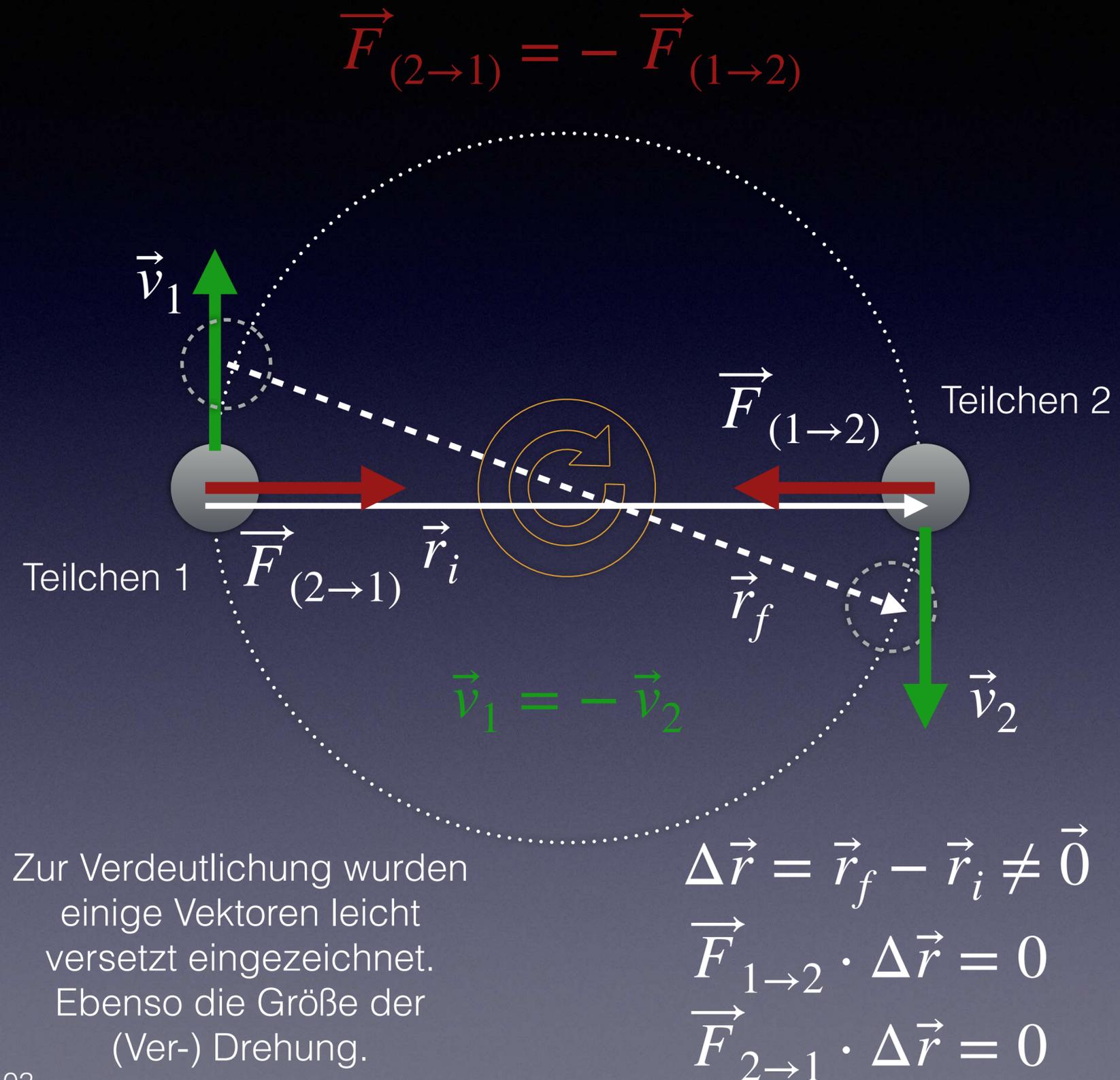


Angenommen, zwei Teilchen sind Teil eines „starr“ Systems und führen eine gemeinsame Rotation mit der gleichen Geschwindigkeit aus (siehe nebenstehende Abbildung).

Wie groß ist  $\Delta \vec{r}$ ?

Wie groß ist  $\Delta U_{1 \leftrightarrow 2}$ ?

Da sich die Richtung der Geschwindigkeit ändert, ist  $\Delta \vec{r} \neq \vec{0}$ . Da die Kräfte allerdings stets senkrecht zu  $\Delta \vec{r}$  stehen, ist das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 0$ . Damit ist  $\Delta U_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ . Die potenzielle Energie eines rotierenden starren Systems ist konstant.

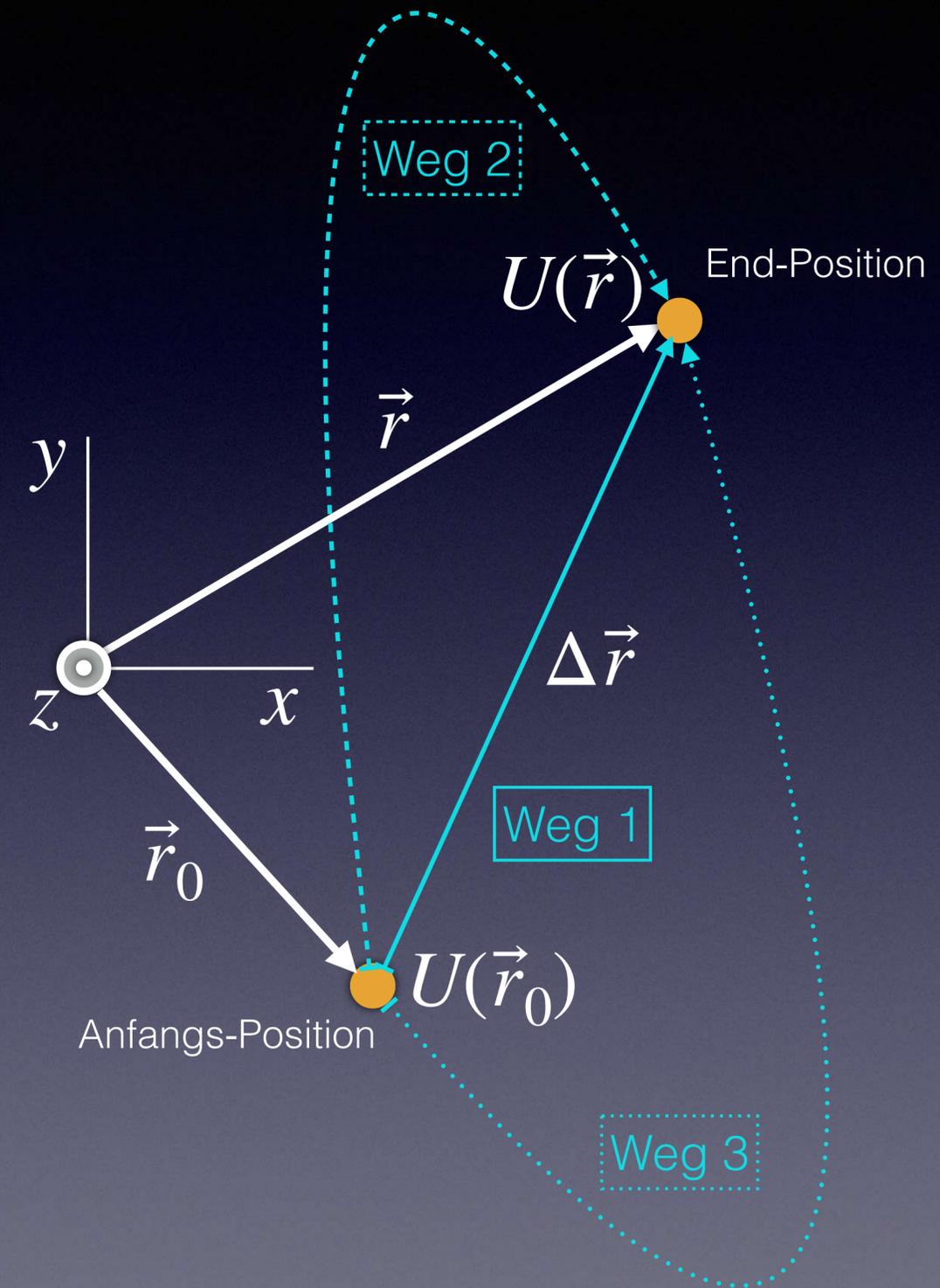


Was können wir aus den beiden vorangehenden Beispielen über die potenzielle Energie eines starren Systems lernen?

Für ein starres System, dessen Form sich nicht ändert, ist die potenzielle Energie  $U$  offensichtlich konstant. Damit sich die potenzielle Energie ändert, muss sich die Form oder Größe des Systems ändern. Umgekehrt ist eine Änderung der Form oder Größe ein Indikator dafür, dass sie sich die potenzielle Energie  $U$  geändert haben könnte.

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, handelt es sich bei dem Gravitationsfeld um ein konservatives Kraftfeld. Dieses ist rotationsfrei und kann durch  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$  aus dem skalaren Potenzial  $U$  abgeleitet werden. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass das Linienintegral zwischen zwei Punkten vom Weg unabhängig ist und sein Wert nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dW = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' .$$



Wir haben die potenzielle Energie für Systeme aus interagierenden Punktteilchen definiert. Punktteilchen sind ein bemerkenswert gutes Modell für viele physikalische Situationen, aber nicht für Situationen, in denen es Reibung gibt. Reibung entsteht durch die Verformung von ausgedehnten Objekten, die miteinander in Kontakt stehen. Wir können solche Objekte jedoch nicht als Punktteilchen modellieren; da ein Punktteilchen per Definition keine innere Struktur hat, kann es sich nicht verformen oder heiß werden. Außerdem ist die durch Reibung verursachte Arbeit eindeutig nicht unabhängig vom zurückgelegten Weg: Je länger der Weg ist, desto heißer werden die Objekte, unabhängig von der Weg-Richtung. Wir nennen Kräfte wie Reibung und Luftwiderstand „dissipative Kräfte“, und es gibt keine Möglichkeit, für solche Wechselwirkungen so etwas wie eine potenzielle Energie zu definieren. Dissipative Wechselwirkungen werden wir später noch einmal genauer betrachten.

