Moderne Mechanik

Teil 5

Bestimmung von Kräften aus einem Bewegungsablauf

Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- alle Kräfte systematisch zu identifizieren, die auf ein System wirken,
- die Werte zunächst nicht bekannter 3D-Kräfte zu bestimmen, die auf ein System wirken, dessen Bewegung bekannt ist, und
- nicht-geradlinige Bewegungsabläufe im Hinblick auf Änderungen der parallelen und senkrechten Komponenten von $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ zu analysieren und einen Zusammenhang mit der auf das System einwirkenden (Netto-) Kraft $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ herzustellen.

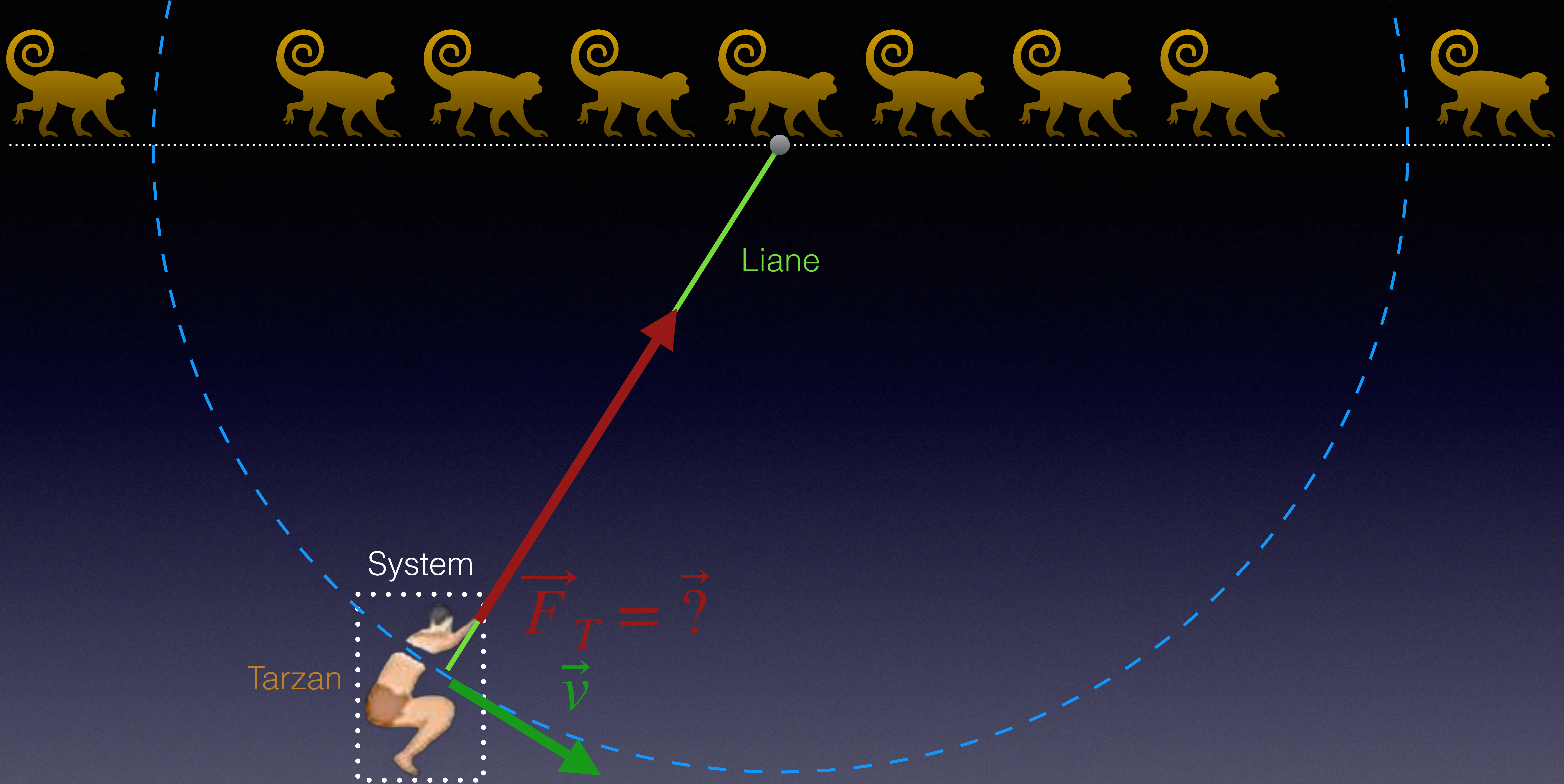
Übersicht

- Unbekannte Kräfte
- Identifikation aller Kräfte
- Bestimmung unbekannter Kräfte
- Gleichförmige Bewegung
- Veränderlicher Impuls
- Kraft und Kurven-Bewegung
- $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ für beliebige Bahnkurven
- Weitere Fragestellungen
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten")
- Nachwort

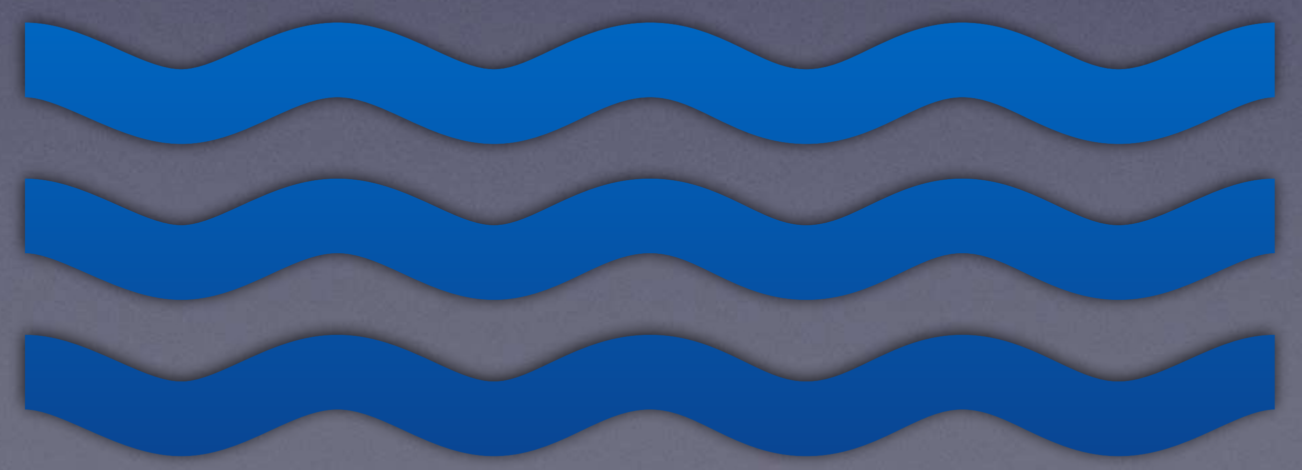
Unbekannte Kräfte

In früheren Kapiteln haben wir das Prinzip Impuls angewandt, um die Bewegung von Systemen vorherzusagen, auf die eine bekannte Nettokraft einwirkt. **In diesem Kapitel** werden wir das Gegenteil tun: **Wenn wir die Bewegung eines Systems kennen, werden wir die Nettokraft ableiten, die auf das System wirkt**. In einigen Fällen können wir mit Kenntnis der Nettokraft und Kenntnis der Werte einiger, aber nicht aller Einzelkräfte, die zur Nettokraft beitragen, die Kräfte bestimmen, deren Werte zunächst noch unbekannt sind.

Eine wichtige **Anwendung** dieses Verfahrens besteht darin, den **Wert einer Kontaktkraft abzuleiten, die wir nicht direkt berechnen können**. Wie groß war z. B. in Kapitel 4 die Kraft, welche die Liane auf Tarzan ausübte, als er an ihr schwang, kurz bevor sie brach? Welche Kraft übt der Sitz auf einen Flugzeugpassagier aus, wenn das Flugzeug eine plötzliche Richtungsänderung vornimmt, und warum ist sie anders als das Gewicht des Passagiers?



Die Kraft, die von der Liane auf Tarzan ausgeübt wird, ist eine (zunächst) unbekannte Kraft.
Die hier nicht eingezeichnete Gravitationskraft ist in diesem Fall bekannt.



Identifikation aller Kräfte

Es ist wichtig, zu Beginn einer Aufgabe alle auf ein System wirkenden Kräfte explizit aufzulisten. Sobald wir mit den mathematischen Operationen beginnen, kann es leicht passieren, dass wir eine Kraft vergessen oder doppelt einbeziehen, so dass eine schriftliche Aufzeichnung zum Nachschlagen unerlässlich ist. Für die Aufzählung der auf ein System einwirkenden Kräfte sollten folgende „Spielregeln“ eingehalten werden:

1. Identifiziere jede Kraft, die von einem Objekt in der Umgebung ausgeht, das in einem gewissen Abstand (gravitativ oder elektrisch) mit dem System interagiert (**Abstandskräfte**).

2. Identifiziere jede Kraft, die von einem Objekt in der Umgebung ausgeht, das das System berührt (**Kontaktkräfte**).

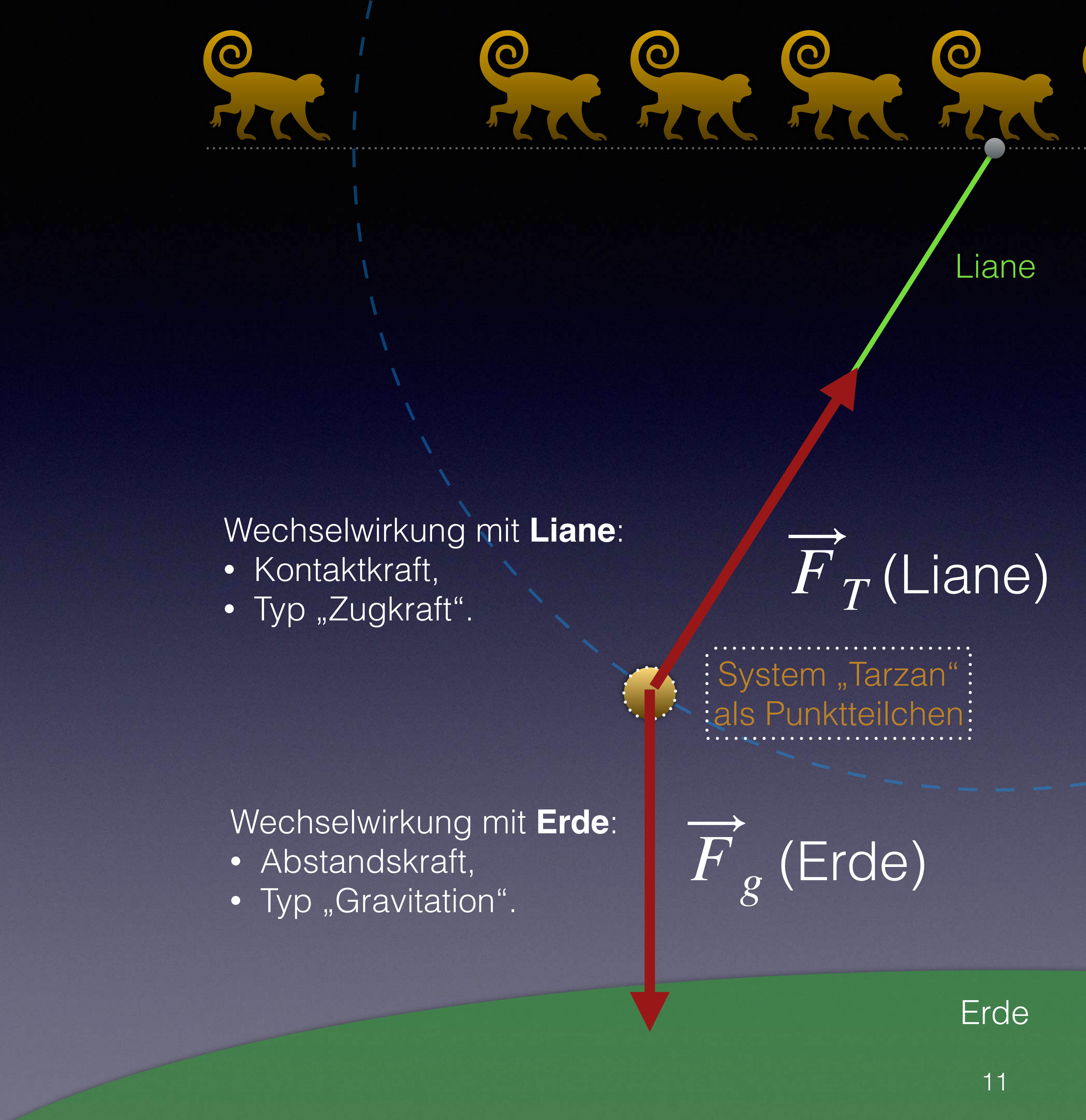
3. Zeichne ein **Schnittdiagramm**, **in dem jede Kraft mit dem Namen des Objekts in der Umgebung beschriftet ist, das die Kraft verursacht**.

Welchen Sinn hat es, Objekte in der Umgebung aufzuführen? Warum sollte man „die Erde“ statt „Schwerkraft“ sagen? Wir wissen, dass an einer Wechselwirkung zwei Objekte beteiligt sind, also muss jede Kraft, die auf das System einwirkt, auf ein Objekt in der Umgebung zurückzuführen sein. Die **Benennung des Objekts ist eine Möglichkeit, Doppelzählungen zu vermeiden**. Wenn wir zum Beispiel sowohl „die Gravitationskraft“ als auch „das Gewicht des Balls“ einbezögen, würden wir dieselbe Kraft zweimal zählen. Wenn man jede Kraft durch den Namen des interagierenden Objekts identifiziert, kann man vermeiden, dass eine Kraft doppelt gezählt wird oder eine Kraft fehlt. **Wenn du kein Objekt in der Umgebung benennen kannst, das für die Kraft verantwortlich ist, wirkt keine solche Kraft auf das System**, solange wir ein Inertialsystem (nicht beschleunigendes, nicht rotierendes Koordinatensystem) verwenden, was in diesen Folien der Standard ist.

Ein **Schnittdiagramm** kann sehr einfach sein, wie auf der nachfolgenden Folie zu sehen sein wird:

- Wenn das **System als Punktteilchen** modelliert wird, stellst du es durch einen Punkt dar.
- Jede Kraft wird durch einen Pfeil dargestellt. Wenn du die Größe der Kraft nicht kennst, ist das in Ordnung - zeichne den **Kraft-Vektor** mit beliebiger Länge.
- **Beschrifte jede Kraft**. Ein Bezeichnung besteht dabei aus zwei Teilen: einem Symbol, das in Gleichungen verwendet werden kann, und dem **Namen des Objekts** in der Umgebung, **das für die Kraft verantwortlich ist**.

Nur solche Kräfte sind darzustellen, die auf das System selbst wirken, denn nur sie beeinflussen den Impuls des Systems.



Schnittdiagramm für das System „Tarzan“ zu dem in der vorangehenden Grafik dargestellten Zeitpunkt. **Tarzan** wird durch ein **Punkt-Objekt** repräsentiert. Jede **Kraft** ist mit einem **Symbol** für die Verwendung in Gleichungen und mit dem **Namen des interagierenden Objekts** in der Umgebung beschriftet. Da wir die Größenordnungen der Kräfte noch nicht kennen, wurden sie mit willkürlicher Länge dargestellt.

Die Wirkung des Luftwiderstands sowie des Auftriebs in der Luft bleibt in diesem Fall unberücksichtigt.

Kontrollpunkt 1

1. Bestimme in jedem der folgenden Fälle alle Objekte in der Umgebung, die Kräfte auf das jeweilige System ausüben, und zeichne ein Schnittdiagramm mit den für das jeweilige System relevanten Kräften. Gehe davon aus, dass Luftwiderstand und Auftrieb vernachlässigbar sind. (1) Du schlägst einen Tennisball mit einem Schläger. Wähle den Tennisball als System und betrachte den Moment des Ball-Kontakts mit dem Schläger. (2) Du sitzt auf einem Schlitten und fährst „mit Karacho“ einen Hang hinab. Wähle dich als System. (3) Was ändert sich, falls du dich und den Schlitten als System verwendest?

Bestimmung unbekannter Kräfte

Sobald wir alle Objekte identifiziert haben, die eine Kraft auf ein System ausüben, stellen wir möglicherweise fest, dass wir nicht alle Kräfte direkt berechnen können. Dies gilt insbesondere für Kontaktkräfte. Wir müssen das Impulsprinzip anwenden, um die Werte der unbekannten Kräfte abzuleiten, indem wir dieses Verfahren anwenden:

1. Wähle explizit ein **System** und bleibe bei dieser Wahl.

2. Ermittle systematisch alle Kräfte, die auf das System aufgrund von Objekten in der Umgebung wirken, und zeichne und beschrifte das **Schnittdiagramm**.

3. Ermittle die **Rate** $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$, mit der sich der **Impuls des Systems ändert**.

4. Verwende $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\mathrm{net}}$, um die **Nettokraft** auf das System abzuleiten.

5. Ermittle schließlich die **unbekannten Beiträge zur Nettokraft**.

$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$$

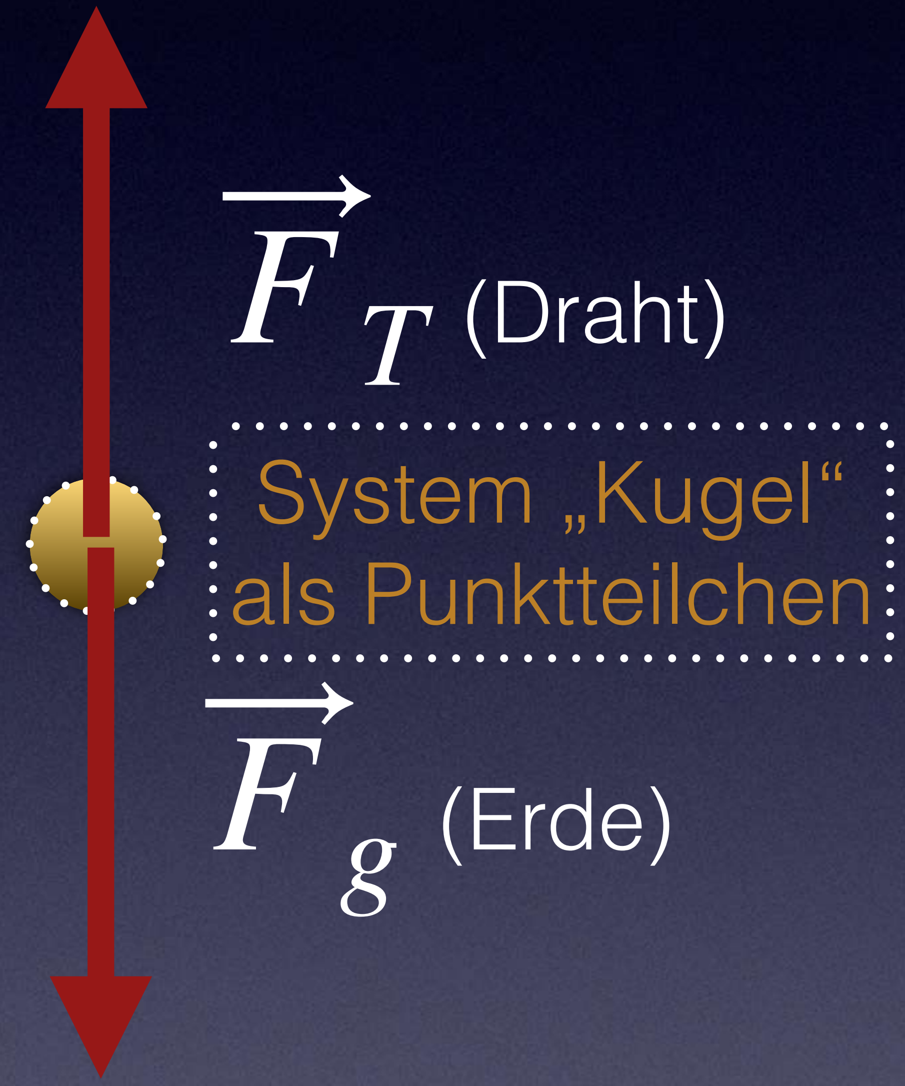
$$\vec{0} = \vec{F}_g + \vec{F}_T = m\vec{g} + \vec{F}_T$$

$$\vec{0} = \left\langle 0, -m\left|\vec{g}\right|, 0\right\rangle + \left\langle F_{T,x}, F_{T,y}, F_{T,z}\right\rangle$$

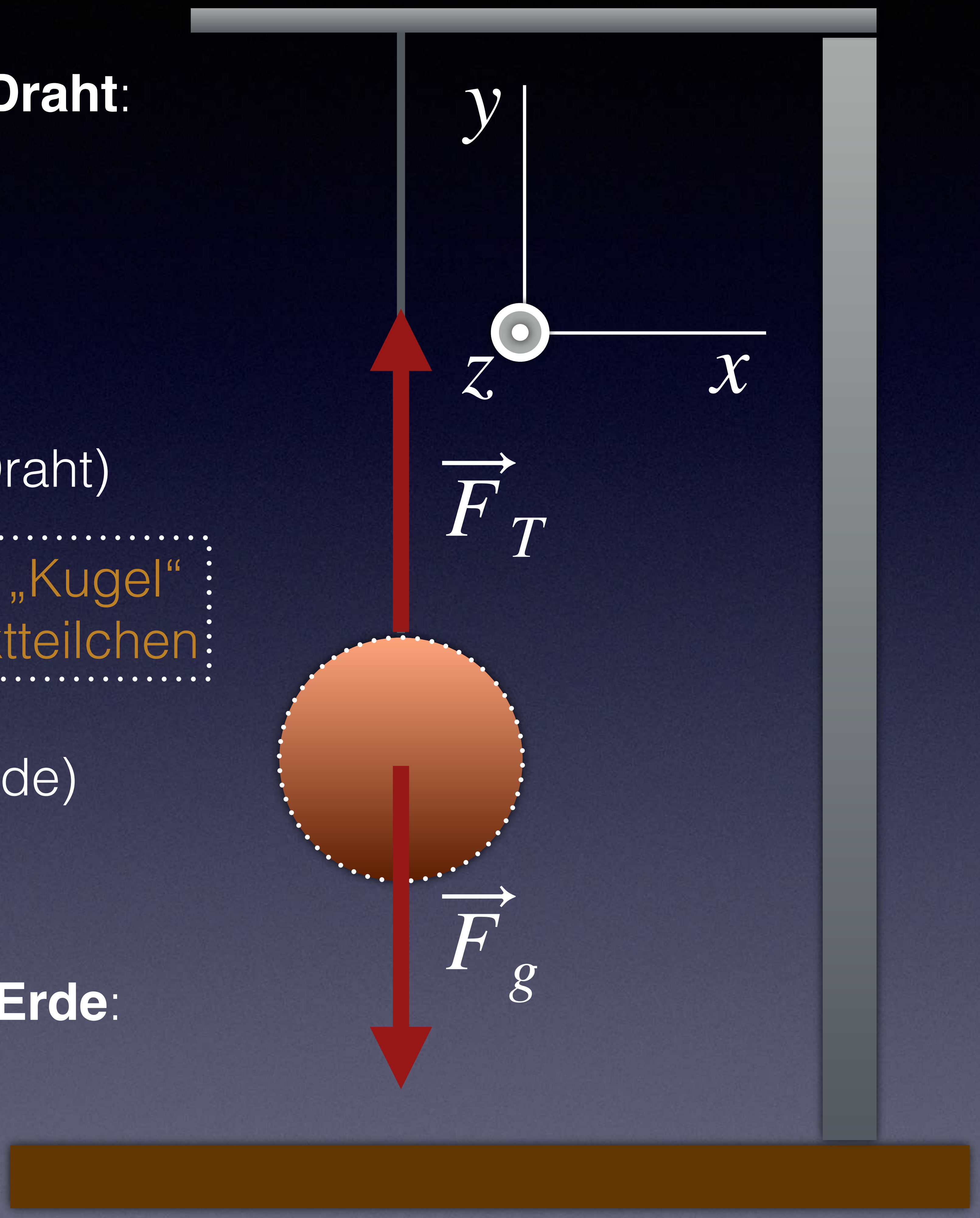
$$F_{T,x} = 0,\ F_{T,y} = m\left|\vec{g}\right|,\ F_{T,z} = 0$$

Sicherlich wusstest du schon vor diesen Schritten, dass die Zugkraft des Drahtes gleich dem Gewicht der Kugel ist. Der Grund dafür, dass wir diese Analyse durchgehen, ohne irgendwelche Schritte auszulassen, ist, dass dasselbe Verfahren in allen Situationen angewendet werden kann, auch in Situationen, die viel komplizierter sind als die vorliegende.

Wechselwirkung mit **Draht**:
- Kontaktkraft,
- Typ „Zugkraft“.



Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation“.



System „Kugel“ mit Masse m.

Warum haben wir im vorliegenden Fall den Träger, an dem der Draht befestigt ist, nicht in die „Umgebung“ einbezogen? Da der Träger das gewählte System (die Kugel) nicht berührt, werden die interatomaren Bindungen in der Kugel durch den Träger nicht gedehnt oder gestaucht. Es gibt nur zwei Arten von Kräften, die auf die Kugel einwirken können: Kräfte, die auf Distanz wirken, und Kontaktkräfte. Um eine Kontaktkraft auszuüben, müssen die Atome eines Objekts mit den Atomen eines anderen Objekts in Kontakt sein, was für das von uns gewählte System nicht der Fall ist. Der Träger übt zwar eine winzige Gravitationskraft auf den Ball aus (die über eine gewisse Entfernung wirkt), aber diese Kraft ist zu gering, um eine spürbare Wirkung zu haben. Was wäre, falls wir den Ball und den Draht als System gewählt hätten, sehen wir auf der nächsten Folie.

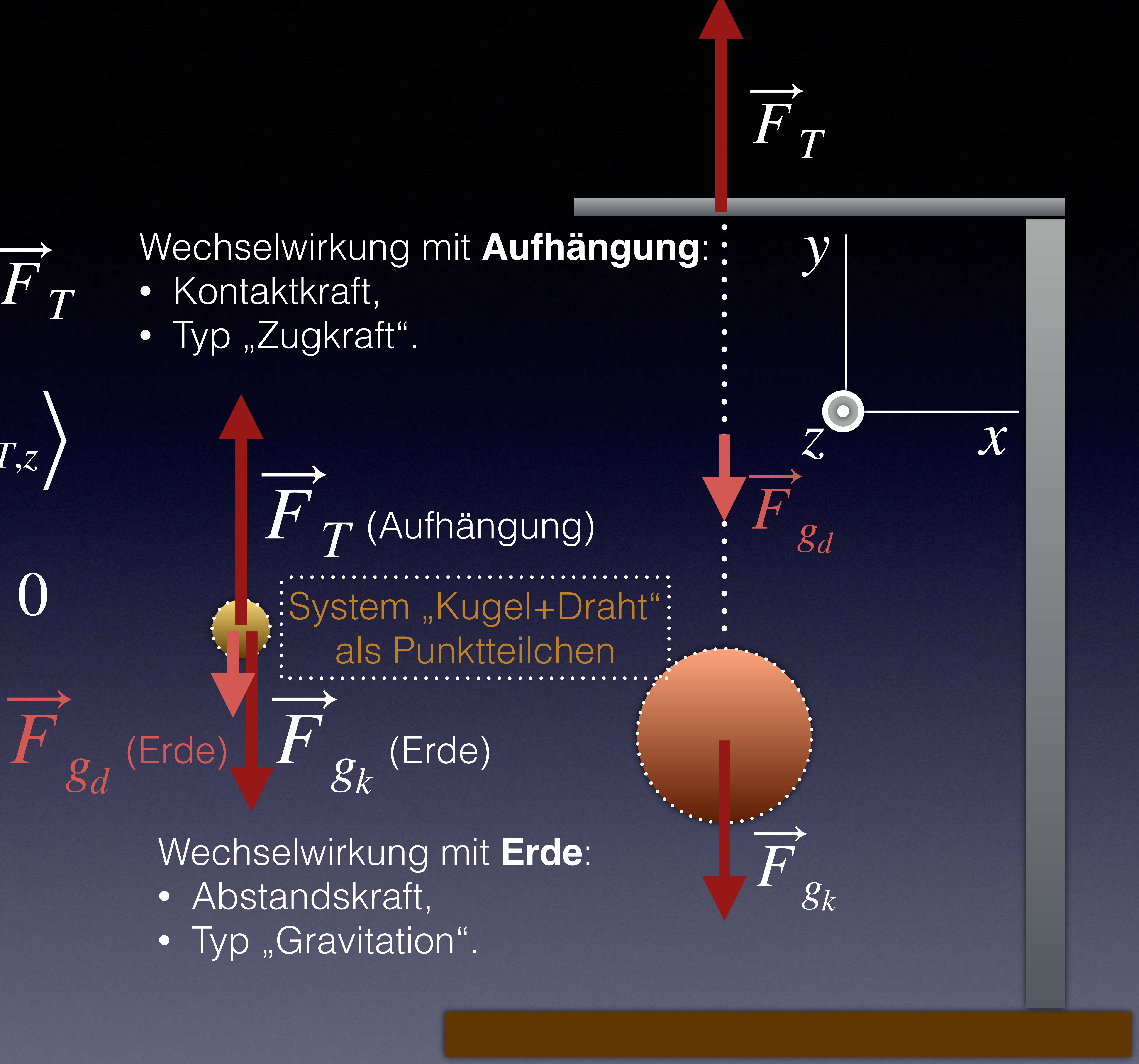
$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{0}$$

$$\vec{0} = \vec{F}_{g_k} + \vec{F}_{g_d} + \vec{F}_T = (m_k + m_d)\vec{g} + \vec{F}_T$$

$$\vec{0} = \left\langle 0, -(m_k + m_d)\left|\vec{g}\right|, 0 \right\rangle + \left\langle F_{T,x}, F_{T,y}, F_{T,z} \right\rangle$$

$$F_{T,x} = 0,\ F_{T,y} = (m_k + m_d)\left|\vec{g}\right|,\ F_{T,z} = 0$$

Man beachte, dass die Zugkraft $\vec{F}_T$, die von dem Träger auf den Draht ausgeübt wird, etwas größer ist als die Zugkraft, die vom Draht auf die Kugel ausgeübt wird und die wir im vorherigen Beispiel berechnet haben. Dies ist der Fall, weil der obere Teil des Drahtes nicht nur die Kugel, sondern auch den Rest des Drahtes trägt.



System „Kugel und Draht“ mit Masse $m_k + m_d$ für Kugel und Draht.