# Die Masse eines Vielteilchen- Systems

Eine überraschende Vorhersage von Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (1905) war, dass Masse und Energie eng miteinander verbunden sind. Diese Vorhersage wurde in vielen verschiedenen Experimenten bestätigt. Das eindrucksvollste Beispiel für die **Masse-Energie-Äquivalenz** ist vielleicht die „**Annihilation**“ zwischen Materie und Antimaterie, wie im Fall der Annihilation eines Elektrons und eines Positrons (eines positiven Elektrons) in zwei Photonen (hochenergetische Lichtquanten, bezeichnet mit dem griechischen Kleinbuchstaben  $\gamma$ ):



Vor der Reaktion können ein Elektron und ein Positron weit voneinander entfernt, fast in Ruhe sein. Eine Situation, in der es Masse, aber scheinbar keine Energie gibt. Nach der Reaktion gibt es Licht (in Form von zwei Photonen), eine Situation, die wir als reine Energie, aber scheinbar ohne Masse bezeichnen würden. **Aus der Sicht der Speziellen Relativitätstheorie ist die Masse des Elektron-Positron-Systems jedoch Energie, und die Energie des Zwei-Photonen-Systems ist Masse.**

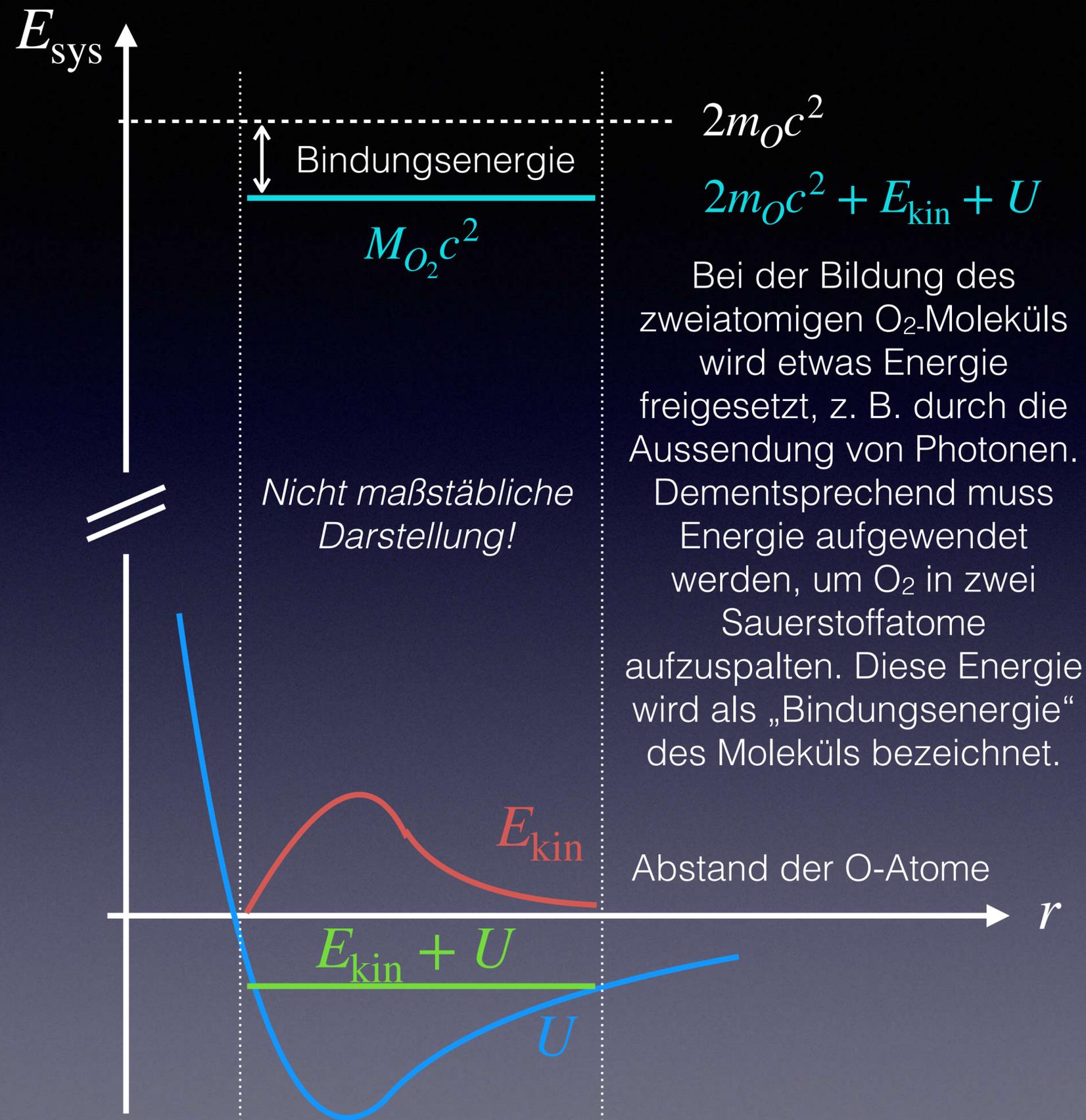
Wie groß ist die **Masse eines Mehrteilchensystems**, das aus wechselwirkenden Teilchen besteht? Betrachten wir den einfachen Fall, dass das Mehrteilchensystem insgesamt in Ruhe ist. Die einzelnen Teilchen bewegen sich, aber das System als Ganzes bewegt sich nicht (genauer gesagt, der Gesamtimpuls des Systems ist gleich Null, und sein Massenschwerpunkt ist in Ruhe). Die Relativitätstheorie sagt voraus, dass die **Ruheenergie des Mehrteilchensystems** gleich  $Mc^2$  ist und dass seine Masse daher wie folgt mit  $E_{\text{sys}}$  zusammenhängt:

$$M = \frac{E_{\text{sys}}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left( \sum_i m_i c^2 + \sum_i E_{\text{kin},i} + U \right), \text{ oder}$$

$$M = \frac{E_{\text{sys}}}{c^2} = \sum_i m_i + \frac{1}{c^2} \left( \sum_i E_{\text{kin},i} + U \right).$$

**Die Masse  $M$  des Systems kann größer oder kleiner sein als die Summe der einzelnen Teilchenmassen  $m_i$ ,** da der letzte Term in dieser Gleichung positiv, null oder negativ sein kann.

Betrachten wir ein Sauerstoffmolekül  $O_2$  im Ruhezustand. Anstatt nur die kinetische und potentielle Energie für dieses aus zwei Atomen bestehende System aufzuzeichnen, beziehen wir auch die Ruheenergie der Atome mit ein, so wie es in der nebenstehenden, nicht maßstäblichen Abbildung getan wurde. Die Gesamtenergie  $E_{\text{sys}}$  des Systems ist die Summe der Ruheenergien der beiden Atome, der potenziellen Energie  $U$  (die negativ ist) und der gesamten kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  der beiden Atome. Für den im Diagramm eingezeichneten gebundenen Zustand kann man sehen, dass die Ruheenergie des  $O_2$ -Moleküls (geringfügig) kleiner als die Summe Ruheenergien der beiden  $O$ -Atome ist, da  $E_{\text{kin}} + U < 0$  ist.

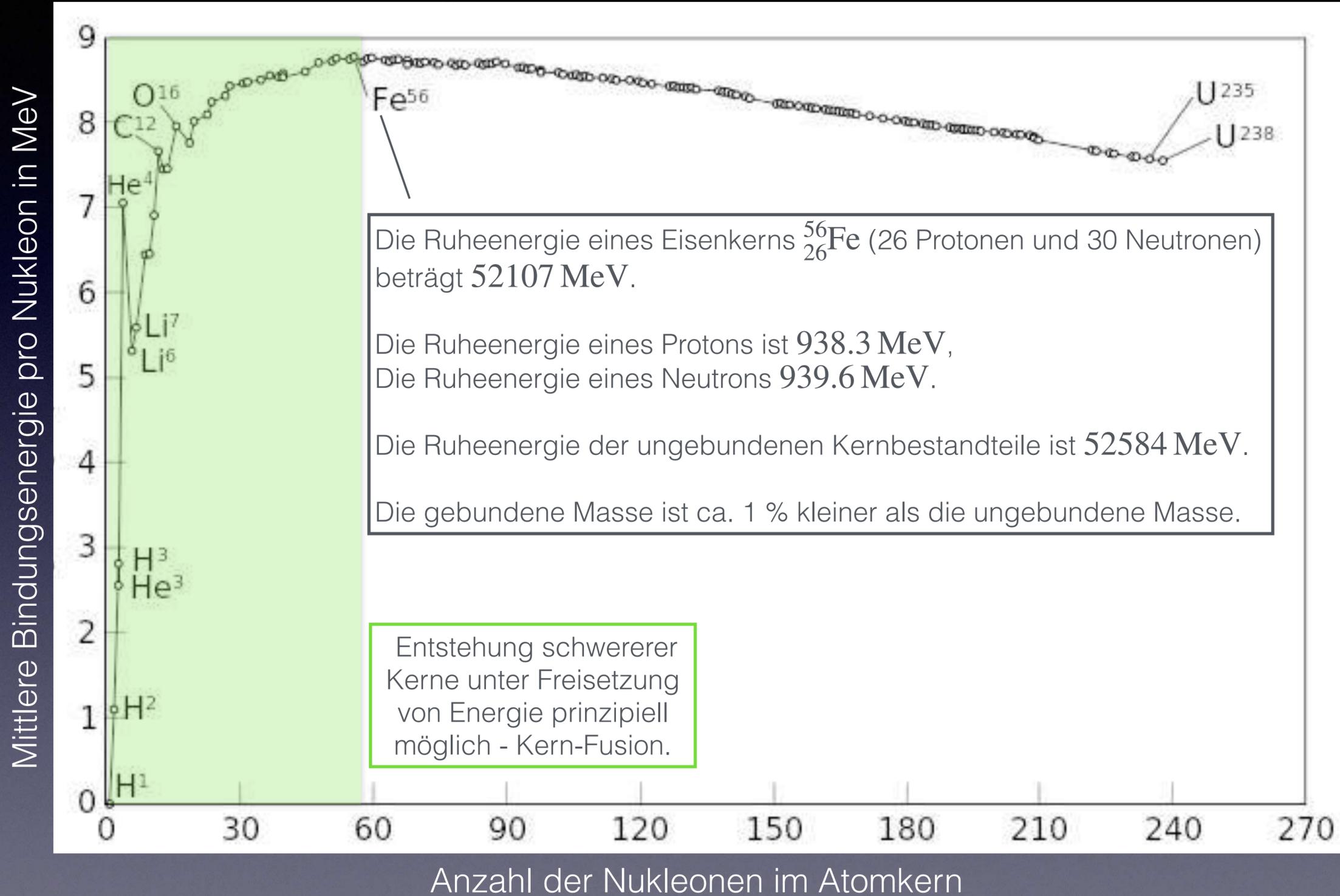


Bei der Bildung des zweiatomigen  $O_2$ -Moleküls wird etwas Energie freigesetzt, z. B. durch die Aussendung von Photonen. Dementsprechend muss Energie aufgewendet werden, um  $O_2$  in zwei Sauerstoffatome aufzuspalten. Diese Energie wird als „Bindungsenergie“ des Moleküls bezeichnet.

Auf diese Art über Masse nachzudenken, führt uns zu dem Schluss, dass ein heißer Block eine größere Masse hat als ein kalter Block. Wie wir im nächsten Kapitel näher erläutern werden, verfügt ein heißer Metallblock über mehr Wärmeenergie als ein kalter Metallblock, mit mehr kinetischer Energie der Atome und mehr potenzieller Energie in den Wechselwirkungen mit benachbarten Atomen (in unserem einfachen Modell eines Festkörpers als Federn dargestellt). Obwohl der Effekt viel zu gering ist, um direkt gemessen zu werden, führt die Äquivalenz von Masse und Energie, die in der Speziellen Relativitätstheorie verankert ist, zu der Schlussfolgerung, dass ein heißer Block tatsächlich massiver ist als ein kalter Block! Wirkt exakt derselbe Kraftstoß  $\vec{F} \Delta t$  auf beide Blöcke ein, so sollte die Geschwindigkeit des kalten Blocks sich geringfügig stärker verändern als die des heißen Blocks.