Gleichförmige Bewegung

Die einfachste Situation, in der wir die Werte der unbekannten Kräfte ableiten können, ist die der gleichförmigen Bewegung. **Der Impuls eines Systems in gleichförmiger Bewegung ist konstant** und ändert sich nicht mit der Zeit. Ein Sonderfall der gleichförmigen Bewegung ist eine Situation, in der ein Objekt in Ruhe ist und in Ruhe bleibt; diese Situation wird „statisches Gleichgewicht" genannt. (Probleme, bei denen das System in Ruhe ist, werden oft als „statische" Probleme bezeichnet. Wenn du eine Ingenieurwissenschaft studierst, kannst du einen ganzen Kurs zu diesem Thema belegen.) Bei einem typischen Problem, das eine gleichförmige Bewegung beinhaltet, wird von dir gefordert, die unbekannte Größe einer Kraft auf das System durch Anwendung des Impulsprinzips abzuleiten. Die zugrundeliegende Physik ist für alle Systeme in gleichförmiger Bewegung gleich (auch für ruhende Systeme).

Der **Impuls des Systems ändert sich nicht**, also ist die Änderungsrate des Impulses gleich Null:

$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{0} = \langle 0{,}0{,}0\rangle \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}\ .$$

Daraus folgt unmittelbar für die **Nettokraft**:

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{net}} = \vec{0} = \langle 0{,}0{,}0\rangle \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}\ .$$

Das ist eigentlich schon alles: Wenn man weiß, dass die Nettokraft gleich Null sein muss, kann man die Werte einiger Beiträge zur Nettokraft ableiten. Das vorangegangene Beispiel einer Kugel, die an einem Draht hängt, ist ein einfaches Problem der gleichförmigen Bewegung (in 1D).

Wenn in einer Situation Kräfte in zwei oder drei Dimensionen auftreten, ist es oft am einfachsten, **eine Gleichung für jede Dimension** zu schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_x}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\mathrm{net},x}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}_y}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\mathrm{net},y} \text{ und } \frac{\mathrm{d}\vec{p}_z}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\mathrm{net},z} \, .$$

Eine in beliebiger Richtung wirkende Kraft $\overrightarrow{F}$ kann mit Hilfe des jeweiligen Richtungskosinus (siehe Kapitel 1) geschrieben werden als:

$$\overrightarrow{F} = \left|\overrightarrow{F}\right| \hat{F} \equiv F\hat{F} = F\left\langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z \right\rangle \equiv \left\langle F_x, F_y, F_z \right\rangle \, .$$

Beim verwenden der Komponenten ist auf korrekte Vorzeichen zu achten.

$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{net} = \vec{0}$$
$$\vec{0} = \vec{F}_g + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2}$$

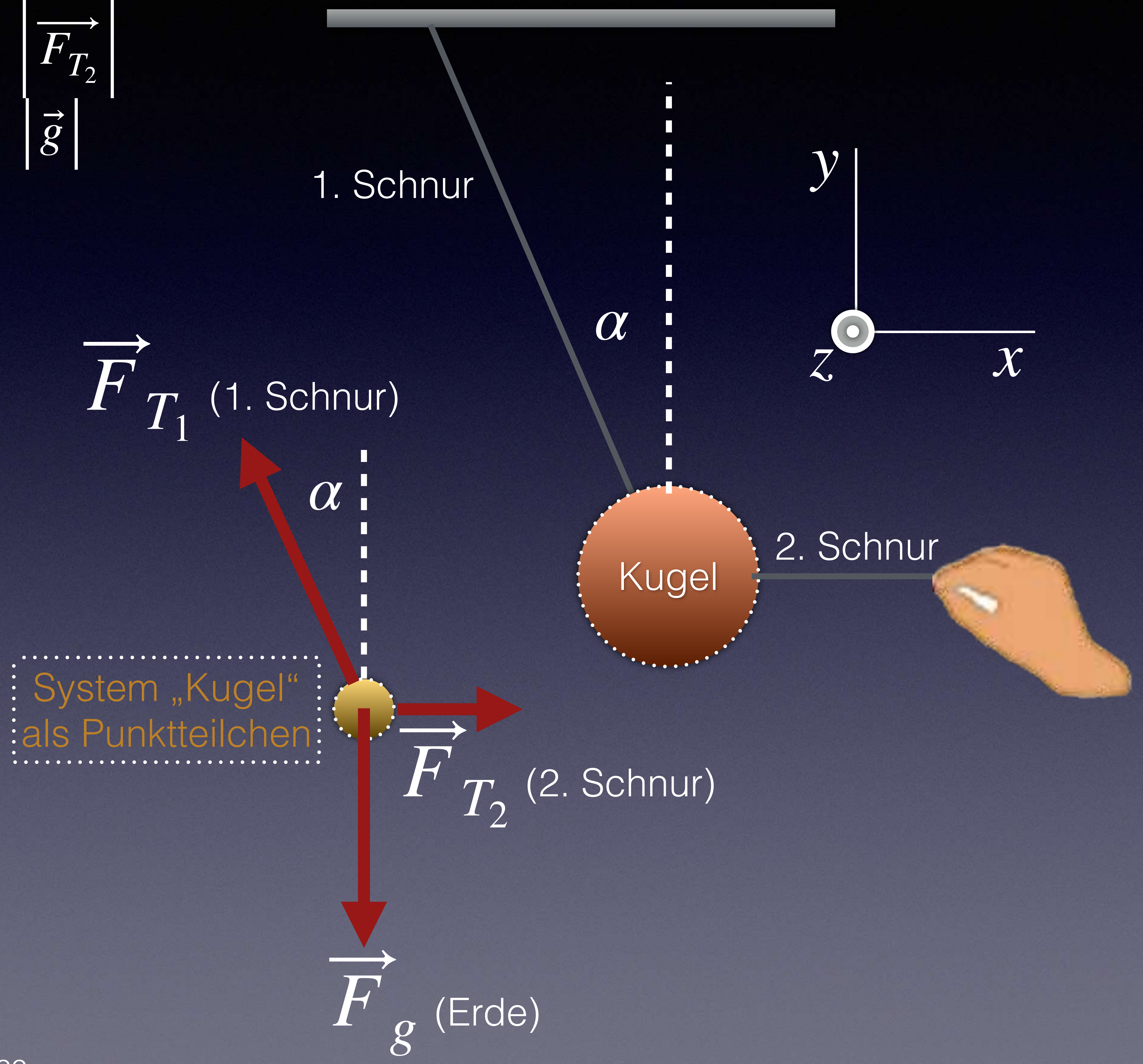
Abkürzungen:

$$F_{T_1} = \left|\vec{F}_{T_1}\right|$$
$$F_{T_2} = \left|\vec{F}_{T_2}\right|$$
$$g = \left|\vec{g}\right|$$

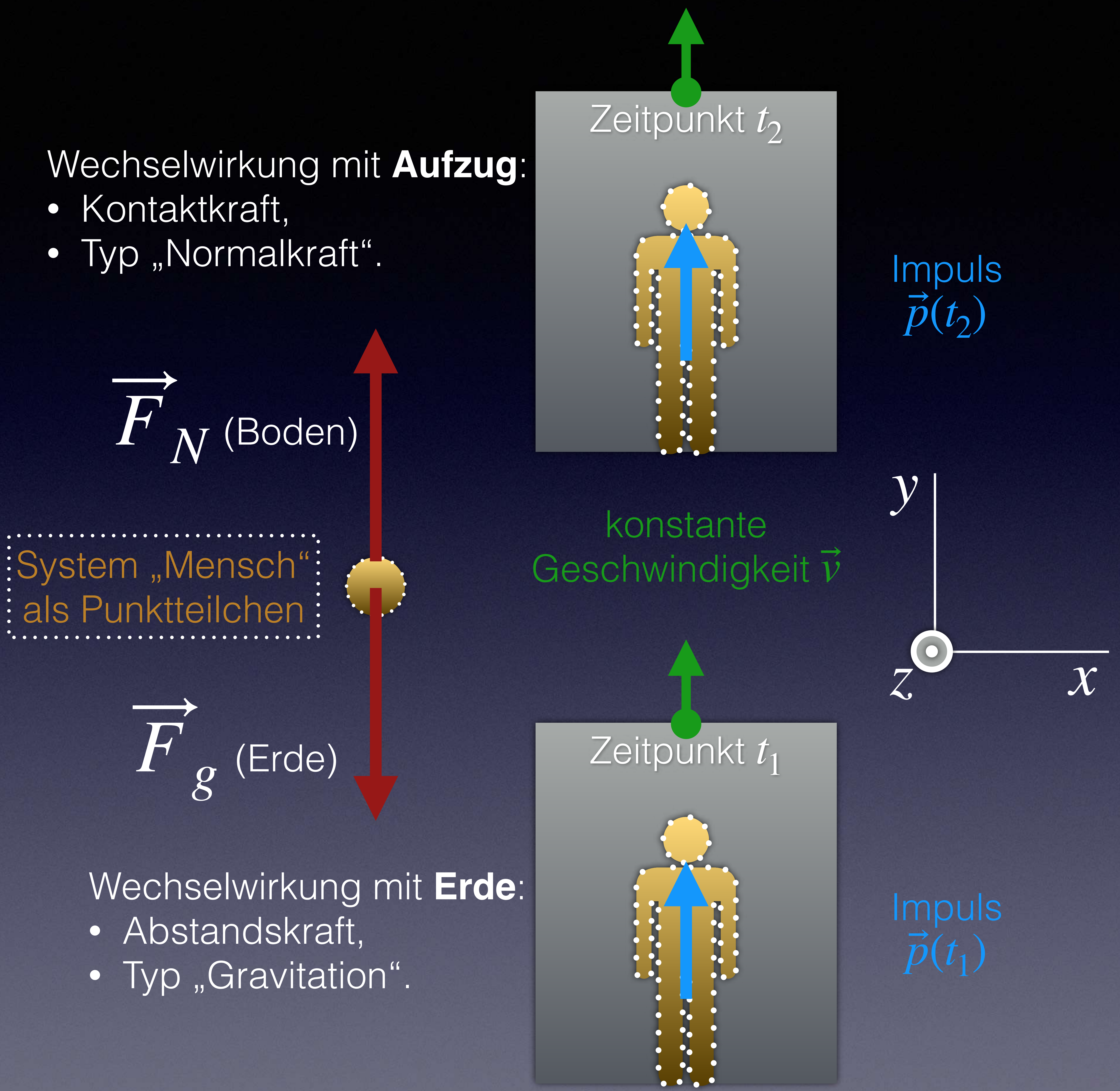
$$\vec{F}_g = \langle 0, -mg, 0\rangle$$
$$\vec{F}_{T_1} = F_{T_1}\langle \cos(90^\circ + \alpha), \cos\alpha, 0\rangle$$
$$\vec{F}_{T_2} = F_{T_2}\langle 1, 0, 0\rangle$$

$$\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t = 0 + F_{T_1}\cos(90^\circ + \alpha) + F_{T_2}$$
$$\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t = -mg + F_{T_1}\cos\alpha + 0$$

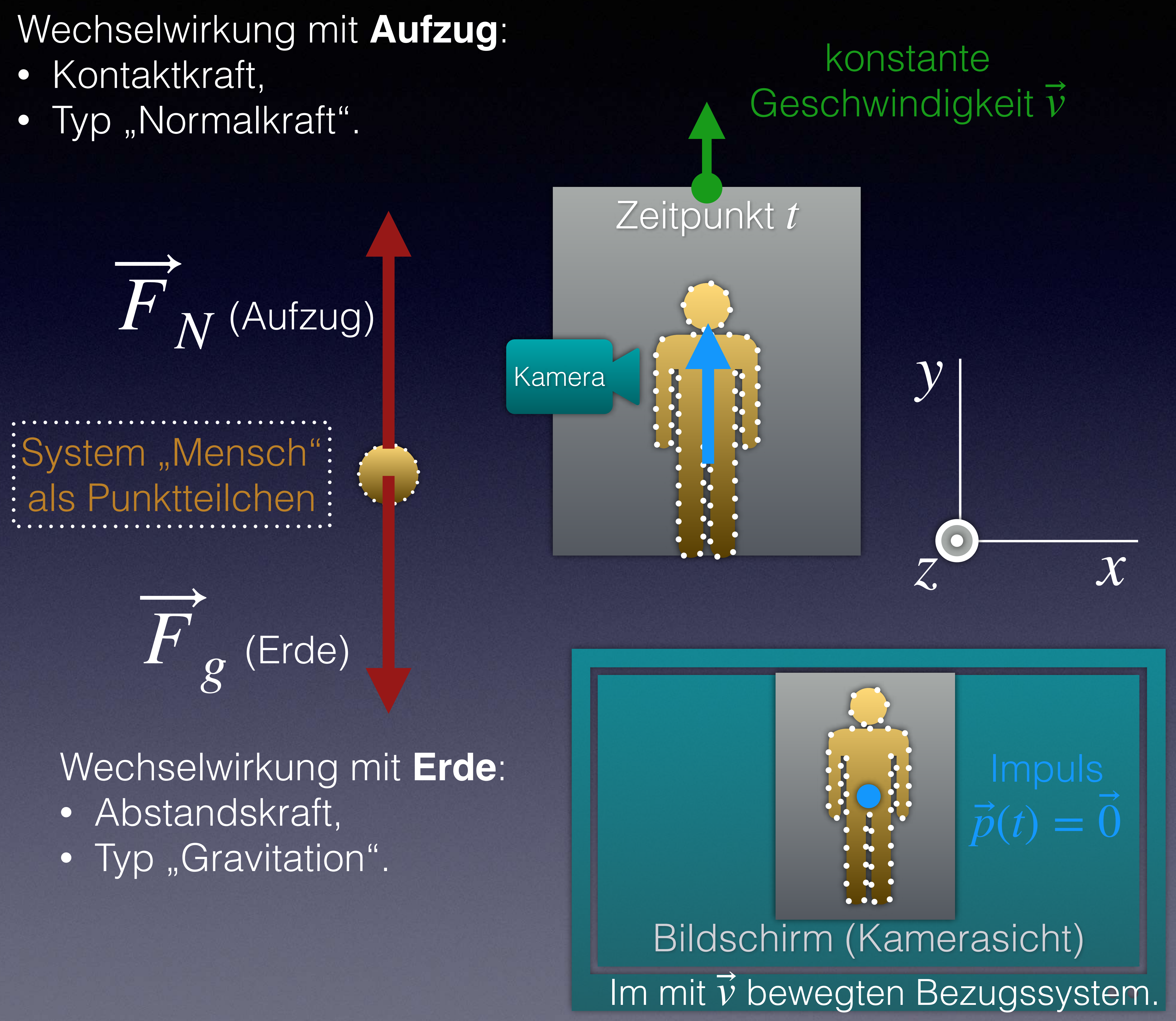
$$\boxed{\begin{aligned} F_{T_1} &= mg/\cos\alpha \\ F_{T_2} &= -mg\cos(90^\circ + \alpha)/\cos\alpha \end{aligned}}$$



Sowohl ruhende Systeme als auch Systeme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit ungleich Null bewegen, entsprechen einer gleichförmigen Bewegung. Der Prozess der Analyse im Hinblick auf wirksame Kräfte ist in beiden Fällen derselbe. Wenden wir das Prinzip Impuls zu verschiedenen Zeitpunkten an, wenn sich der Mensch (und der Aufzug) mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, so sehen wir (von außen), dass sich der Impuls des Menschen (System) nicht ändert. Da in dieser Situation $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$ ist, können wir die wirksamen Kräfte $\vec{F}_g$ und $\vec{F}_N$ bestimmen.



Es ist interessant, diese Situation im Sinne des **Relativitätsprinzips** (siehe Kapitel 1) zu betrachten. Wir haben das System aus der Sicht eines Beobachters analysiert, der auf dem Boden steht und sieht, dass sich der Aufzug und der Passagier mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, und sind zu dem Schluss kommt, dass die Nettokraft auf den Passagier $\vec{0}$ sein muss. Nehmen wir einmal an, dass sich im Inneren des Aufzugs eine Videokamera befinde. **Aus der Perspektive der Kamera erscheinen der Aufzug und sein Passagier unbewegt**. Ein Beobachter würde beim Betrachten des Videos ebenfalls zu dem Schluss kommen, dass die Nettokraft auf den Passagier gleich $\vec{0}$ ist, weil sich sein Impuls nicht ändert. **Das Prinzip Impuls ist in beiden Bezugssystemen (Inertialsystemen) gültig und wir erhalten deshalb immer dieselben Werte für $\vec{F}_g$ und $\vec{F}_N$.**



Du ziehst einen beladenen Schlitten, dessen Masse m eine konstante Geschwindigkeit hat, an einem Seil in einem Winkel von α. Der Gleit-Reibungskoeffizient zwischen dem Schnee und den Kufen des Schlittens beträgt μ_k. Wie groß ist die Zugkraft des Seils?

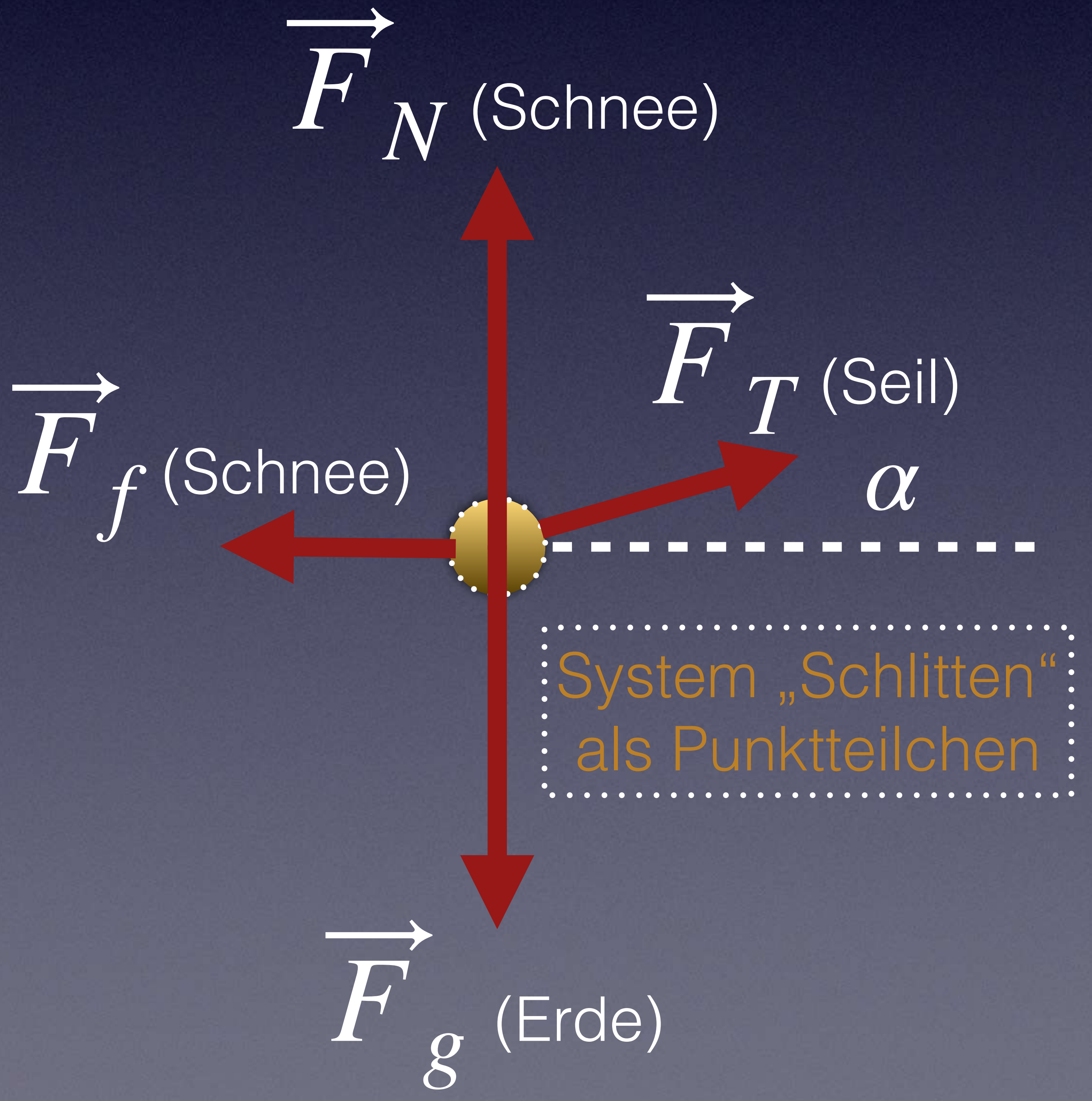
$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{0}$$
$$\vec{0} = \vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_T + \vec{F}_f$$

$$\vec{F}_g = \langle 0, -mg, 0 \rangle$$
$$\vec{F}_N = F_N \langle 0,1,0 \rangle$$
$$\vec{F}_f = \left\langle -\mu_k F_N, 0, 0 \right\rangle$$
$$\vec{F}_T = F_T \langle \cos\alpha, \cos(90^\circ - \alpha), 0 \rangle$$

$$\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t = F_T \cos\alpha - \mu_k F_N$$
$$\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t = F_N + F_T \cos(90^\circ - \alpha) - mg$$

$$\boxed{F_T = \frac{\mu_k m g}{\cos\alpha + \mu_k \cos(90^\circ - \alpha)}}$$

Hinweis: Man beachte die Wirkung der vertikalen Komponente von $\vec{F}_T$ auf $\vec{F}_N$.



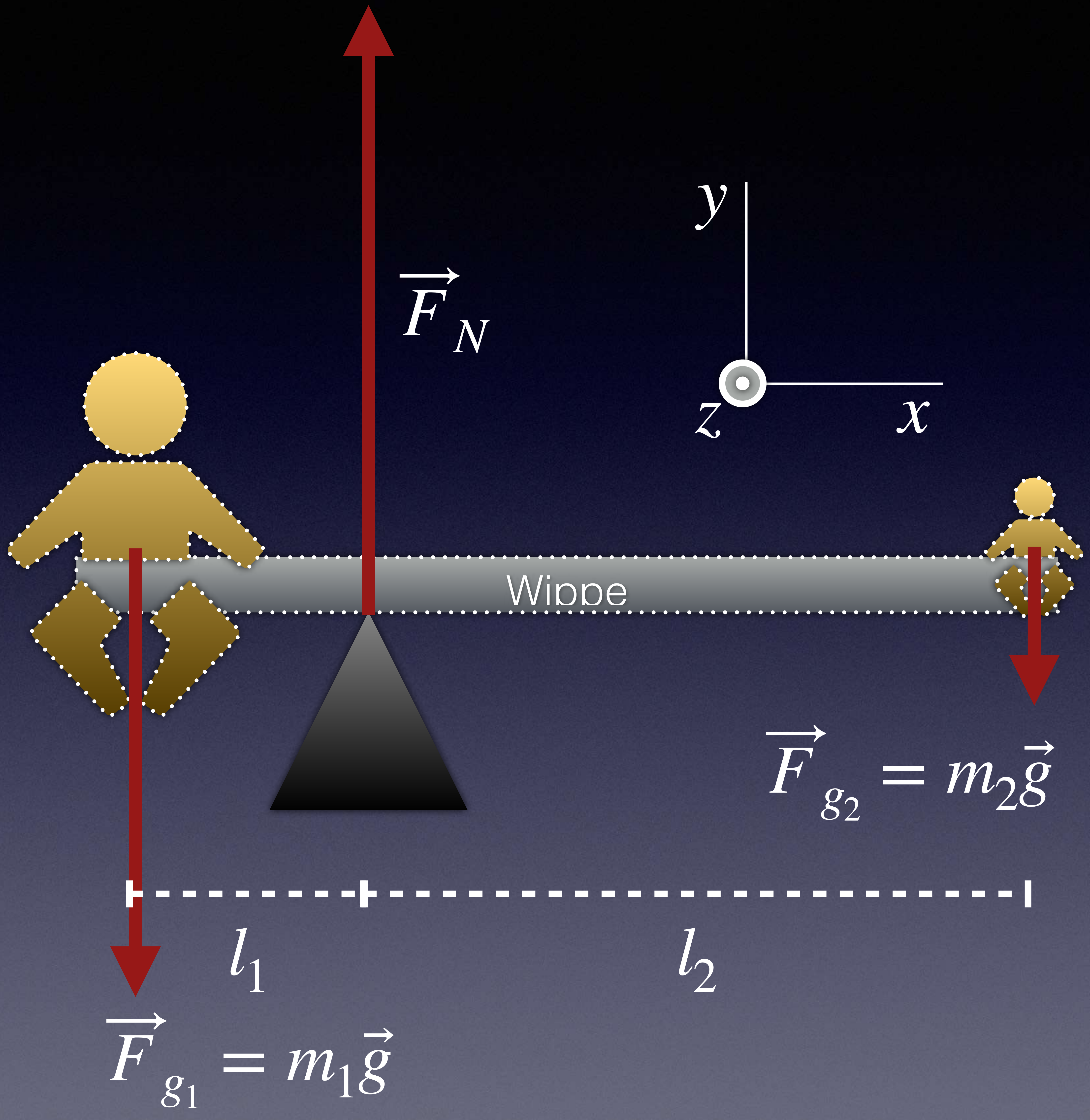
Abkürzungen:

$$F_T = \left|\vec{F}_T\right|$$
$$F_N = \left|\vec{F}_N\right|$$
$$F_f = \left|\vec{F}_f\right|$$
$$g = \left|\vec{g}\right|$$

Kontrollpunkt 2

1. Ein Objekt bewegt sich mit konstantem Impuls $\vec{p} = \langle 10, -12, -8 \rangle\ \mathrm{kg \cdot m/s}$. (1) Wie groß ist die Änderungsrate des Impulses $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$? (2) Wie groß ist die Nettokraft $\overrightarrow{F}_{\mathrm{net}}$, die auf das Objekt wirkt? (3) Das Objekt wird von drei Objekten in der Umgebung beeinflusst. Zwei der Kräfte sind $\overrightarrow{F}_1 = \langle 100, 50, -60 \rangle\ \mathrm{N}$ und $\overrightarrow{F}_2 = \langle -130, 40, -70 \rangle\ \mathrm{N}$. Wie groß ist die dritte Kraft $\overrightarrow{F}_3$?

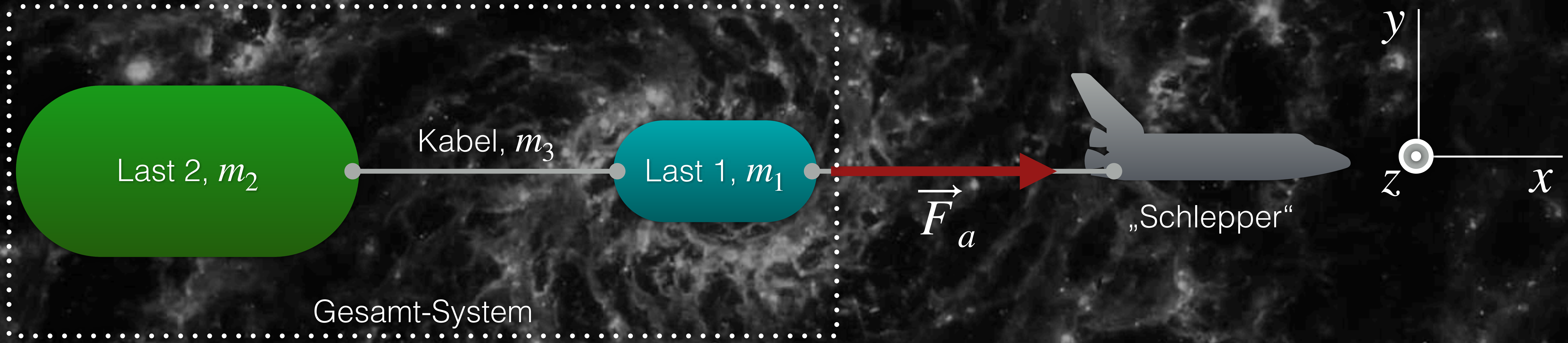
Die Modellierung eines Systems als Punktteilchen und die Anwendung des Prinzips Impuls können es uns ermöglichen, Bewegungen vorherzusagen oder unbekannte Kräfte zu finde. Es gibt jedoch Situationen, in denen eine solche Analyse zwar gültig ist, uns aber nicht alles sagt, was wir wissen müssen. Betrachten wir zum Beispiel zwei Kinder, die unbeweglich auf einer Wippe sitzen. Wähle als System die beiden Kinder und die Wippe. Bei dieser Wahl des Systems ändert sich dessen Impuls nicht. Das Impulsprinzip allein sagt uns jedoch nicht, wo die Kinder sitzen müssen, um das Gleichgewicht zu halten. Um mehr zu erfahren, müssen wir das **System als ausgedehntes Objekt** (und nicht als Punktteilchen) modellieren und das Prinzip Drehimpuls heranziehen, das wir in einem späteren Kapitel kennenlernen werden.



Veränderlicher Impuls

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns auf Systeme konzentriert, deren Impuls konstant ist. In solchen Situationen wissen wir sofort, dass der Wert von $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{0}$ ist und dass daher auch die Nettokraft $\overrightarrow{F}_{\mathrm{net}} = \vec{0}$ sein muss. **In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Systemen, die aus mehreren Objekten bestehen und bei denen sich der Impuls zeitlich ändern kann**. Allerdings wissen wir schon (Kapitel 3), dass die Bewegung des Massenschwerpunkts $\vec{r}_M$ durch die auf das System wirkende Nettokraft bestimmt wird. Aber wir möchten zusätzlich auch diejenigen Kräfte kennen, welche die Objekte innerhalb des Systems aufeinander ausüben.

Du schürfst Rohstoffe auf einem Asteroiden, dein (Raum-) „Schlepper“ ist zurück auf dem Weg in Richtung einer Raumstation und zieht dabei zwei Lasten, die durch ein Stahlseil (Kabel) miteinander verbunden sind. Dein „Schlepper“ übt eine Kraft von $\vec{F}_a$ aus. Die Masse von Last 1 ist m_1, die Masse von Last 2 ist m_2, und die Masse des Stahlseils ist m_3.



Wie groß ist die Komponente der Beschleunigung des Massenschwerpunkts des Systems? Hinweis: Die Gravitation anderer Objekte darf vernachlässigt werden.