Bei chemischen Reaktionen ist es fast unmöglich, die Änderung der Masse direkt zu messen, aber bei nuklearen Wechselwirkungen sind die Änderungen leicht messbar. Betrachten wir die Kernbindungsenergie eines Eisenkerns, der 26 Protonen und 30 Neutronen, also insgesamt 56 Nukleonen, enthält. Wenn sich die Protonen und Neutronen durch die „starke“ (Kern-) Kraft aneinander binden, hat der entstehende Eisenkern eine Masse, die etwa 1 % geringer ist als die Gesamtmasse seiner einzelnen Bestandteile, wenn diese getrennt sind.

Die durchschnittliche Bindungsenergie ist mit ca. **8.8 MeV** pro Nukleon bei Eisen am größten. Leichtere Kerne (Wasserstoff bis Mangan) sind weniger fest gebunden und können im Prinzip unter Freisetzung von Energie zu dem fester gebundenen Eisen fusionieren. Tatsächlich bauen Fusionsreaktionen in Sternen von Wasserstoff zu immer schwereren Kernen auf und enden bei Eisen (schwerere Elemente entstehen in Supernova-Explosionen).



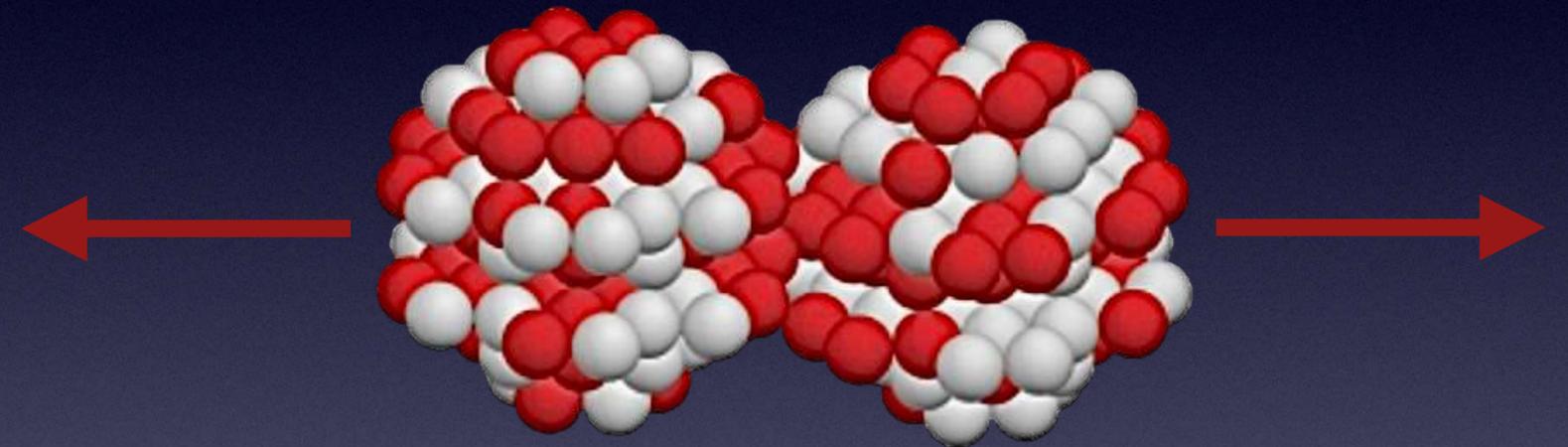
Grafik: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/kernreaktionen/grundwissen/massendefekt-und-bindungsenergie> (modifiziert)

# Kontrollpunkt 14

1. Der Kern des Deuteriumatoms („schwerer“ Wasserstoff) besteht aus einem Proton und einem Neutron. Es wurde experimentell beobachtet, dass ein hochenergetisches Photon („ $\gamma$ -Strahl“) mit einer Mindestenergie von **2.2 MeV** das Deuteron in ein freies Proton und ein freies Neutron aufspalten kann; dieser Vorgang wird „Photodissoziation“ genannt. (1) Welcher Bruchteil der Ruheenergie des Deuterons entspricht seiner Bindungsenergie?  
Anmerkung: Das Ergebnis wird zeigen, dass das Deuteronkern im Vergleich zum Eisenkern sehr leicht gebunden ist.

Die Kernspaltung von Uran führt zu einer leicht messbaren Veränderung der Massen. Die durchschnittliche Bindungsenergie pro Nukleon in Uran liegt bei etwa  $7.8 \text{ MeV}$ , so dass der Urankern weniger stark gebunden ist als ein Eisenkern, dessen Bindungsenergie pro Nukleon  $8.8 \text{ MeV}$  beträgt. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, aus der Spaltung eines Urankerns Energie zu gewinnen, die etwa  $0,1 \%$  seiner Ruheenergie (etwa  $940 \text{ MeV}$  pro Nukleon) entspricht. Auch wenn der Unterschied in der durchschnittlichen Bindungsenergie zwischen Eisen und Uran gering ist, so ist die bei einer Spaltung frei werdende Energie im Vergleich zur Energie einer chemischen Reaktion, an der nur die äußeren Elektronen eines Atoms, nicht aber der Kern beteiligt ist, enorm.

Ein Uran-235-Kern enthält 92 Protonen und 143 Neutronen. Die 92 Protonen üben starke elektrische Abstoßungskräfte aufeinander aus, aber die große Anzahl von Neutronen verteilt die Protonen über ein größeres Volumen und verringert die elektrischen Abstoßungskräfte. Die Neutronen und Protonen ziehen auch benachbarte Protonen mit starken Kernkräften an. (Eisen hat mit seinen 26 Protonen nur 30 Neutronen). Wenn ein langsames Neutron einen U-235-Kern trifft, kann sich der Kern zu einer hantelförmigen Gestalt verformen und auseinanderbrechen, weil die elektrische Abstoßung der Protonen nun die Anziehung der Nukleonen (kurze Reichweite) zueinander überwinden kann. Zusätzlich zu den beiden Hauptfragmenten der Spaltung gibt es im Endzustand normalerweise ein oder mehrere freie Neutronen. Die Spaltprodukte erreichen schnell eine sehr hohe Geschwindigkeit und lassen die 92 Elektronen des ursprünglichen Atoms zurück.



U-235-Kern bei der Spaltung.

Beispiel für Spaltung eines Uran-Atoms



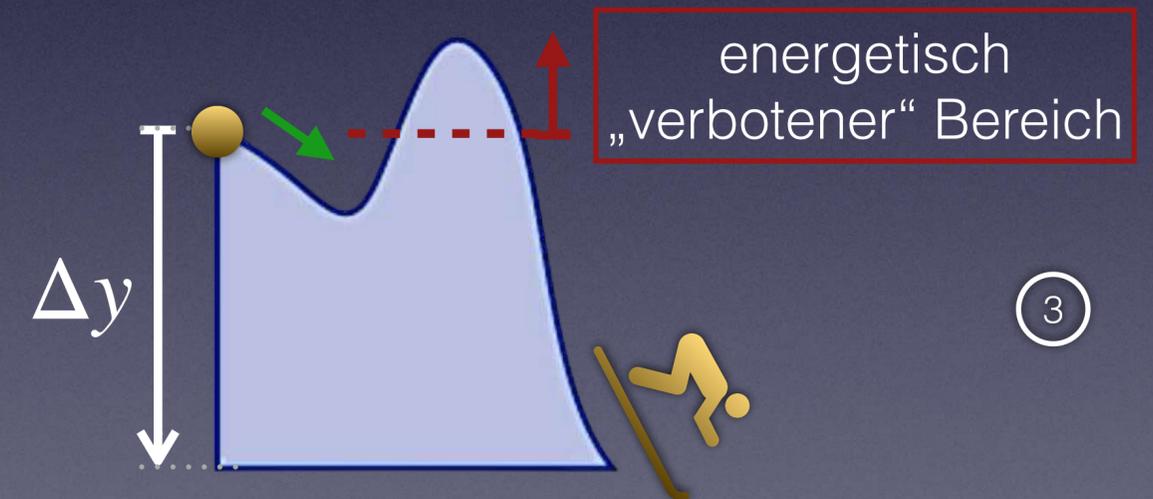
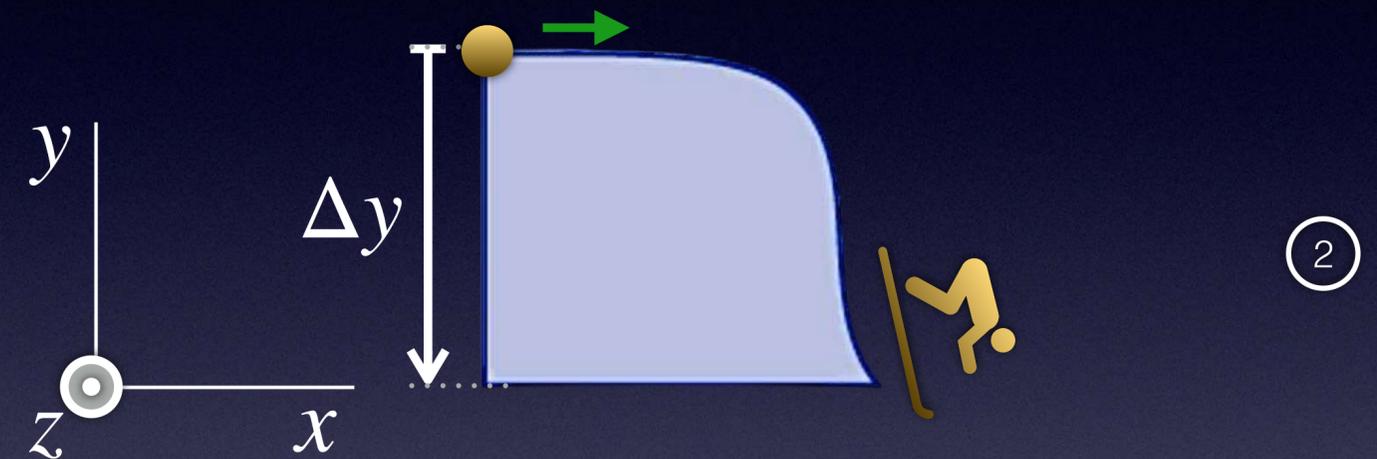
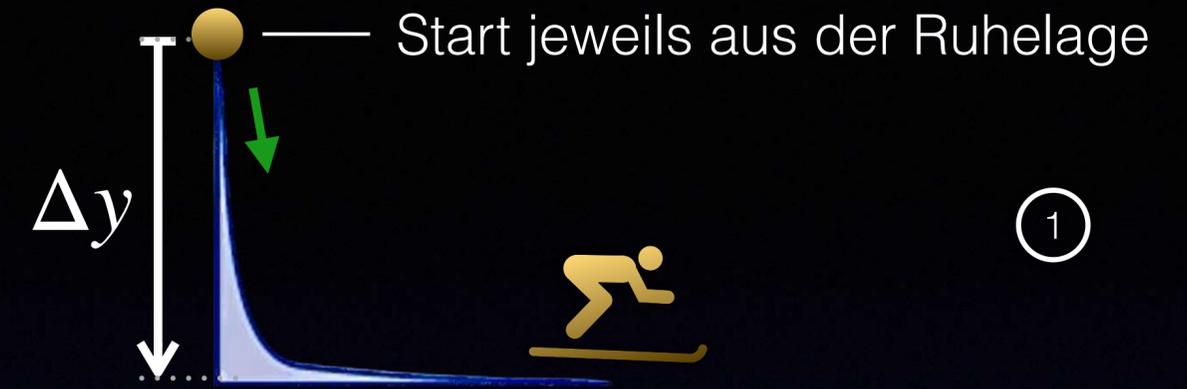
Überlegungen: Weshalb nutzen  
wir das „Prinzip Energie“?

Es erscheint jetzt ein günstiger Zeitpunkt zu sein, darüber nachzudenken, warum wir uns mit dem Thema Energie beschäftigt haben. **Auf dem Prinzip Energie beruhende Methoden ermöglichen es oft, den Aspekt eines Phänomens mit viel weniger Aufwand zu analysieren, als es die direkte Anwendung des Prinzips Impuls erfordern würde.** Ein eindrucksvolles Beispiel ist z. B. die Möglichkeit, die Fluchtgeschwindigkeit oder die Aufprallgeschwindigkeit einer Raumsonde für einen Planeten zu berechnen, ohne eine langwierige numerische Integration durchführen zu müssen.

Eine weitere leistungsstarke Eigenschaft von Energieanalysen besteht darin, dass wir damit leicht **vorhersagen** können, **ob ein bestimmter Prozess stattfinden kann oder nicht.** Ist zum Beispiel nicht genügend Energie vorhanden, so kann eine Rakete nicht den Einflussbereich eines Planeten verlassen, das Atom nicht ionisiert werden, die biochemische Reaktion nicht ablaufen oder ein Proton nicht in ein Neutron zerfallen.

Anwendungen des Prinzips Energie liefern jedoch weniger detaillierte Informationen als eine schrittweise numerische Integration mit dem Prinzip Impuls. Insbesondere sagen Energieanalysen nichts darüber aus, wie schnell ein Prozess abläuft: Zeit kommt in der Aussage über die Erhaltung der Energie nicht vor. Da Energie eine skalare Größe ist, sagt sie auch nichts über die Änderung der Bewegungsrichtung aus.

Nebenstehend ein Beispiel, das die Stärken und Schwächen von Energieanalysen verdeutlicht. Wenn wir die Reibung vernachlässigen können, sollte die Endgeschwindigkeit in allen drei Fällen die gleiche sein. Speziell in dem 3. Fall kommt der Skifahrer aber nie unten an, weil er bei der Abfahrt einen Bereich durchqueren müsste, der energetisch verboten ist.



Die Endgeschwindigkeit des Skifahrers ist „theoretisch“ am Fuße jeden Hügels gleich.

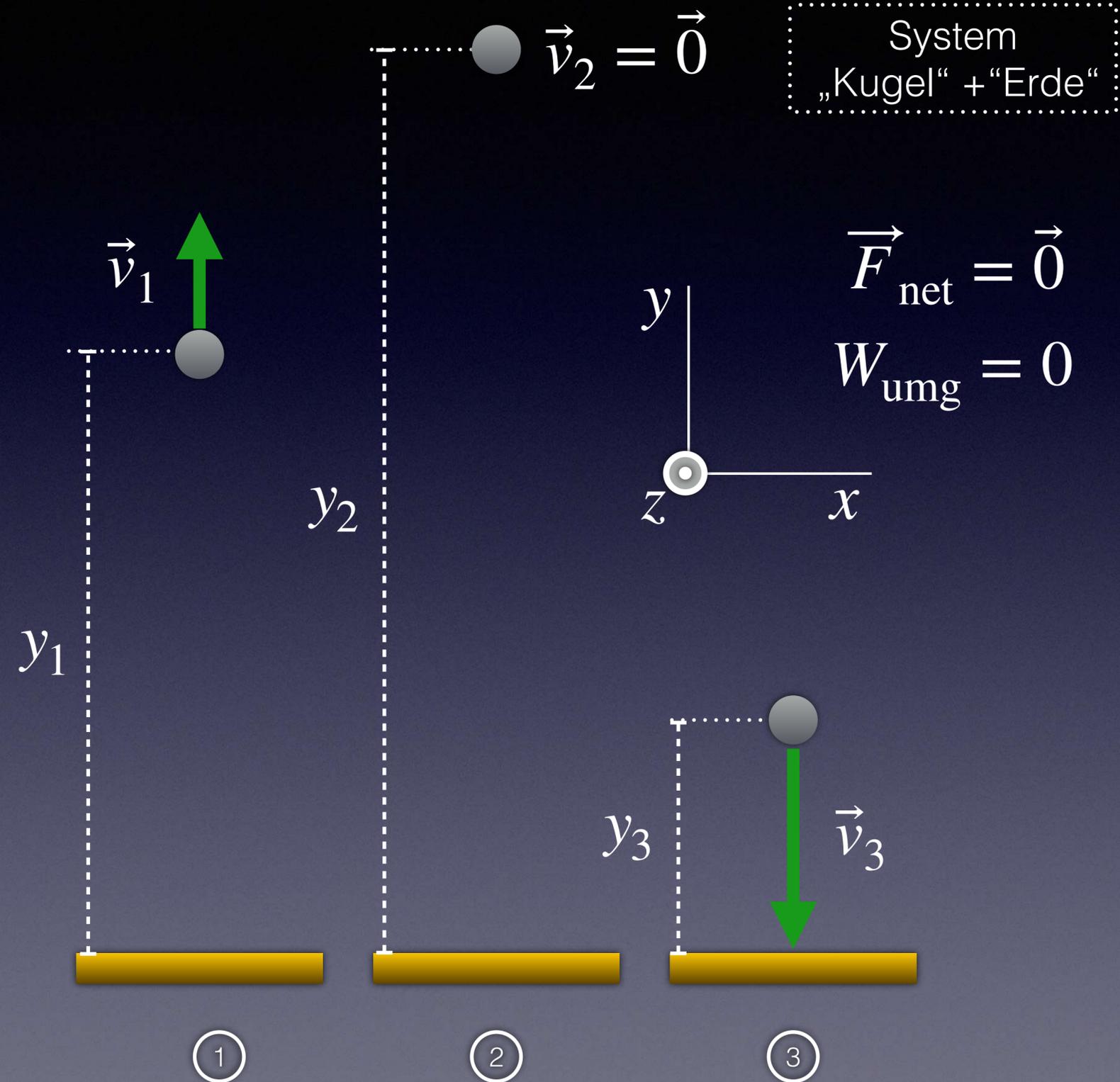
# Identifizieren von Anfangs- und Endzuständen

Bei manchen Prozessen gibt es nicht nur zwei, sondern mehrere identifizierbare Zustände. Es können zwei beliebige Zustände als Anfangs- und Endzustand gewählt werden. Die Begründung für die Wahl hängt davon ab, welche unbekannte Größe bestimmt werden soll. In diesem Abschnitt findest du zwei Beispiele für Situationen mit mehr als zwei Zuständen, einen einfachen Fall und einen etwas komplexeren Prozess.

## Vertikaler Wurf einer Kugel. Drei Zustände.

Wirf eine Metallkugel mit Masse  $m = 0.3 \text{ kg}$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_1$  gerade nach oben; der Luftwiderstand sei vernachlässigbar. Betrachte diese drei Zustände: (1)  $\vec{r}_1 = \langle 0, 7, 0 \rangle \text{ m}$ ,  $\vec{v}_1 = \langle 0, 10, 0 \rangle \text{ m/s}$ ; (2) Position mit maximaler Höhe,  $\vec{r}_2 = \langle 0, y_2, 0 \rangle \text{ m}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{0}$ . (3) Tiefer liegende Position mit  $\vec{r}_3 = \langle 0, 4, 0 \rangle \text{ m}$ ,  $\vec{v}_3 = \langle 0, v_{y_3}, 0 \rangle \text{ m/s}$ .

Berechne die maximale Höhe  $y_2$  und die Endgeschwindigkeit  $v_{y_3}$ .



System „Erde plus Kugel“: Übergang Zustand 1  $\rightarrow$  Zustand 2:

$$\Delta \left[ (M_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + (m_K c^2 + E_{\text{kin},K}) + U_{E \leftrightarrow K} \right] = W_{\text{umg}} = 0 .$$

Näherungen: Konstante Ruheenergien, vernachlässigbare Änderung von  $E_{\text{kin},E}$ , Approximation für  $U_{E \leftrightarrow K}$  nahe der Erdoberfläche,

$$|\vec{v}| \ll c:$$

$$m_K g y_2 - \left( \frac{1}{2} m_K v_{y_1}^2 + m_K g y_1 \right) = 0 \rightarrow y_2 = y_1 + \frac{v_{y_1}^2}{2g} .$$

System „Erde plus Kugel“: Übergang Zustand 2  $\rightarrow$  Zustand 3:

$$\Delta \left[ (M_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + (m_K c^2 + E_{\text{kin},K}) + U_{E \leftrightarrow K} \right] = W_{\text{umg}} = 0 .$$

Näherungen: Konstante Ruheenergien, vernachlässigbare Änderung von  $E_{\text{kin},E}$ ,  
Approximation für  $U_{E \leftrightarrow K}$  nahe der Erdoberfläche,  $|\vec{v}| \ll c$ :

$$\left( \frac{1}{2} m_K v_{y_3}^2 + m_K g y_3 \right) - m_K g y_2 = 0 \rightarrow v_{y_3} = \pm \sqrt{2g (y_2 - y_3)} .$$

In diesem Fall liefert der negative Wert für  $v_{y_3}$  die gesuchte Lösung, denn anders als das Prinzip Impuls gibt das Prinzip Energie keine Auskunft über die Richtung der Geschwindigkeit. Der positive Wert entspräche der umgekehrten Bewegung und wäre ebenfalls korrekt. Du musst „mit Gespür“ entscheiden, welche Wurzel für deine Fragestellung die richtige ist.