Hintergrund-Bild https://www.mpg.de/19891212/james-webb-galaxie

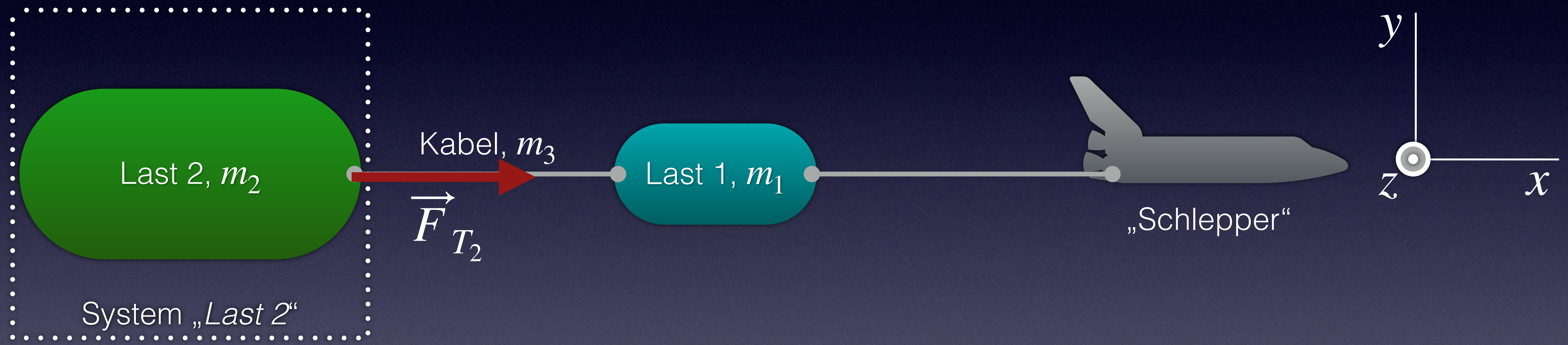
Wir wenden das Prinzip Impuls auf das Gesamt-System an, wobei wir konstante Massen und kleine Geschwindigkeiten $\gamma \simeq 1$ annehmen:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_M}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_i m_i \right) \frac{\mathrm{d}\vec{v}_M}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\text{net}} = \overrightarrow{F}_a = \left\langle F_a, 0, 0 \right\rangle .$$

Für die Beschleunigung $\vec{a}_M$ des Massenschwerpunkts erhalten wir

$$\vec{a}_M = \frac{1}{\sum_i m_i} \left\langle F_a, 0, 0 \right\rangle .$$

Nun gilt es die Frage zu klären, wie groß die Zugkraft in dem Verbindungs-Kabel ist. Da das Kabel Teil des vorangehenden Gesamt-Systems war, können wir diese Frage nur dadurch beantworten, indem wir zu einem anderen System wechseln. Wir wählen zu diesem Zweck „*Last 2*“ als neues System.



Für die Berechnung nutzen wir jetzt aus, dass sich alle Teile gemeinsam bewegen, also identisch mit $\vec{a}_M$ beschleunigt werden.

Wir wenden das Prinzip Impuls auf das System „*Last 2*“ für eine bekannte Beschleunigung $\vec{a}_2 \equiv \vec{a}_M$ an:

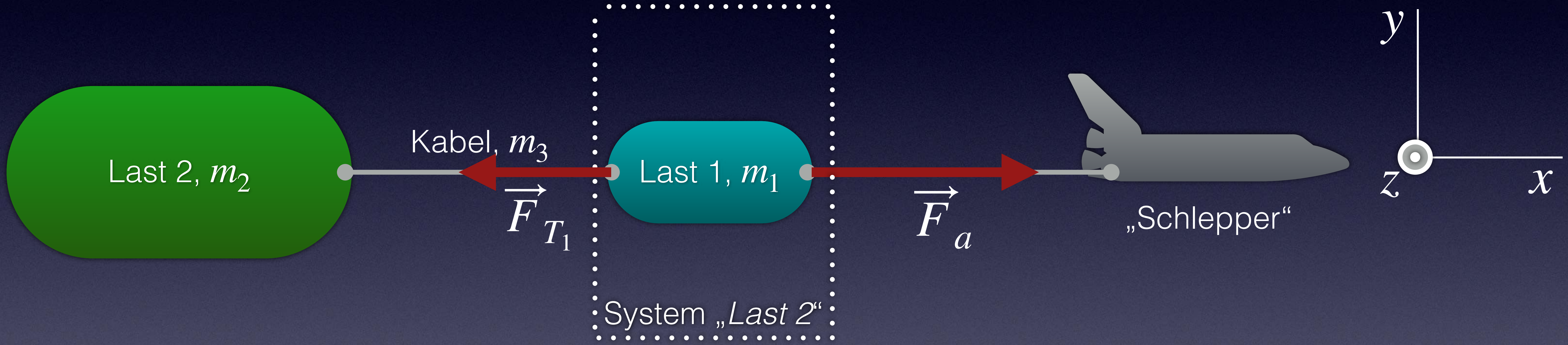
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = m_2 \vec{a}_2 \equiv m_2 \vec{a}_M = \overrightarrow{F}_{T_2} \,.$$

Unter Verwendung des Ergebnisses für $\vec{a}_M$ erhalten wir

$$\overrightarrow{F}_{T_2} = \frac{m_2}{\sum_i m_i} \left\langle F_a, 0, 0 \right\rangle \,.$$

Diese Zugkraft wird zur Beschleunigung von „*Last 2*“ benötigt.

Erhalten wir die dieselbe Antwort, falls wir die „*Last 1*“ als System wählen? Bezeichnen wir mit $\vec{F}_{T_1}$ die Größe der (noch) unbekannten Kraft, die das Kabel auf die Last Nr. 1 ausübt.



Für die Berechnung nutzen wir erneut aus, dass sich alle Teile gemeinsam bewegen, also identisch mit $\vec{a}_M$ beschleunigt werden.

Wir wenden das Prinzip Impuls auf das System „Last 1“ für eine bekannte Beschleunigung $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_M$ an:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = m_1 \vec{a}_1 \equiv m_1 \vec{a}_M = \vec{F}_a + \vec{F}_{T_1} \; .$$

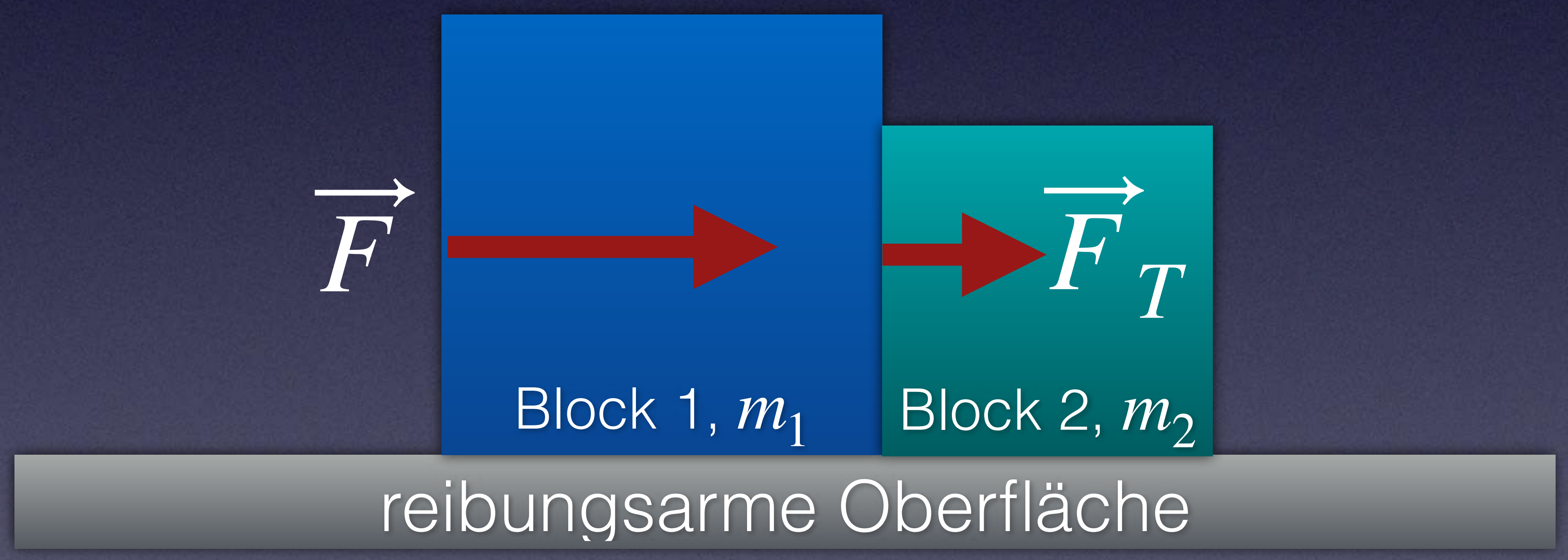
Unter Verwendung des Ergebnisses für $\vec{a}_M$ erhalten wir

$$\vec{F}_{T_1} = \vec{F}_a - \frac{m_1}{\sum_i m_i} \left\langle F_a, 0, 0 \right\rangle \; .$$

Diese Zugkraft wird zur Beschleunigung sowohl des Kabels als auch von „Last 2“ benötigt. $\left| \vec{F}_{T_1} \right| > \left| \vec{F}_{T_2} \right|$, da das Kabel zwischen den Lasten nicht masselos ist. Anders ausgedrückt: Die Spannung im Kabel nimmt von Last 1 zu Last 2 hin ab.

Kontrollpunkt 3

1. Du schiebst zwei Blöcke über eine reibungsarme Oberfläche und wendest dabei eine bekannte Kraft $\vec{F}$ an. (1) Welches System würdest du wählen, um die Beschleunigung des Massenschwerpunkts $\vec{r}_M$ zu bestimmen? (2) Welches System würdest du nach der Bestimmung der Beschleunigung $\vec{a}_M$ des Massenschwerpunkts wählen, um die Größe der Kraft $\vec{F}_T$ zu bestimmen, die der Block 1, mit Masse m_1, auf den Block 2, mit Masse m_2, ausübt?

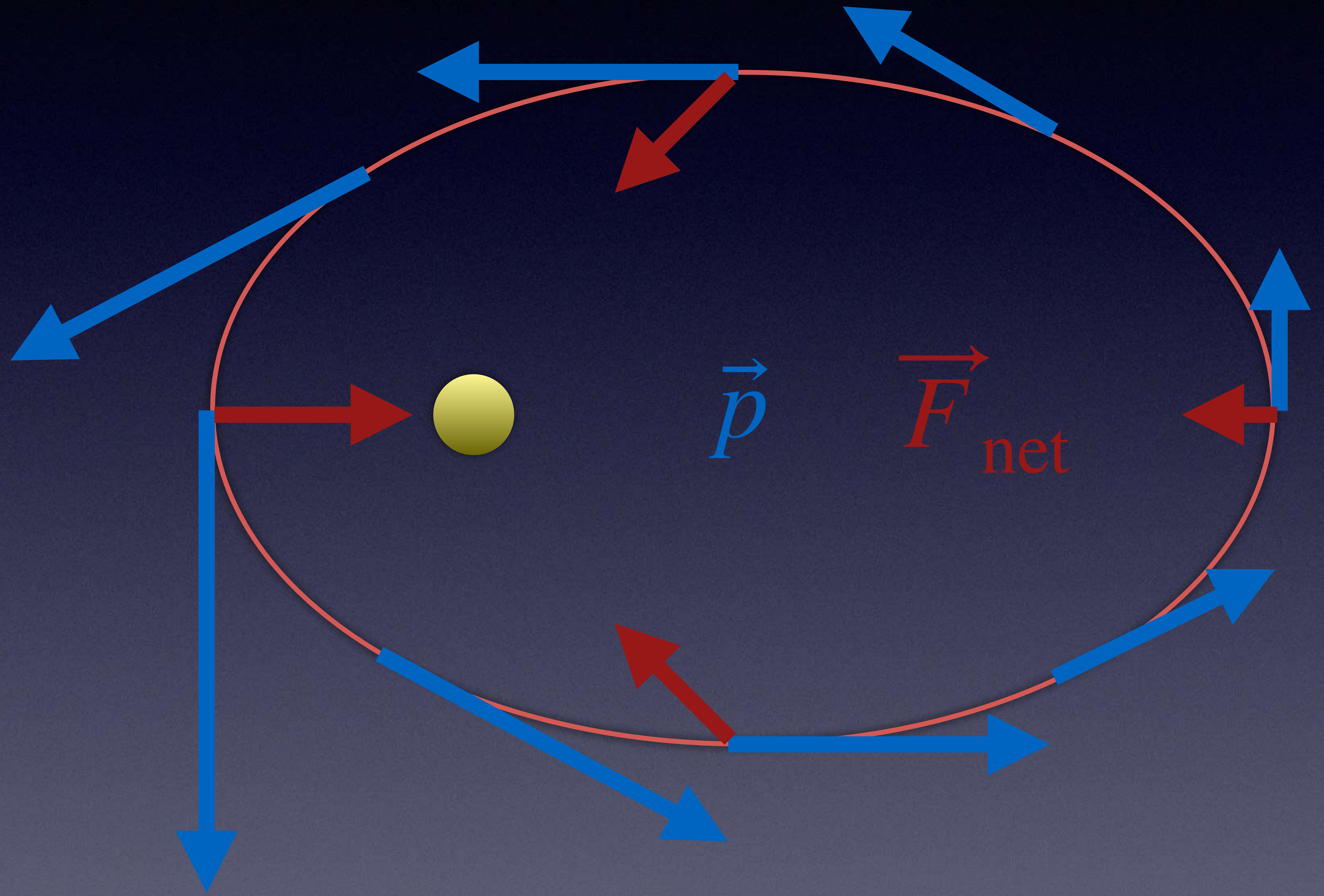


Kraft und Kurven-Bewegung

In einigen Situationen, in denen der Impuls $\vec{p}$ eines Systems nicht konstant ist, wie z. B. im Fall eines Objekts, das sich entlang einer gekrümmten Bahn mit variierender Geschwindigkeit bewegt, können sowohl $\vec{p}$ als auch $\vec{F}_{\text{net}}$ in Größe und Richtung variieren.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\left(\left|\vec{p}\right|\hat{p}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left|\vec{p}\right|}{\mathrm{d}t}\hat{p} + \left|\vec{p}\right|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}$$

Für $\vec{F}_{\text{net}}$ analog.



Der Impuls $\vec{p}$ eines Kometen (Pfeile) ändert sich in Größe und Richtung, während er einen Stern umkreist.