Hätten wir die Zustände 1 und 3 anstelle von 2 und 3 verwenden können, um die endgültige Geschwindigkeit  $v_{y_3}$  zu ermitteln? Ja, und wir sollten dasselbe Ergebnis erhalten:

$$\text{mit } y_2 = y_1 + \frac{v_{y_1}^2}{2g} \text{ und } v_{y_3} = \pm \sqrt{2g(y_2 - y_3)} \text{ folgt}$$

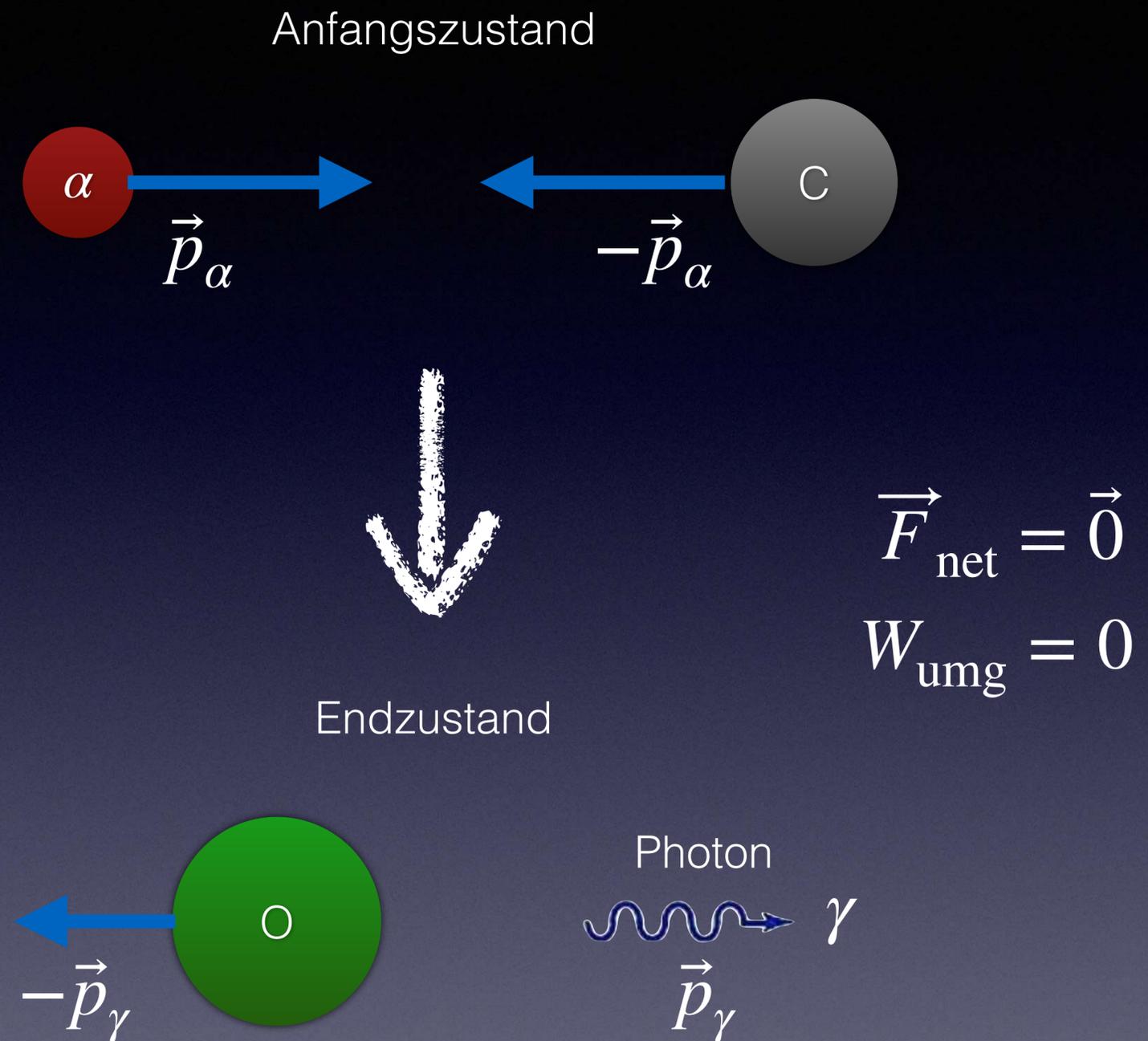
$$v_{y_3} = \pm \sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y_3)} .$$

Das gesuchte Ergebnis für die Endgeschwindigkeit kann also alleine aus den Daten der Zustände 1 und 3 abgeleitet werden. Bei der Anwendung des Prinzips Energie muss die Energie eines der Zustände mit der unbekanntem Größe zusammenhängen, deren Wert du ermitteln willst, z. B. eine Entfernung oder eine Geschwindigkeit.

Wenn ein energiereiches Alphateilchen (zwei Protonen und zwei Neutronen) mit einem Kohlenstoffkern (sechs Protonen und sechs Neutronen) zusammenstößt, kann eine Kernreaktion stattfinden, bei der ein Sauerstoffkern entsteht, dessen Ruheenergie höher ist als die eines gewöhnlichen Sauerstoffkerns (ein angeregter Zustand). Nach kurzer Zeit kann der angeregte Sauerstoffkern seine überschüssige Energie in Form eines Photons abgeben, das als „ $\gamma$ -Strahl“ bezeichnet wird und dessen Energie gleich  $10.352 \text{ MeV}$  ist. Ein Photon hat keine Ruheenergie, sondern nur kinetische Energie. Durch die Emission des Photons verringert sich die Ruheenergie des Kerns auf die eines gewöhnlichen Sauerstoffkerns. Der Sauerstoffkern erhält einen Impuls zurück, der dem Impuls des Photons entspricht und entgegengesetzt ist, aber eine vernachlässigbare kinetische Energie hat. Um die Analyse zu vereinfachen, gehen wir von einer Situation aus, in der das Alphateilchen und der Kohlenstoffkern mit gleich großen Impulsen starten, also  $\vec{p}_\alpha = -\vec{p}_C$  gilt. Die Geschwindigkeiten der Teilchen sollen außerdem klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sein.

Wir gehen zunächst der Frage nach, welchen Impuls  $|\vec{p}_\alpha|$  das Alphateilchen mindestens besitzen muss, damit die auf der vorangehenden Folie beschriebene Folge von Phänomenen auftritt?

Die verschiedenen Teilchen-Massen können als bekannt angenommen werden (Tabellenwerte).



$$E_f = E_i, \text{ mit } W_{\text{umg}} = 0$$

$$(m_{\text{O}}c^2 + E_{\text{kin,O}}) + E_{\text{kin},\gamma} + U_{\text{O}\leftrightarrow\gamma} = (m_{\alpha}c^2 + E_{\text{kin},\alpha}) + (m_{\text{C}}c^2 + E_{\text{kin,C}}) + U_{\alpha\leftrightarrow\text{C}}$$

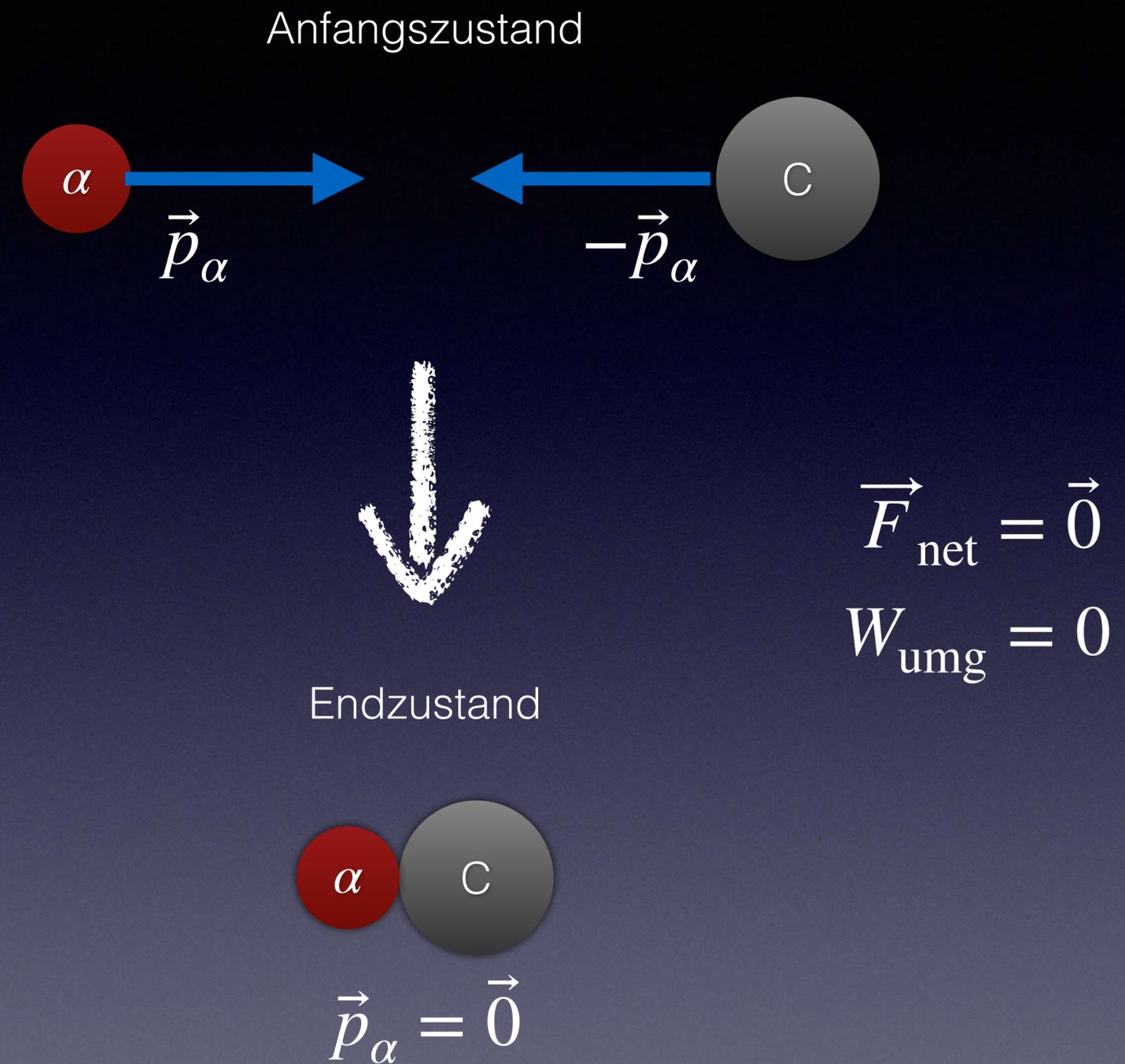
1.  $U_{\text{O}\leftrightarrow\gamma} = 0$ , da ein Photon keine Ladung trägt (keine elektrische Wechselwirkung).
2.  $U_{\alpha\leftrightarrow\text{C}} \approx 0$ , da die beiden Teilchen anfänglich sehr weit voneinander entfernt sein sollen; ferner
3.  $E_{\text{kin},\alpha} \approx \frac{|\vec{p}_{\alpha}|^2}{2m_{\alpha}}$ ,  $E_{\text{kin,C}} \approx \frac{|\vec{p}_{\alpha}|^2}{2m_{\text{C}}}$  sowie
4.  $E_{\text{kin,O}} \approx 0$ , da Sauerstoff verhältnismäßig schwer ist.

Aus den vorangehenden Gleichungen und Annahmen folgt:

$$\left| \vec{p}_\alpha \right| = \sqrt{\frac{(m_O - m_\alpha - m_C) c^2 + E_{\text{kin},\gamma}}{\frac{1}{2m_\alpha} + \frac{1}{2m_C}}}$$

Man beachte, dass  $(m_O - m_\alpha - m_C) < 0$  ist, was durch  $E_{\text{kin},\gamma}$  (über-) kompensiert wird. Das numerische Ergebnis für den (minimalen) Impuls ist  $\left| \vec{p}_\alpha \right| = 8.18 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

Da beide Teilchen, das Alphateilchen und der Kern des Kohlenstoff-Atoms, positiv geladen sind, stoßen sie sich gegenseitig ab. Wenn die Teilchen zu Beginn nicht genügend kinetische Energie haben, können sie sich nicht nahe genug kommen, um sich zu berühren, und die Kernreaktion wird nicht stattfinden. Finde den minimalen Anfangsimpuls  $|\vec{p}_\alpha|$ , den jedes Teilchen haben muss, um sich nahe genug zu kommen, damit sie sich gerade berühren. Experimente zeigen, dass der Radius eines Kerns, der  $N$  Nukleonen enthält, ungefähr  $r_a = (1.3 \times 10^{-15} \text{ m}) \times N^{1/3}$  ist.



$$E_f = E_i, \text{ mit } W_{\text{umg}} = 0$$

$$\left( m_\alpha c^2 + E_{\text{kin},\alpha,f} \right) + \left( m_C c^2 + E_{\text{kin},C,f} \right) + U_{\alpha \leftrightarrow C,f} = \left( m_\alpha c^2 + E_{\text{kin},\alpha,i} \right) + \left( m_C c^2 + E_{\text{kin},C,i} \right) + U_{\alpha \leftrightarrow C,i}$$

1.  $U_{\alpha \leftrightarrow C,i} \approx 0$ , da die beiden Teilchen anfänglich sehr weit voneinander entfernt sein sollen;

2.  $U_{\alpha \leftrightarrow C,f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(6e)}{|\vec{r}_r|}$  (positives Vorzeichen wegen Abstoßung), ferner

3.  $E_{\text{kin},\alpha,i} \approx \frac{|\vec{p}_\alpha|^2}{2m_\alpha}$ ,  $E_{\text{kin},C,i} \approx \frac{|\vec{p}_\alpha|^2}{2m_C}$  sowie

4.  $E_{\text{kin},\alpha,f} = 0$  und  $E_{\text{kin},C,f} = 0$ .

Aus den vorangehenden Gleichungen und Annahmen folgt:

$$\left| \vec{p}_\alpha \right| = \sqrt{\frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{12e^2}{|\vec{r}_f|}}{\frac{1}{2m_\alpha} + \frac{1}{2m_C}}}$$

Das numerische Ergebnis für den (minimalen) Impuls ist hier  $\left| \vec{p}_\alpha \right| = 7.39 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

Ergebnis gesamter Prozess:  $|\vec{p}_\alpha| = 8.18 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  .

Ergebnis aus Kontakt:  $|\vec{p}_\alpha| = 7.39 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  .

Wir sehen, dass der Impuls, der erforderlich ist, um den angeregten Sauerstoffkern  $\text{O}^*$  zu erzeugen, größer ist als der Impuls, der erforderlich ist, um die Barriere der elektrischen potentiellen Energie zu überwinden und das Alphateilchen sowie den Kohlenstoff-Kern in Kontakt zu bringen. Bei dieser Reaktion reicht es somit nicht aus, nur einen Kontakt herzustellen. Es wird etwas mehr Energie benötigt, um den angeregten Sauerstoffkern  $\text{O}^*$  zu erzeugen, bevor dieser in ein „normales“ Sauerstoff-Atom  $\text{O}$ , unter Aussendung eines Photons, übergeht.

# Energie in numerischen Modellen

In diesem Kapitel haben wir verschiedene Systeme analysiert, an denen so unterschiedliche Objekte wie Alphateilchen, Asteroiden oder Raumsonden beteiligt waren. Wir konnten Schlussfolgerungen ziehen wie: „Wenn die Objekte so weit voneinander entfernt sind, besitzt das System so viel potenzielle Energie“ oder „Diese Objekte haben nicht genug kinetische Energie, um sich voneinander trennen zu können“. Wir haben jedoch niemals die genaue Bahn eines sich bewegenden Objekts vorhergesagt. Wir haben Grenzen gesetzt, was passieren kann, aber wir haben keine detaillierten Vorhersagen über die Bewegung gemacht.

Da das Prinzip Energie weder Richtung noch Zeit beinhaltet, sagt es uns nicht, in welche Richtung sich Objekte bewegen oder wie lange sie brauchen, um eine bestimmte Position zu erreichen. Dennoch kann die Energie in (iterativen) numerischen Modellen eine wichtige Rolle spielen.

Wir wissen, dass wir bei Verwendung einer zu großen Zeitschrittgröße  $\Delta t$  in einem iterativen Modell Trajektorien  $\vec{r}(t)$  vorhersagen, die nicht „naturnähnlich“ genug aussehen. Bei solchen

Modellen kann die Berechnung der kinetischen und potenziellen Energie eines Systems wichtige quantitative Informationen über die Genauigkeit des Modells liefern. Die nebenstehende Abbildung zeigt Ergebnisse

für ein vertikales Federpendel. Zur Berechnung der Bewegung wurde das Prinzip

Impuls iterativ angewendet. Bei großem Zeitschritt  $\Delta t = 0.25$  s wird die Bahn der Kugel nur grob abgetastet. Eine Folge davon

ist, dass die Summe  $E$  aus kinetischer Energie

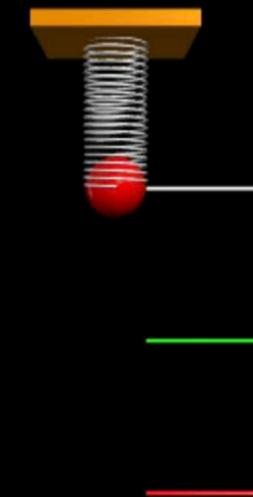
$E_{\text{kin}}$  und der in der Feder gespeicherter Energie  $E_{\text{fed}}$  nicht konstant ist, wie man dies theoretisch erwarten müsste. Allerdings weist

$E$  im zeitlichen Mittel keinen Trend auf.