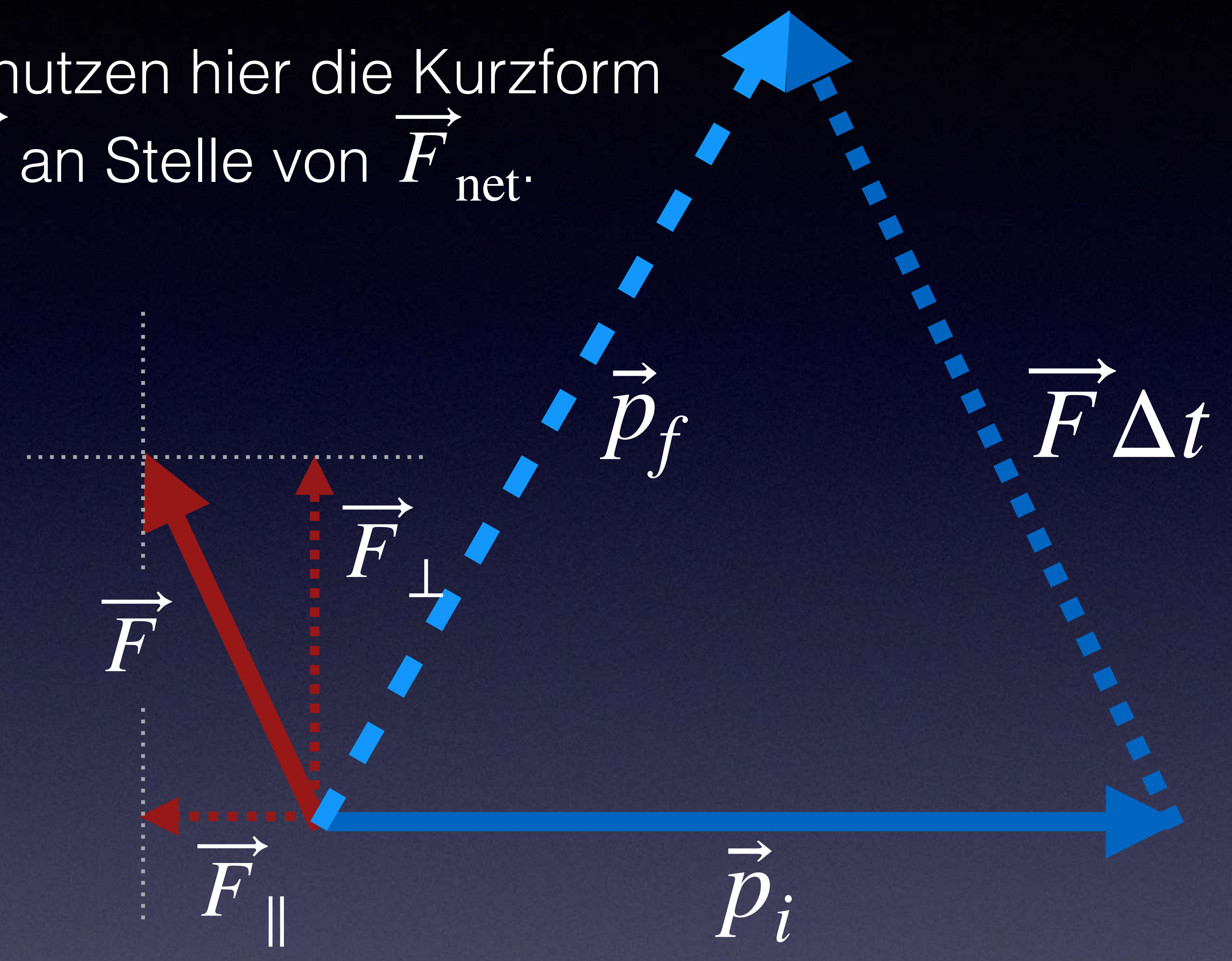
Bei der Analyse der Bewegung von Systemen, die sich in 2D oder 3D mit wechselndem Impuls bewegen, ist es oft sinnvoll, sowohl die **Nettokraft** $\overrightarrow{F}_{\text{net}}$ **als auch** $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ **in zwei Teile zu unterteilen**: einen Teil **parallel zum momentanen Impuls** des Systems und einen Teil **senkrecht zum momentanen Impuls**. Mit dieser Strategie werden wir uns im weiteren Verlauf des Kapitels auf das Verständnis der Kurvenbewegung konzentrieren. Wir werden die Werte der unbekannten Kräfte für Systeme wie einen Kometen, der um einen Stern kreist, Tarzan, der an einer Liane schwingt, sowie einem „bodenlosen“ Fahrgeschäft in einem Vergnügungspark, ermitteln.

Um die auf der vorangehenden Folie skizzierte Idee allgemein auszudrücken, sei darauf hingewiesen, dass jeder Vektor als Summe zweier anderer Vektoren geschrieben werden kann, die senkrecht zueinander stehen (siehe nebenstehende Abbildung). Wir können die wirksame Nettokraft in eine Komponente $\vec{F}_{\parallel}$ parallel zu $\vec{p}$ und eine zweite Komponente $\vec{F}_{\perp}$ senkrecht zu $\vec{p}$ zerlegen:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\,.$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{F}\Delta t$$

Wir benutzen hier die Kurzform $\vec{F}$ an Stelle von $\vec{F}_{\text{net}}$.

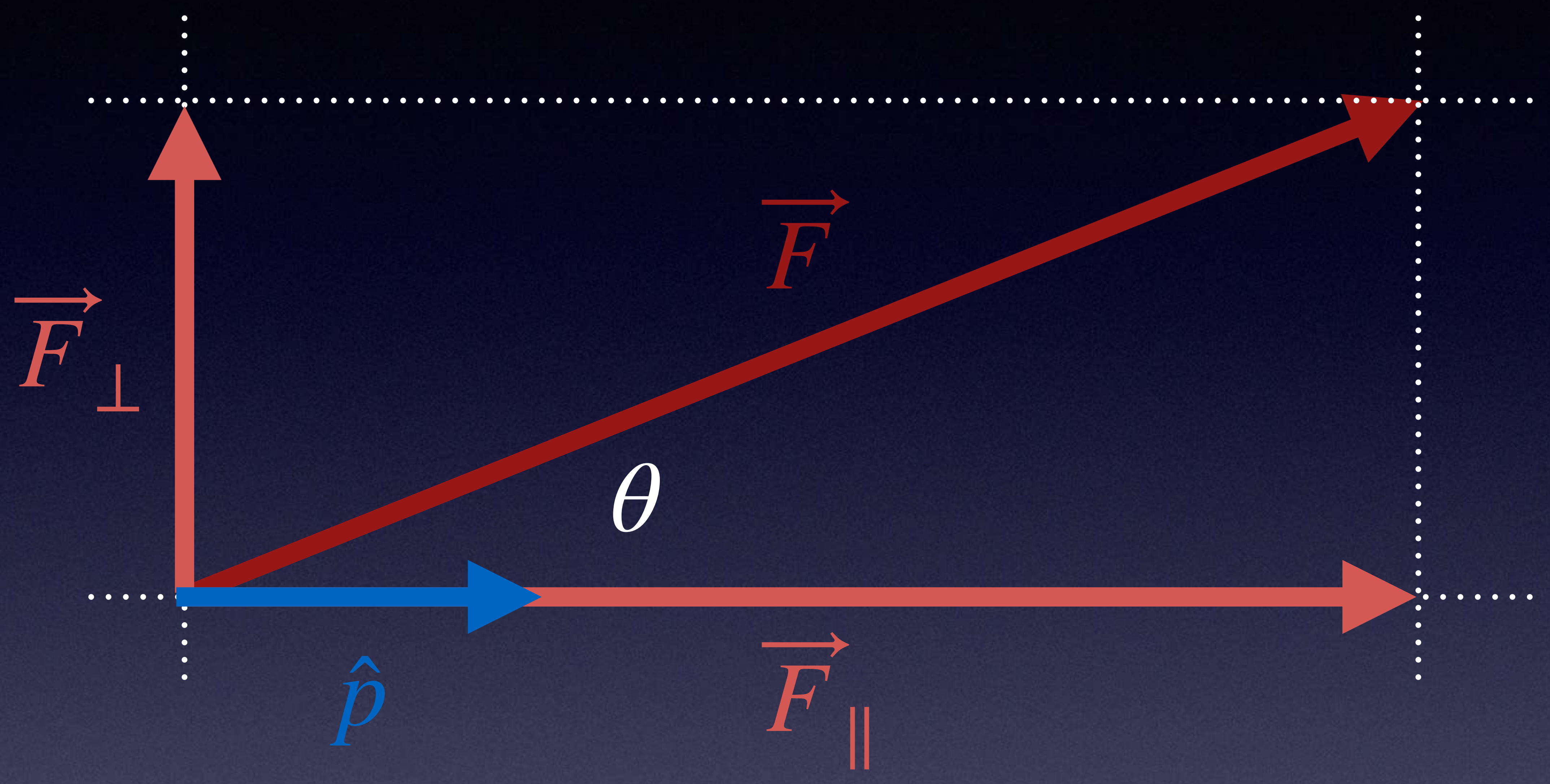


$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\Delta\vec{p} = \left(\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\right)\Delta t = \vec{F}_{\parallel}\Delta t + \vec{F}_{\perp}\Delta t$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass stets $\vec{F} \perp \vec{p}$, also $\vec{F} = \vec{F}_{\perp}$, gelten soll. Je größer der Kraftstoß, desto stärker wird die Bahn gekrümmt (konstante Krümmung, Kreisbahn). Im Grenzfall $\vec{F} = \vec{0}$ wird die Krümmung null: Das Objekt bewegt sich dann entlang einer geraden Linie.

Es ist einfach zu sehen, dass der zum Impuls parallele Teil $\vec{F}_{\parallel}$ einer Kraft, mit Änderungen der Größe $\left|\vec{p}\right|$ des Impulses des Objekts verbunden ist, während die dazu senkrechte Komponente $\vec{F}_{\perp}$ die Richtung $\hat{p}$ des Impulses verändert. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Zerlegung der Kraft in zwei an $\vec{p}$ orientierte, zueinander senkrechte Komponenten. Insbesondere der Richtungskosinuns zwischen $\hat{p}$ und $\vec{F}$ (eingeschlossener Winkel θ) ist dabei von Bedeutung.



$$\vec{F}_{\parallel} = \left(\vec{F}\cdot\hat{p}\right)\hat{p} = \left(\left|\vec{F}\right|\cos\angle\left(\vec{F},\hat{p}\right)\right)\hat{p}$$

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$$

Auf der vorangehenden Folie tritt in der Formel zur Berechnung der Komponente $\overrightarrow{F}_{\|}$ der Winkel θ auf, der im allgemeinen 3D-Fall nicht einfach zu ermitteln ist. Deshalb sei hier noch einmal an das Skalarprodukt (kartesische Koordinaten) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erinnert:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \; .$$

Die Berechnung der Komponente $\overrightarrow{F}_{\|}$ vereinfacht sich hierdurch auf:

$$\overrightarrow{F}_{\|} = \left(\overrightarrow{F} \cdot \hat{p}\right) \hat{p} = \left(F_x \hat{p}_x + F_y \hat{p}_y + F_z \hat{p}_z\right) \left\langle \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z \right\rangle \; .$$

Wir sehen, dass wir das gewünschte Ergebnis auch ohne Kenntnis von θ erhalten.

Kontrollpunkt 4

1. Ein Planet umkreist einen Stern und folgt dabei einer elliptischen Bahn. In einem Moment, in dem der Impuls des Planeten $\vec{p}_i = \left\langle 3 \times 10^{29}, -6 \times 10^{28}, 0 \right\rangle \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ ist, ist die Kraft, die der Stern auf den Planeten ausübt $\overrightarrow{F} = \left\langle -4 \times 10^{22}, 1 \times 10^{23}, 0 \right\rangle \ \mathrm{N}$. (1) Bestimme die Teile der Gravitationskraft, die parallel und senkrecht zum Impuls des Planeten verlaufen. (2) Wie werden diese Kräfte den Impuls des Planeten im nächsten kleinen Zeitintervall beeinflussen, d.h., welche Wirkung haben sie auf Geschwindigkeit und (Flug-) Richtung des Planeten?

In einem **computergestützten Modell** zu Berechnung beliebiger Bahnkurven, kann es oft sehr aufschlussreich sein, die parallelen und senkrechten Teile der Nettokraft anzuzeigen, da die eine die **Geschwindigkeitsänderung** und die andere die **Richtungsänderung** bestimmt. Die **Programmiersprache VPython** bietet bequeme Möglichkeiten, das Skalarprodukt sowie den Einheitsvektor zu berechnen. Unter der Annahme, dass der aktuelle Impuls und die Nettokraft die (**VPython**-) Vektoren **p** und **F** sind, können die relevanten Kraft-Komponenten wie folgt berechnet werden:

- `p_hat = norm(p)                # create unit vector from p`
- `F_para = dot(F,p_hat)*p_hat # parallel component`
- `F_perp = F - F_para          # perpendicular component`

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$ für beliebige Bahnkurven

Wir haben gesehen, dass die auf ein Objekt wirkende **Nettokraft** zu jedem Zeitpunkt als **Summe von zwei Teilen** ausgedrückt werden kann: einem Teil, der **parallel zum Impuls** des Objekts verläuft, und einem weiteren Teil, der **senkrecht zum Impuls** des Systems steht. Das Gleiche gilt auch für die Änderungsrate des Impuls:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp}, \text{ oder mit } \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\left(\left|\vec{p}\right|\hat{p}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left|\vec{p}\right|}{\mathrm{d}t}\hat{p} + \left|\vec{p}\right|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}\left[\equiv \vec{F}_{\mathrm{net}\,\parallel} + \vec{F}_{\mathrm{net}\,\perp}\right].$$

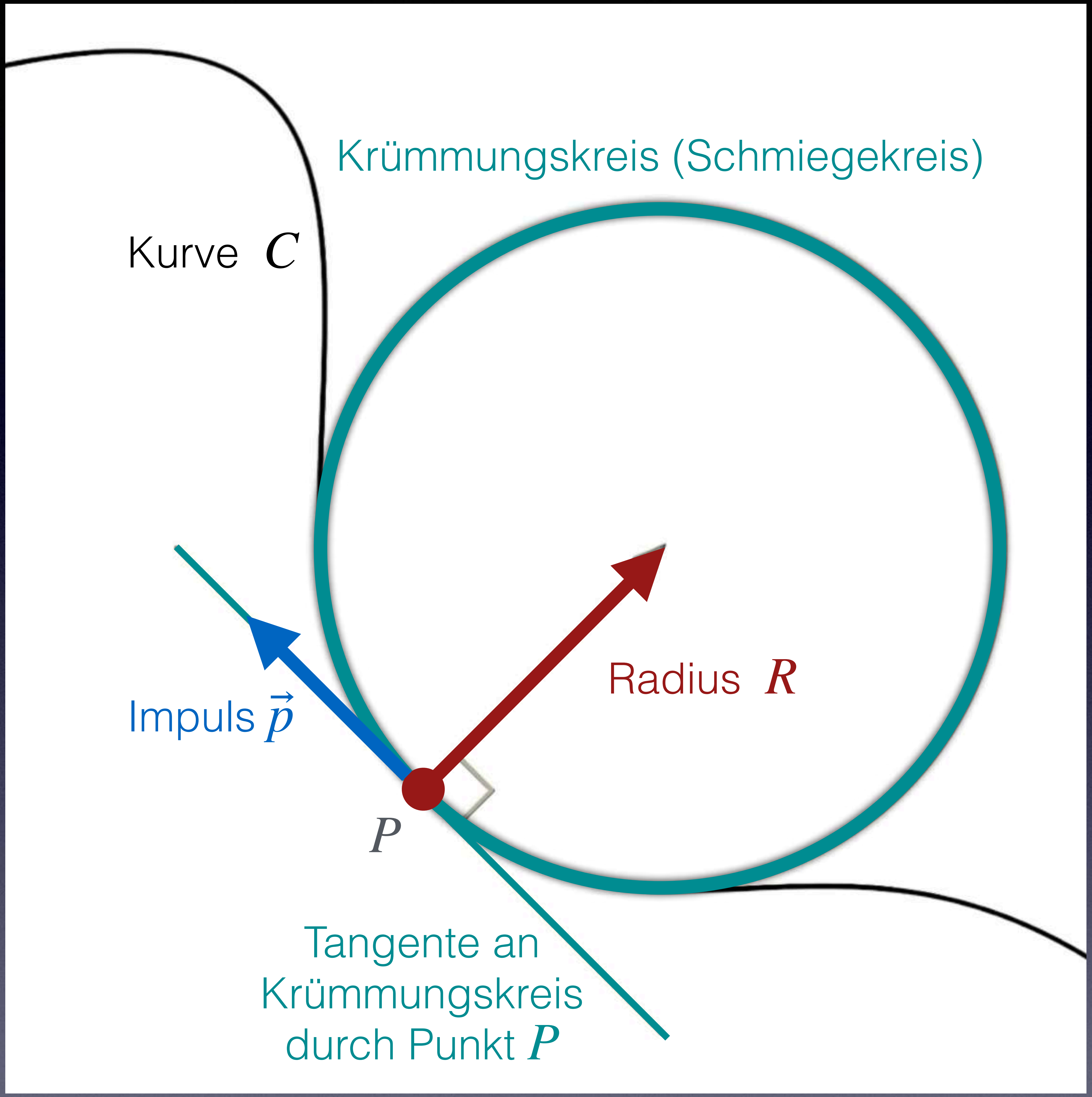
Der erste Term beschreibt die **Änderung des Betrags des Impuls** und der zweite Term die **Änderung der Richtung**.