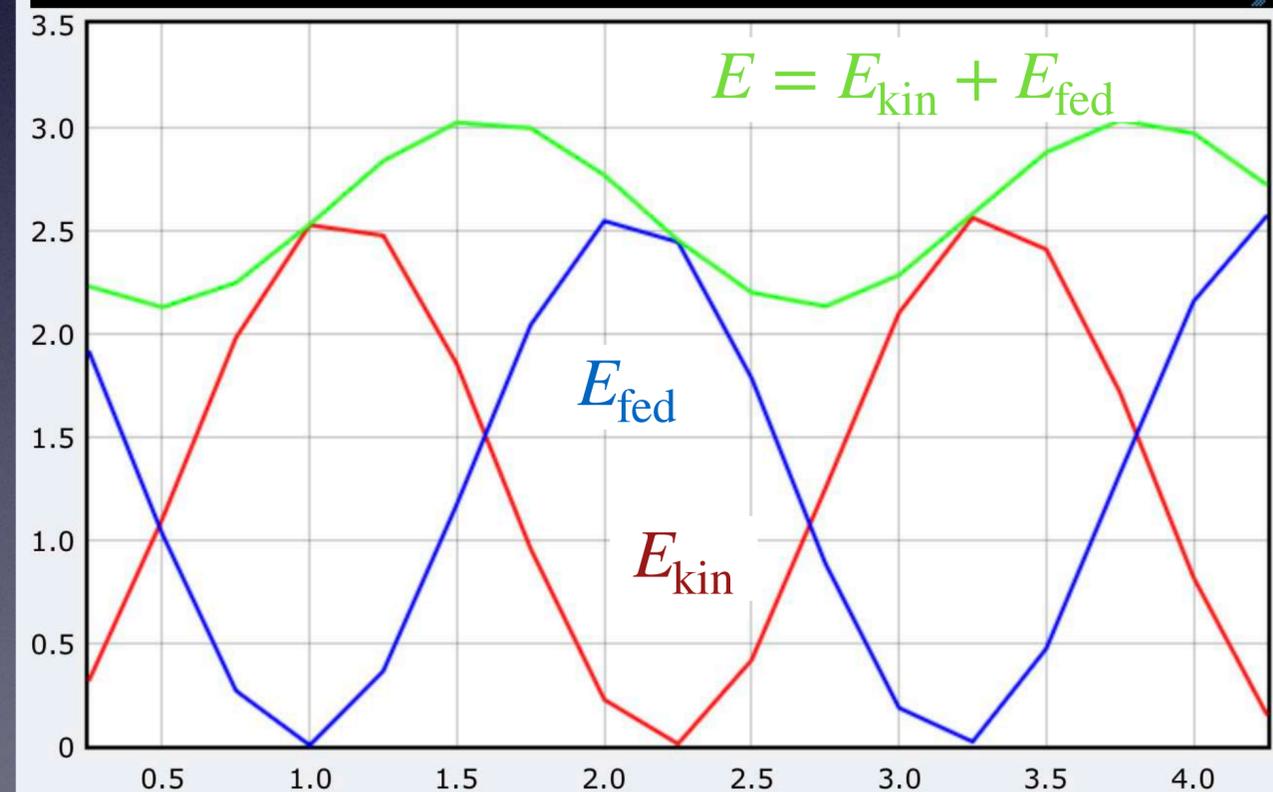
$$\Delta t = 0.25 \text{ s}$$

$$T \approx 4.44 \text{ s}$$

$$E = 2.5 \text{ J}$$

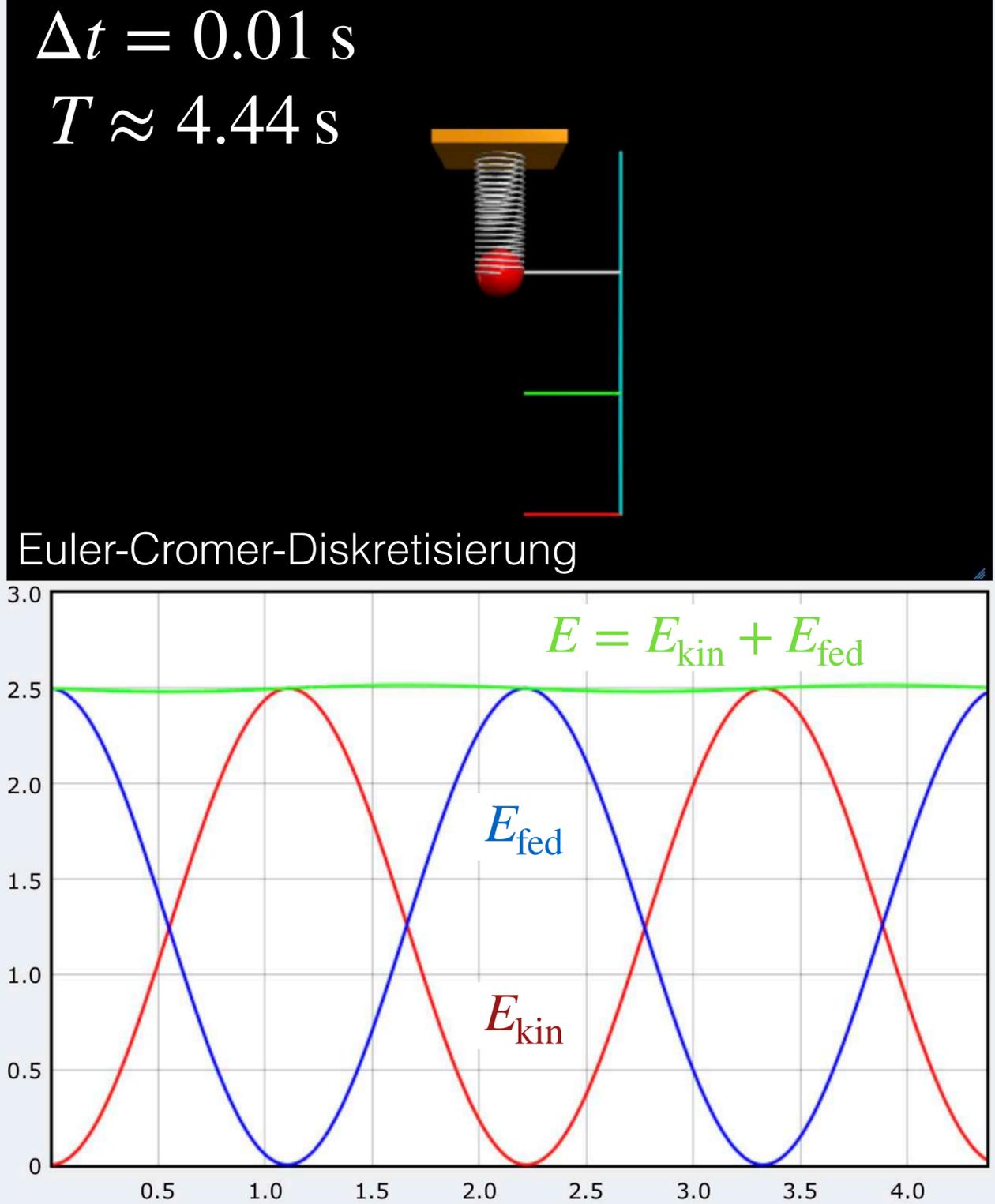


Euler-Cromer-Diskretisierung



Die Grafik auf der vorangehenden Folie hat uns eine offensichtliche Verletzung des Prinzips Energie aufgezeigt. Die Tatsache, dass die Summe  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{fed}}$  nicht konstant ist, zeigt uns, dass unsere Berechnungen nicht genau genug sind. Dies ist eine wichtige Information, die wir auch dann erhalten können, wenn wir nicht wissen, wie die Bewegung des Systems wirklich aussehen sollte.

Reduzieren wir den Zeitschritt  $\Delta t$ , so wird die Bewegung des vertikalen Federpendels sehr viel häufiger, und damit auch genauer, abgetastet. Wir können in der nebenstehenden Abbildung erkennen, dass das Prinzip Energie, repräsentiert durch  $E_{\text{kin}} + E_{\text{fed}}$ , damit sehr viel besser als zuvor erfüllt wird.



# Ein Rätsel

Der Grundsatz des Prinzips Energie, der Energieerhaltung, besagt, dass, wenn die Energie eines Systems zunimmt, die Energie der Umgebung um den gleichen Betrag abnehmen muss.

Wir können zeigen, dass es ein „Rätsel“ bezüglich der Energie in der Umgebung eines Sterns gibt, dessen kinetische Energie sich aufgrund einer Wechselwirkung mit einem anderen Stern erhöht.

Betrachten wir zwei Sterne gleicher Masse, die sich zunächst in Ruhe befinden und sehr weit voneinander entfernt sind. Die beiden Sterne verrichten Arbeit aneinander:

$$\Delta E_1 = W_{2 \rightarrow 1} \text{ , mit „Stern 1“ als System,}$$

$$\Delta E_2 = W_{1 \rightarrow 2} \text{ , mit „Stern 2“ als System.}$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen für die Sterne 1 und 2 addieren, erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = W_{2 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2} .$$

Wenn man  $(W_{2 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2})$  auf die linke Seite der Gleichung überführt und den negativen Wert dieser Größe in  $\Delta U_{1 \leftrightarrow 2}$  umbenennt, erhält man als Ergebnis

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta U_{1 \leftrightarrow 2} = 0$$

die Energiegleichung für das aus den Sternen 1 und 2 aufgebaute System. Wir interpretieren diese Gleichung so, dass die potenzielle Gravitationsenergie  $U$  dieses Systems mit zunehmender kinetischer Energie der Sterne abnimmt. Diese Betrachtungsweise führt zu physikalisch korrekten Ergebnissen und ist die Sichtweise, die wir in diesen einführenden Folien verwenden.

Es ist jedoch nicht schwer zu zeigen, dass es ein „Rätsel“ bezüglich des Energieflusses zwischen einem der Sterne und seiner Umgebung gibt. Betrachten wir Stern 1 als System. Da es sich um ein einzelnes Objekt handelt, gibt es keine potenzielle Energie  $U$ . Die Energie von Stern 1 nimmt durch die an ihm verrichtete Arbeit zu:  $\Delta E_1 = W_{2 \rightarrow 1}$ . Da es sehr gute Gründe gibt, an die Energieerhaltung zu „glauben“, erwarten wir, dass die Umgebung von Stern 1 genau so viel Energie verliert, wie Stern 1 mit  $\Delta E_1$  hinzugewinnt. Aber nein, Stern 2 verliert keine Energie, sondern gewinnt Energie, und zwar in gleichem Maße  $\Delta E_2 = \Delta E_1$ , da die beiden Sterne die gleiche Masse haben und die Situation symmetrisch ist. Was gibt es sonst noch in der Umgebung, das eine Energieveränderung erfahren könnte? Die einzige andere Materie ist der Stern 2, aber seine Zunahme an Energie ist mit dem Prinzip Energie unvereinbar. Offensichtlich ist unser Modell der Welt unvollständig.

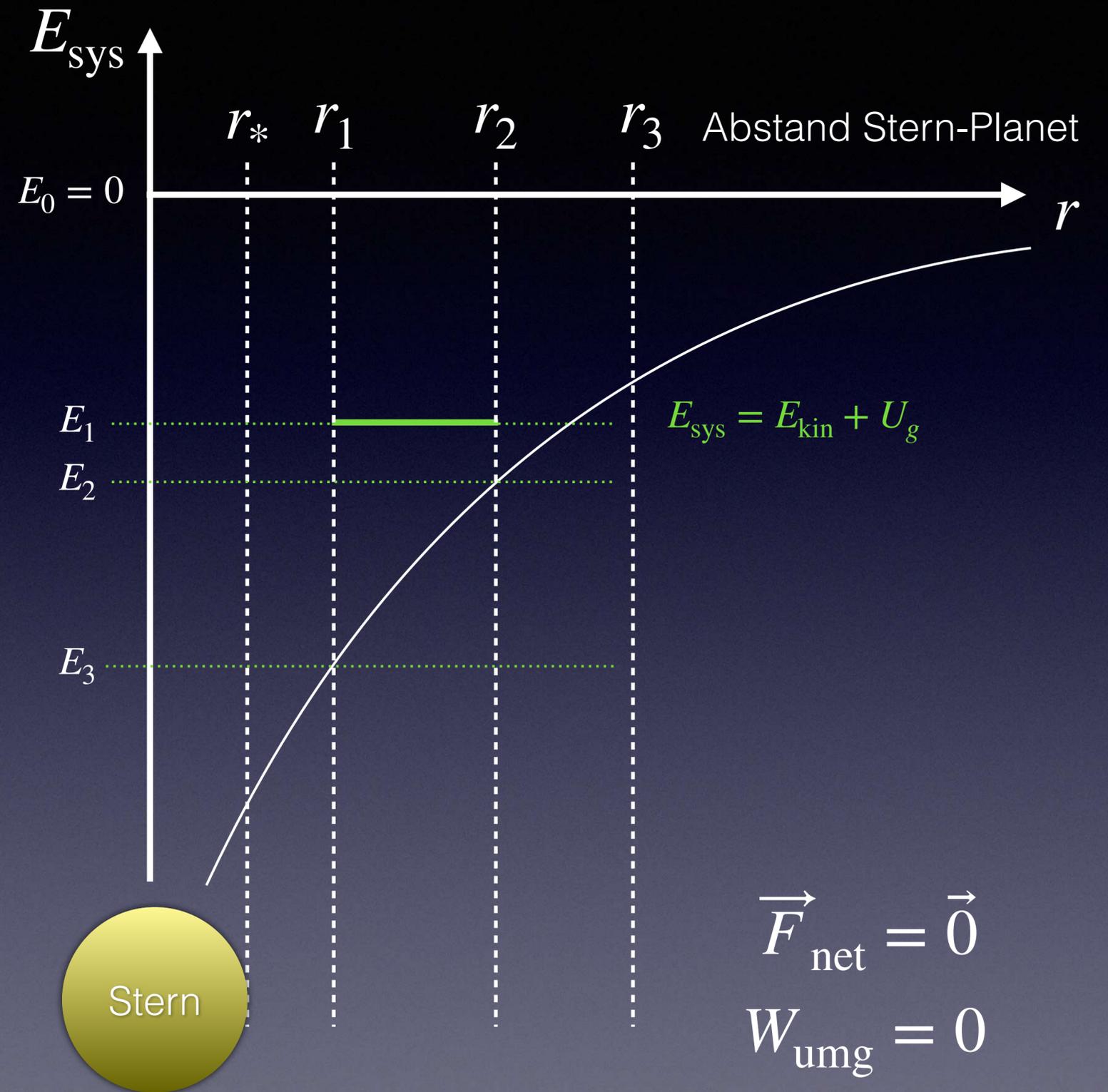
Um diese Situation vollständig analysieren zu können, müssen wir die abstrakte Idee eines „Feldes“ einführen. Felder, die Gegenstand späterer Kapitel dieser Foliensammlung sind, werden mit Objekten in Verbindung gebracht, die Masse (Gravitationsfelder) oder Ladung (elektrische und magnetische Felder) haben, und sich über den gesamten Raum erstrecken. Es ist die im Gravitationsfeld gespeicherte Energie, die für die Energie in der Umgebung von Stern 1 verantwortlich ist. Diese Energieänderung ist genau der Betrag, um den sich die potenzielle Energie des Zwei-Sterne-Systems ändert:  $\Delta U = - (\Delta E_1 + \Delta E_2)$ . Da die potenzielle Energie  $U$  die Energieänderungen korrekt wiedergibt, müssen wir die Feldenergie in unseren Berechnungen nicht berücksichtigen. Unsere Analysen, die sich auf die Teilchen und ihre Wechselwirkungen und nicht auf ihre Umgebung konzentrieren, sind korrekt. Die Schwierigkeit, die Energie in der Umgebung eines Sterns zu berücksichtigen, deutet jedoch darauf hin, dass wir irgendwann Felder in unsere Modelle der Welt mit einbeziehen müssen.

# Kontrollpunkt 15

1. Erläutere kurz deine Antworten auf jede der folgenden Fragen: (1) du hältst ein Buch der Masse  $1 \text{ kg}$  ruhig in der Hand. Wie viel Arbeit verrichtest du an dem Buch? (2) Wie viel Energie wird an einem Kreispendedel von der Schnur auf die Masse in einer Umdrehung übertragen? (3) Wie viel Arbeit wird bei einer horizontal an einer Feder schwingenden Masse von der Feder auf die Masse in einem vollständigen Zyklus verrichtet? (4) In einem halben Zyklus?
2. Du ziehst einen Klotz der Masse  $m$  mit einer konstanten Kraft  $\vec{F}$  über einen reibungsfreien Tisch. Mit derselben konstanten Kraft ziehst du einen zweiten Klotz mit größerer Masse  $M$ ,  $M > m$ . Die Klötze befinden sich zunächst im Ruhezustand. (1) Wenn du die Klötze über die gleiche Strecke  $\Delta\vec{r}$  ziehst, welcher hat dann die größere kinetische Energie und welcher Block den größeren Impuls? (2) Wenn du stattdessen die Klötze für die gleiche Zeit  $\Delta t$  ziehst, welcher Klotz hat die größere kinetische Energie und welcher hat den größeren Impuls?

# Kontrollpunkt 16

Angenommen,  $E_{\text{kin}} + U_g$  des Systems ist  $E_1$ . (1) Die potenzielle Energie des Systems nimmt ab, wenn sich der Planet von  $r_1$  nach  $r_2$  bewegt. Richtig? (2) Wenn der Abstand zwischen den beiden Körpern gleich  $r_2$  ist, wie groß ist die kinetische Energie des Systems, ausgedrückt durch die  $E_i$ ? (3) Das System ist ein gebundenes System. Richtig? (4) Der Planet wird entkommen. Richtig? (5) Wenn der Abstand zwischen den beiden Körpern gleich  $r_1$  ist, wie groß ist die kinetische Energie des Systems, ausgedrückt durch die  $E_i$ . (6) Die kinetische Energie des Systems ist dann größer, wenn der Abstand zwischen Stern und Planet gleich  $r_1$  ist, als wenn der Abstand zwischen den beiden Körpern gleich  $r_2$  ist. Richtig? (7) Weshalb kann der Abstand  $r_3$  nicht erreicht werden?



# Kontrollpunkt 17

1. Die in Sternen stattfindende Kernfusion ist einer der wichtigsten natürlichen Prozesse. In Fusionsreaktoren auf der Erde sollen Deuterium und Tritium „fusioniert“ werden. Reaktionsgleichung:  
$${}^2_1\text{D} + {}^3_1\text{T} \rightarrow {}^4_2\text{He} (3.5 \text{ MeV}) + \text{n}^0 (14.1 \text{ MeV}) .$$
  
(1) Erkläre die Verteilung der Energie auf die Fusionsprodukte! (2) Weshalb ist die frei werdende Energie bei dieser Reaktion besonders hoch?

Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: (1)  $E \approx 5.24 \times 10^{-13} \text{ J}$ ; (2)  $E_0 \approx 0.81 \times 10^{-13} \text{ J}$ ; (3)  $E_{\text{kin}} \approx 4.43 \times 10^{-13} \text{ J}$ ; (4)  $E \approx 5.47 \times 10^{-13} \text{ J}$ , 4.4 % mehr Energie für 0.1 % mehr Geschwindigkeit.

K2.1: (1)  $|\vec{v}| \approx 12.1 \text{ m/s}$ ; (2)  $m_{\text{fuel}} \approx 1.2 \times 10^{-12} \text{ kg}$ .

K3.1:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \langle -18, -8, -5 \rangle \text{ m}$ ;  $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ ,  
 $W = \langle -18, -8, -5 \rangle \cdot \langle -0.03, -0.04, -0.09 \rangle \text{ J}$ , ergibt  
 $W = (18 \times 0.03 + 8 \times 0.04 + 5 \times 0.09) \text{ J} \approx 1.31 \text{ J}$ .

K4.1: (1) Negative Arbeit der Gravitationskraft; (2) Geleistete Arbeit mit  $\vec{F} \approx \langle 0, -mg, 0 \rangle$  und  $\Delta\vec{r} = \langle 0, \Delta y, 0 \rangle$  folgt  $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \approx -mg\Delta y$ .

K5.1: (1)  $W < 0$ ,  $\Delta E_{\text{kin}} < 0$ ; (2)  $W > 0$ ,  $\Delta E_{\text{kin}} > 0$ ; (3)  $W < 0$ ,  $\Delta E_{\text{kin}} < 0$ ; (4)  $W \approx 0$ ,  $\Delta E_{\text{kin}} \approx 0$ ; (5)  $W \approx 0$ ,  $\Delta E_{\text{kin}} \approx 0$ .

K6.1: (1) Bewegung in x-Richtung. Kraft  $F_x = -k_s x$ . Arbeit beim Abbremsen  $W = - \int_0^x (k_s x') dx' = 0.5 k_s x^2$ . Ergebnis:  $W = -2 \text{ J}$ . (2) Negatives

Vorzeichen für  $W$  korrespondiert mit Abnahme der kinetischen Energie beim Abbremsen.

K7.1: (1)  $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ ,  $W = -120 \text{ J}$ ; (2)  $E_{\text{kin},f} = E_{\text{kin},i} + W$ ,

$E_{\text{kin},f} = 490 \text{ J} - 120 \text{ J} = 370 \text{ J}$ ; (3)  $|\vec{v}_f| \approx \sqrt{\frac{2E_{\text{kin},f}}{m}}$ ,  $|\vec{v}_f| \approx 0.608 \text{ m/s}$ .

K8.1:  $\gamma \approx 40.8$ , also  $E = \gamma E_0$ ; (2)  $E_{\text{kin}} \approx 39.8 \times E_0$ ; (3)  $E \gg E_0$ ; (4)  $E \ll E_0$ .

K9.1: (1) System „Ball und Erde“

$$\Delta \left[ (m_E c^2 + E_{\text{kin},E}) + (m_B c^2 + E_{\text{kin},B}) + U_{g,E \leftrightarrow B} \right] = W_{\text{umg}} = 0, \text{ mit}$$

Vereinfachungen folgt  $E_{\text{kin},B,f} - E_{\text{kin},B,i} + U_{g,f} - U_{g,i} = 0$ ,

$$\frac{1}{2} m_B |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m_B |\vec{v}_i|^2 + m_B g y_f - m_B g y_i \approx 0, \text{ aufgelöst nach } |\vec{v}_f|$$

$$|\vec{v}_f| \approx \sqrt{|\vec{v}_i|^2 + 2g(y_i - y_f)}, \vec{v}_f \approx \langle 0, -18.2, 0 \rangle \text{ m/s, negatives}$$

Vorzeichen, da der Ball nach unten, entgegen der y-Richtung fällt.

K9.2: (1) Derselbe Ansatz wie bei K9.1 liefert

$$\frac{1}{2}m_B \left| \vec{v}_f \right|^2 - \frac{1}{2}m_B \left| \vec{v}_i \right|^2 + m_B g y_f - m_B g y_i \approx 0, \text{ eingesetzt}$$

$$\frac{1}{2}m_B v_{x,i}^2 - \frac{1}{2}m_B \left( v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 \right) + m_B g y_f - m_B g y_i \approx 0, \text{ daraus folgt}$$

$$y_f \approx y_i + \frac{v_{y,i}^2}{2g}. \text{ (2) Zu } x_f \text{ kann mit dem Prinzip Energie keine Aussage}$$

gemacht werden, da die Zeit bis zum Erreichen des Scheitelpunkts der Flugbahn nicht bekannt ist. Hierfür müsste das Prinzip Impuls iterativ eingesetzt werden.

K10.1: (1) System „Proton plus Proton“; (2) Beide Protonen verhalten sich symmetrisch,  $\Delta \left[ \left( 2m_p c^2 + 2E_{\text{kin},p} + U_{c,p \leftrightarrow p} \right) \right] = W_{\text{umg}} = 0$ ,

$2E_{\text{kin},p,f} - 2E_{\text{kin},p,i} + U_{c,p \leftrightarrow p,f} - U_{c,p \leftrightarrow p,i} = 0$ , mit  $E_{\text{kin},p,f} \approx 0$  und

$U_{c,p \leftrightarrow p,i} \approx 0$  folgt  $U_{c,p \leftrightarrow p,f} = 2E_{\text{kin},p,i}$ , und damit  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_f|} = 2E_{\text{kin},p,i}$ ;

(3) Der Term mit der Potenziellen Energie enthält den gesuchten Abstand;

(4)  $|\vec{r}_f| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2E_{\text{kin},p,i}}$ , Ergebnis  $|\vec{r}_f| \approx 7.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ , Vergleich

mit  $d_p \approx 1.7 \times 10^{-15} \text{ m}$  lässt das Berechnungsergebnis realistisch erscheinen.

K11.1: (1) Zustände 1 und 2; (2) Zustand 3; (3) Zustand 2.

K12.1: (1) Zustand 1 zeigt einen finalen „Absturz“ in die Sonne. Bei Zustand 2 ist der Abstand konstant und der Planet bewegt sich auf einer Kreisbahn um „seine“ Sonne. Bei Zustand 3 variiert der Abstand zwischen einem Minimal- und einem Maximalwert; dies ist typisch für elliptische Umlaufbahnen.

K13.1: (1) Entspricht „exakt“ der Umkehrung des Falls einer Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit  $|\vec{v}_f|$  beim Aufschlag erhält

$$\text{man: } \frac{1}{2}m_s |\vec{v}_f|^2 - G \frac{M_E m_s}{R_E} = 0 \rightarrow |\vec{v}_f| = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} .$$

K14.1: (1) prozentuale Bindungsenergie  $\frac{W}{E_f - W} \times 100$ ,  $E_f = m_p c^2 + m_n c^2$ .

Freies Proton  $m_p c^2 \approx 938.3 \text{ MeV}$ , freies Neutron  $m_n c^2 \approx 939.6 \text{ MeV}$ , Ionisierungsenergie  $W = 2.2 \text{ MeV}$ . Für Deuterium beträgt die Bindungsenergie nur ca. 0.11% der Ruheenergie des Kerns. Für Eisen liegt dieser Anteil bei annähernd 1%.

K15.1: (1)  $W = 0$ ; (2)  $W = 0$ ; (3)  $W = 0$ ; (4)  $W = 0$ .

K15.2: (1)  $E_{\text{kin},M} = E_{\text{kin},m} \equiv \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ ; wegen  $|\vec{p}| \approx \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$  folgt  $|\vec{p}_M| > |\vec{p}_m|$ . (2)  $\vec{p}_M = \vec{p}_m \equiv \vec{F} \Delta t$ ; wegen  $E_{\text{kin}} \approx |\vec{p}|^2 / (2m)$  folgt  $E_{\text{kin},M} < E_{\text{kin},m}$ .

K16.1: (1) Falsch; (2)  $E_1 - E_2$ ; (3) Richtig; (4) Falsch; (5)  $E_1 - E_3$ ; (6) Richtig; (7) energetisch verbotener Bereich.

K17.1: (1)  $\vec{p}_{\text{He}} + \vec{p}_{\text{n}} = \vec{0}$ ,  $m_{\text{He}} \approx 4 \times m_{\text{n}}$  und  $E_{\text{kin}} \approx |\vec{p}|^2 / (2m)$  folgt  $E_{\text{kin,n}} \approx 4 \times E_{\text{kin,He}}$ ; (2) Die Bindungsenergie ist für  ${}^2_1\text{D}$  und  ${}^3_1\text{T}$  relativ klein, für  ${}^4_2\text{He}$  aber relativ groß, deshalb wird bei dieser Fusion sehr viel Energie frei. Siehe auch Folie.

# Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 7 - Innere Energie