Beachte, dass die Formulierung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left|\vec{p}\right|}{\mathrm{d}t}\hat{p} + \left|\vec{p}\right| \frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}$$

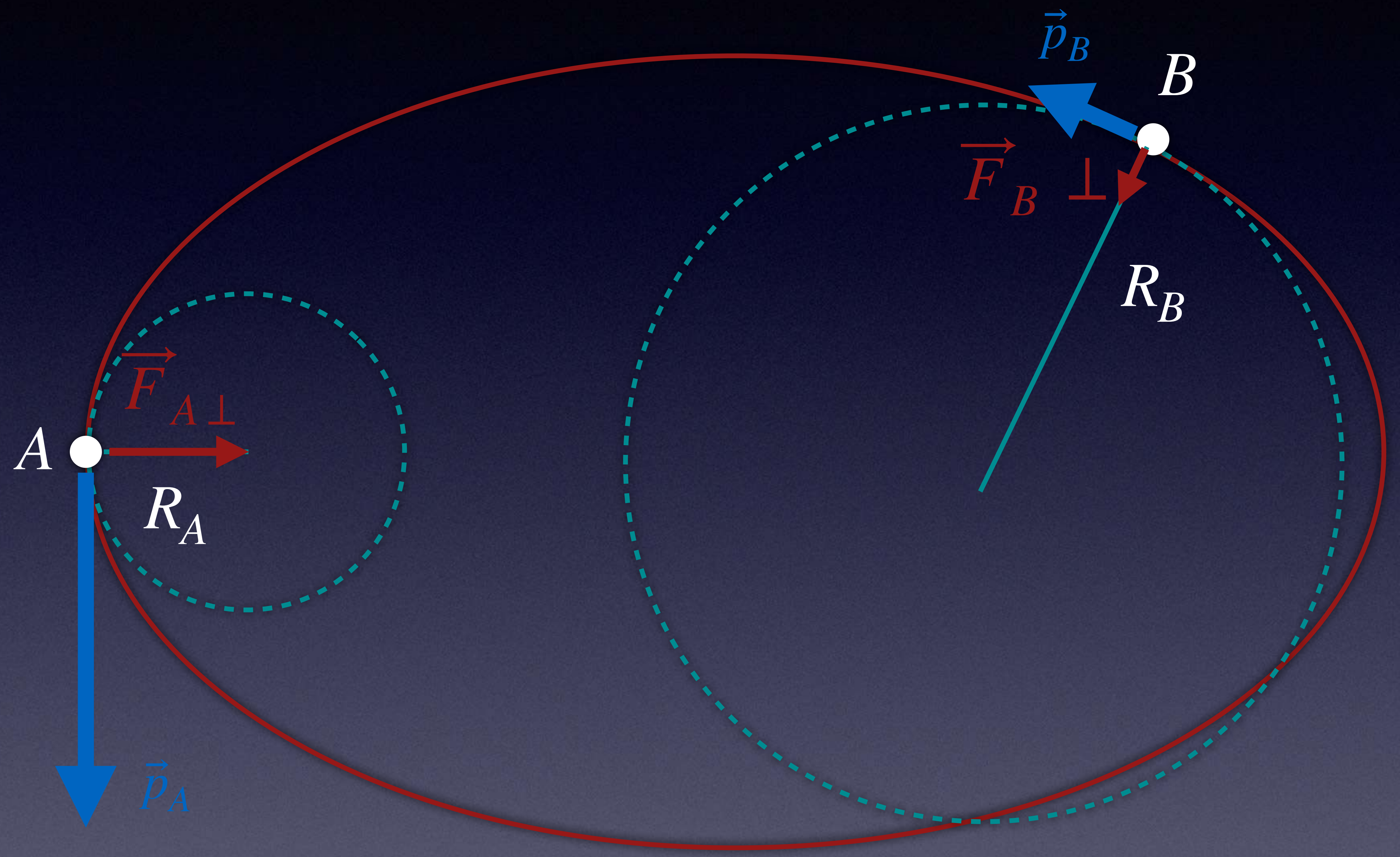
nur bei gleichmäßigen, kontinuierlichen Bahnkurven sinnvoll ist ($\vec{p}$ muss stetig differenzierbar sein). An Wendepunkten oder zu anderen Zeiten, wenn sich $\hat{p}$ abrupt ändert, ist $\mathrm{d}\hat{p}/\mathrm{d}t$ undefiniert. Die obige Formulierung ist nützlich, um z. B. die Werte der unbekannten Kräfte zu ermitteln, die eine solche kontinuierliche Bewegung verursachen.

Die Bewegung entlang einer Kreisbahn lässt sich leicht durch Angabe des Kreisradius R beschreiben. Wir brauchen jedoch eine Möglichkeit, die **momentane Krümmung der Bahn** eines Objekts zu beschreiben, **wenn diese Bahn nicht kreisförmig ist**. Betrachten wir die Bewegung entlang der nebenstehenden Kurve C. Ein **Krümmungskreis mit Radius R** berührt die Kurve C im Punkt P, wobei der **Kreis und die Bahn dieselbe Tangente haben und in P denselben Krümmungsradius besitzen**. Der momentane Impuls $\vec{p}$ im Punkt P liegt (ebenfalls) tangential am Krümmungskreis an.



Kurve *C* (mit örtlich gleichbleibender Krümmung) und ihr Krümmungskreis an den Punkt *P*.
Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Krümmungskreis.

Sowohl die senkrechte Komponente $\vec{F}_{\mathrm{net}\perp}$ der Nettokraft $\vec{F}_{\mathrm{net}}$, als auch der Teil $(\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t)_\perp$ des momentanen Impuls $\vec{p}$ zeigen in Richtung des Mittelpunkts des (lokalen) Krümmungskreises. **Für eine größere Kraft ist der Radius des Krümmungskreises kleiner** (enge Kurve), **für eine kleinere Kraft entsprechend größer** (weite Kurve). Wenn die Krümmung der Bahn eines Objekts variiert, dann ist auch der Radius des Krümmungskreises an verschiedenen Stellen der Bahn unterschiedlich, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist.



Der Radius des Krümmungskreises (gestrichelte Linien) kann an verschiedenen Stellen entlang einer Bahn unterschiedlich sein, wie z. B. bei der dargestellten elliptischen Bahn.

Wir können die geometrische Überlegungen nutzen (siehe nebenstehende Abbildung), um einen Ausdruck für $\mathrm{d}\hat{p}/\mathrm{d}t$ abzuleiten, also der Rate, mit der sich die Richtung des Impulses ändert. In der Abbildung sehen wir ein punktförmiges Objekt, das sich in sehr kurzer Zeit Δt um eine Strecke $\left|\vec{v}\right| \Delta t$ entlang einem Abschnitt des Krümmungskreises mit Radius R bewegt. Dabei wird ein kleiner Winkel θ (im Bogenmaß) durchlaufen. Wir erhalten:

$$\frac{\left|\Delta\hat{p}\right|}{\left|\hat{p}_i\right|} = \frac{\left|\vec{v}\right| \Delta t}{R} \simeq \theta$$

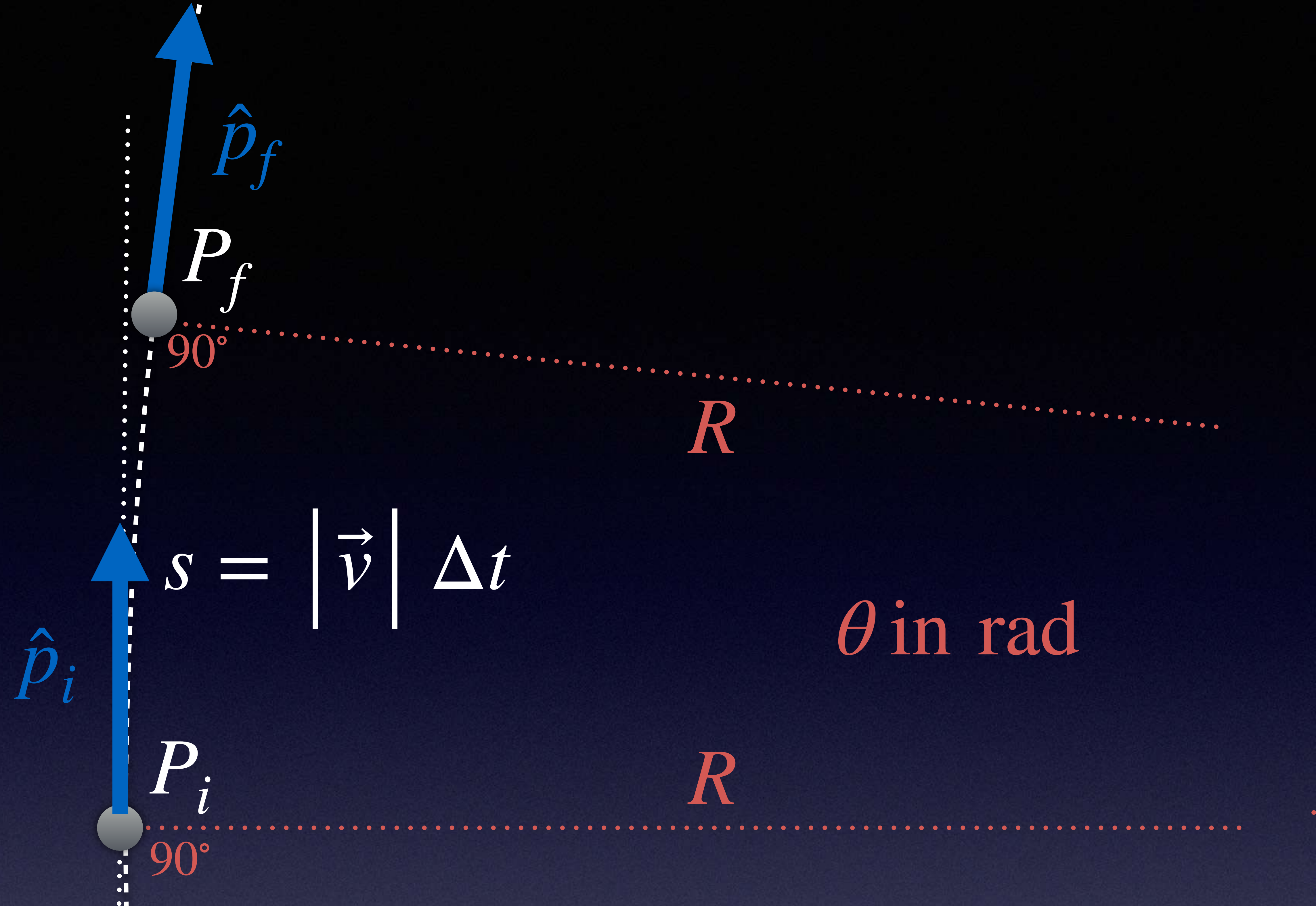
. Mit $\left|\hat{p}_i\right| = 1$ folgt

$$\frac{\left|\Delta\hat{p}\right|}{\Delta t} = \frac{\left|\vec{v}\right|}{R}$$

und damit

$$\lim_{\Delta t \to O} \frac{\left|\Delta\hat{p}\right|}{\Delta t} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\left|\vec{v}\right|}{R} \equiv \frac{v}{R}\,.$$

Abkürzungen:
$v = \left|\vec{v}\right|$



$$\frac{\left|\vec{v}\right| \Delta t}{2\pi R} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\left|\frac{\hat{p}_f - \hat{p}_i}{\hat{p}_i}\right| \equiv \frac{\left|\Delta\hat{p}\right|}{\left|\hat{p}_i\right|} \approx \theta \;(\theta \ll 1)$$

Mit der soeben abgeleiteten Beziehung

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{v}{R}\text{ , und (von früher) }\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left|\vec{p}\right|}{\mathrm{d}t}\hat{p} + \left|\vec{p}\right|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}$$

erhalten wir

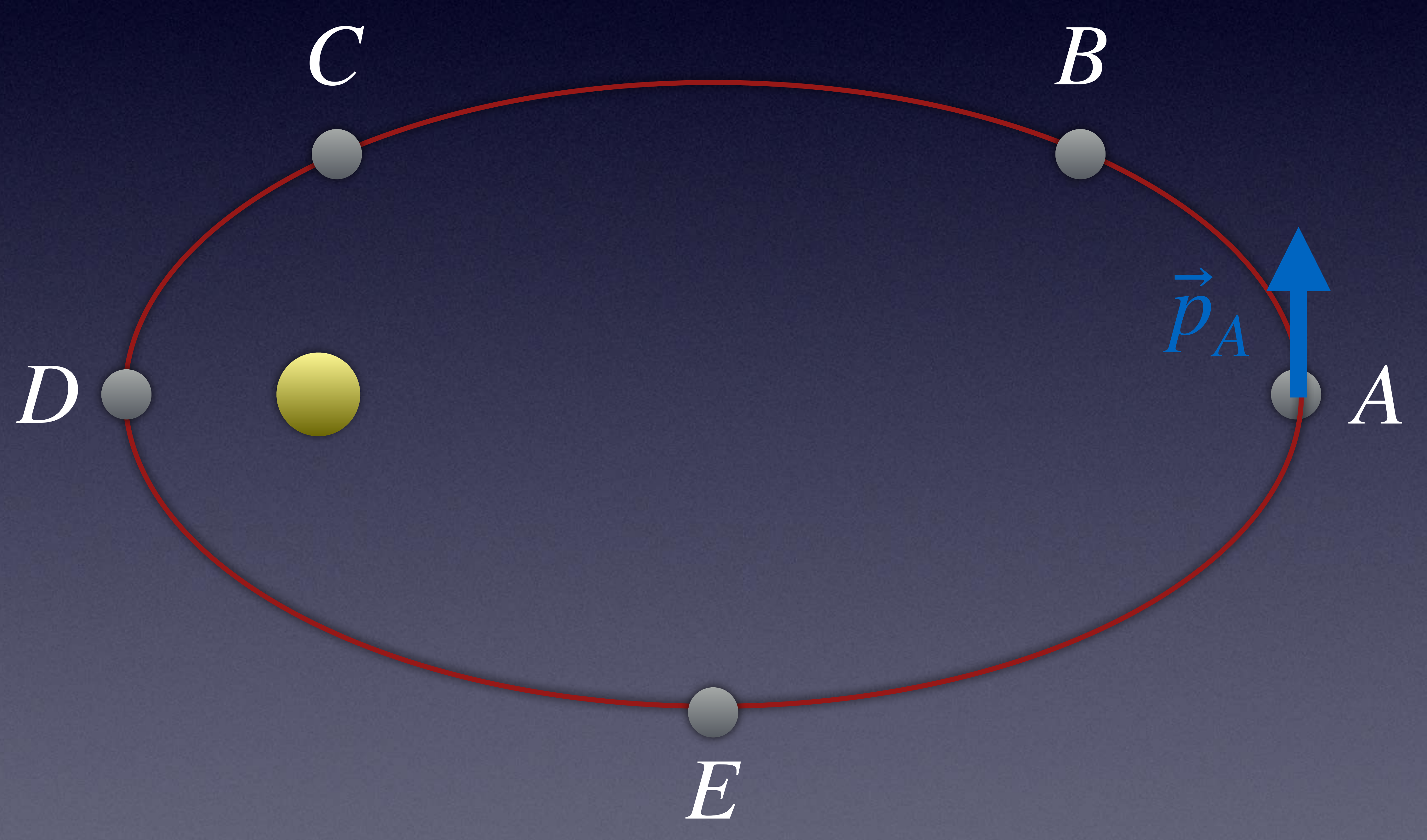
$$\left|\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp}\right| = \left|\vec{p}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}\right| = \gamma m v\frac{v}{R} = \frac{\gamma m v^2}{R}\ .$$

Insofern $\vec{r}$ die aktuelle Position und $\vec{r}_C$ das Zentrum des Krümmungskreises definiert, können wir schreiben:

$$\hat{r}_C \equiv \frac{\vec{r}_C - \vec{r}}{\left|\vec{r}_C - \vec{r}\right|}\text{ , und damit }\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \frac{\gamma m v^2}{R}\hat{r}_C \equiv \vec{F}_{\mathrm{net}\perp}\ .$$

Kontrollpunkt 5

1. Ein Komet umkreist einen Stern auf einer elliptischen Bahn. Der Impuls des Kometen am Ort A ist im Diagramm dargestellt. Beantworte folgende Fragen zur auf den Kometen wirkenden Nettokraft sowie zur Änderungsrate seines Impulses für seine Positionen A bis E: (1) Zeichne jeweils einen Pfeil, der Richtung und relative Größe der Gravitationskraft $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g$ des Sterns auf den Kometen darstellt. (2) Ist $\vec{F}_{\text{net}\perp}$ Null oder ungleich Null? (3) Ist $\vec{F}_{\text{net}\parallel}$ Null oder ungleich Null? (4) Ist $\mathrm{d}|\vec{p}|/\mathrm{d}t$ positiv, negativ oder null? (5) Ist $\mathrm{d}\hat{p}/\mathrm{d}t$ Null oder ungleich Null?

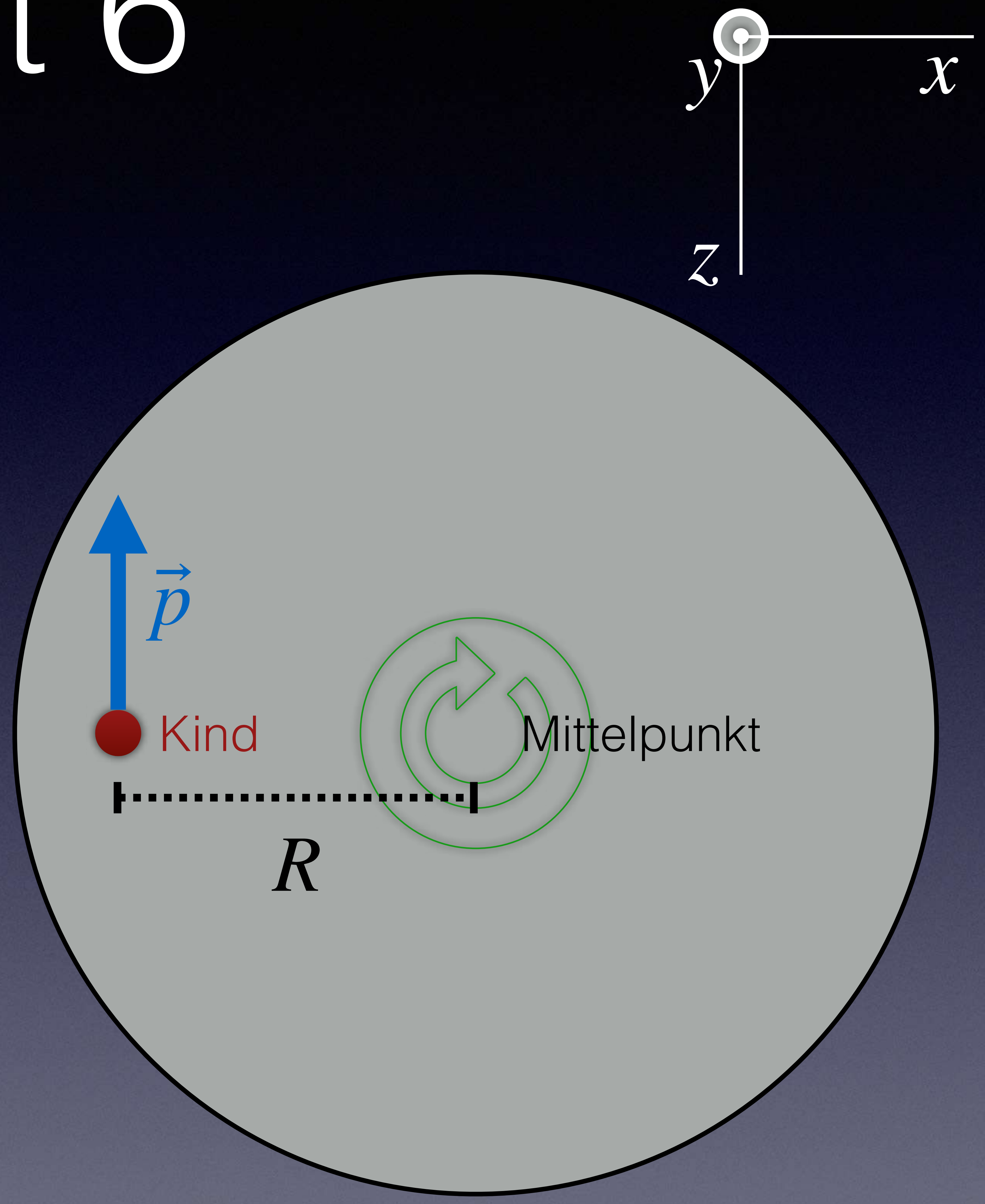


Die elliptische Umlaufbahn eines Kometen um einen Stern. Ein Pfeil stellt den Impuls des Kometen dar, wenn er sich an Position A befindet.

Im Zusammenhang mit Diskussionen über Kräfte entlang gekrümmter Bahnkurven hört man manchmal die Begriffe „**zentrifugal**“ und „**zentripetal**“. Diese Begriffe haben einfache Bedeutungen: „Zentrifugal“ bedeutet „**vom Zentrum weg**“ und „zentripetal“ bedeutet „**zum Zentrum hin**“. Gibt es eine „Zentrifugalkraft“, die an einer Kurvenbewegung beteiligt ist? Nein. **Solange wir uns in unserem (Standard-) Inertialsystem befinden, ist die Kraft, welche die Kurvenfahrt eines Objekts verursacht, auf die Innenseite der Kurve gerichtet, nicht auf die Außenseite**. Um Verwirrung zu vermeiden, denke daran, dass jede Kraft in einem Schnittdiagramm der Kräfte mit einem Objekt in der Umgebung verbunden sein muss.

Kontrollpunkt 6

1. Ein Kind, dessen Masse $m = 30\,\mathrm{kg}$ beträgt, sitzt auf einem Karussell in einem Abstand $R = 3\,\mathrm{m}$ von der Mitte. Das Karussell macht eine Umdrehung in $T = 8\,\mathrm{s}$. (1) Wie groß sind Betrag und Richtung der Nettokraft, die auf das Kind wirkt? (2) Wie groß muss der Haft-Reibungskoeffizient μ_s mindestens sein, damit das Kind nicht von dem Karussell rutscht?



Draufsicht auf ein Kind (roter Punkt) auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Karussell. Aktueller (Kind-) Impuls $\vec{p}$.

Zurück zu unserer Anekdote: Tarzan will eine Liane benutzen, um sich über einen Fluss zu schwingen. Um sicherzugehen, dass die Liane stark genug ist, um ihn zu tragen, testet er sie, indem er einige Minuten lang regungslos an der Liane hängt. Die Liane besteht diesen Test, und so ergreift Tarzan die Liane und schwingt sich über den Fluss. Er ist verärgert und erstaunt, als die Liane auf halber Strecke des Schwungs reißt und er mitten im kalten Fluss durchnässt und fröstelnd landet, zur großen Belustigung der umstehenden Affen. **Warum riß die Liane, während Tarzan mit ihr schwang, aber nicht, als er regungslos an ihr hing**?

Nun haben wir alle Werkzeuge zusammen, um das in Kapitel 4 erstmals vorgestellte Problem erfolgreich zu lösen. Siehe hierzu auch noch einmal Folie 11.


Liane
R (Kreis)
$\vec{v} = \vec{0}$
Startpunkt der Bewegung.
Tarzan am Ende seines Schwungs, kurz bevor die Liane reisst. Der Radius R des Kreises, auf dem sich Tarzan bewegt (gestrichelte Linie), entspricht der Länge der Liane. In dem dargestellte Moment ist Tarzans Geschwindigkeit am größten.
Wechselwirkung mit **Liane**:
• Kontaktkraft,
• Typ „Zugkraft“.
$\vec{F}_T$ (Liane)
y
z
x
System „Tarzan“ als Punktteilchen
$\vec{v}$ (Geschwindigkeit)
Wechselwirkung mit **Erde**:
• Abstandskraft,
• Typ „Gravitation“.
$\vec{F}_g$ (Erde)
Erde

x-Richtung: Aus der vorangehenden Folie wissen wir, dass für den dargestellten Zeitpunkt, die einzigen Kräfte, die auf Tarzan wirken, in *y*-Richtung wirken, da $\vec{v}$ und damit auch $\vec{p}$ hier maximal werden:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel} = \vec{0}\text{ , und damit } \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel} = \vec{F}_{\mathrm{net}\,\parallel} = \vec{0}\,.$$

y-Richtung: Die Nettokraft wirkt in Richtung des Mittelpunkts der Kreisbewegung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \vec{F}_{\mathrm{net}\,\perp} = \vec{F}_T + \vec{F}_g\text{ , und somit}$$

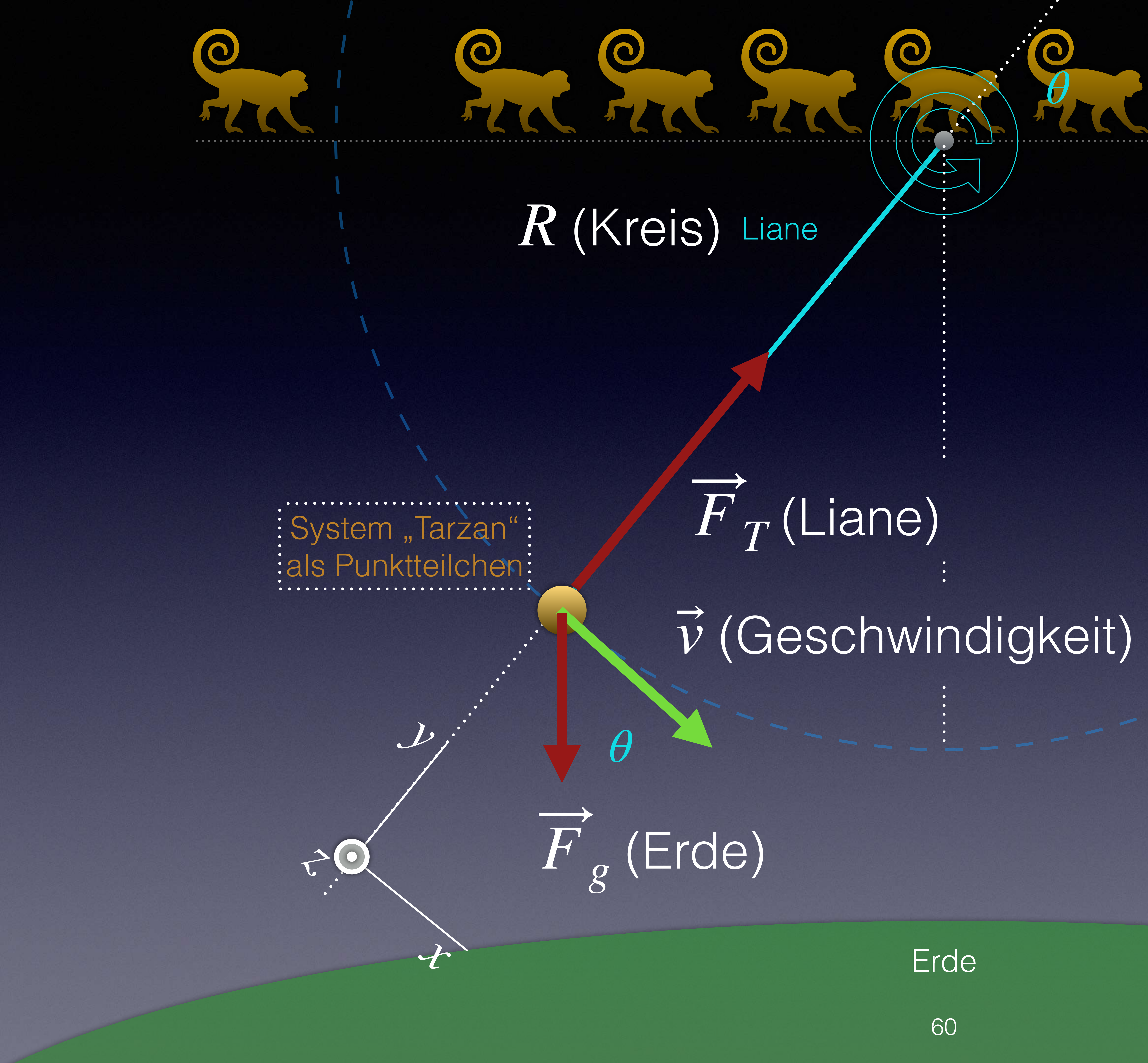
$$\left\langle 0,\frac{mv^2}{R},0 \right\rangle = \left\langle 0,F_T,0 \right\rangle + \langle 0,-mg,0\rangle \to F_T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) > mg\,.$$

Abkürzungen:

$$F_T = \left|\vec{F}_T\right|$$
$$g = \left|\vec{g}\right|$$

Die Zugkraft F_T, welche die Liane zu dem dargestellten Zeitpunkt maximaler Geschwindigkeit ausüben muss, ist damit größer als in der Situation, wenn Tarzan unbeweglich an ihr hing. Dies kann zu einem Reißen der Liane zu genau diesem Zeitpunkt führen.

Weshalb muss die Liane eine größere Kraft ausüben, wenn sich Tarzans Schwung verändert, als wenn er unbeweglich daran hängt? Es liegt nicht einfach daran, dass Tarzan sich bewegt. Sondern, um Tarzans Schwung von der Horizontalen in die Aufwärtsrichtung zu lenken, ist dafür eine nach oben gerichtete Nettokraft erforderlich. **Die zusätzliche Spannung in der Liane ist notwendig, um die Richtung von Tarzans Schwung zu ändern**.



Tarzan befindet sich mitten in seinem Schwung, Der Winkel θ beschreibt, wie angegeben, im mathematisch positiven Sinne, die Orientierung der Liane. Der Radius R des Kreises, auf dem sich Tarzan bewegt (gestrichelte Linie), entspricht der Länge der Liane.

Man beachte die angepasste Lage des *xy*-Koordinatensystems.

$$\hat{F}_T = \langle 0,1,0 \rangle$$

$$\hat{F}_g = \langle \cos\theta, \cos(90^\circ + \theta), 0 \rangle$$

$$\hat{F}_{\mathrm{net}\perp} = \langle 0,1,0 \rangle$$

$$\hat{F}_{\mathrm{net}\parallel} = \langle 1,0,0 \rangle$$

Parallel: $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\|} = mg\cos\theta\,\langle 1,0,0\rangle$.

- Wird dem Betrage nach maximal für $\theta = 0°$ oder $\theta = 180°$; dies entspricht einer horizontalen Position der Liane.
- Ist positiv für $0 \leq \theta < 90°$, d.h. die Größe des Impuls $\left|\vec{p}\right|$ nimmt beim Abwärtsschwung zu.
- Ist negativ für $90° < \theta < 180°$, d.h. die Größe des Impuls $\left|\vec{p}\right|$ nimmt beim Aufwärtsschwung ab.

Senkrecht: $$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \big(F_T + mg\cos(90^\circ + \theta)\big)\,\langle 0,1,0\rangle\ .$$

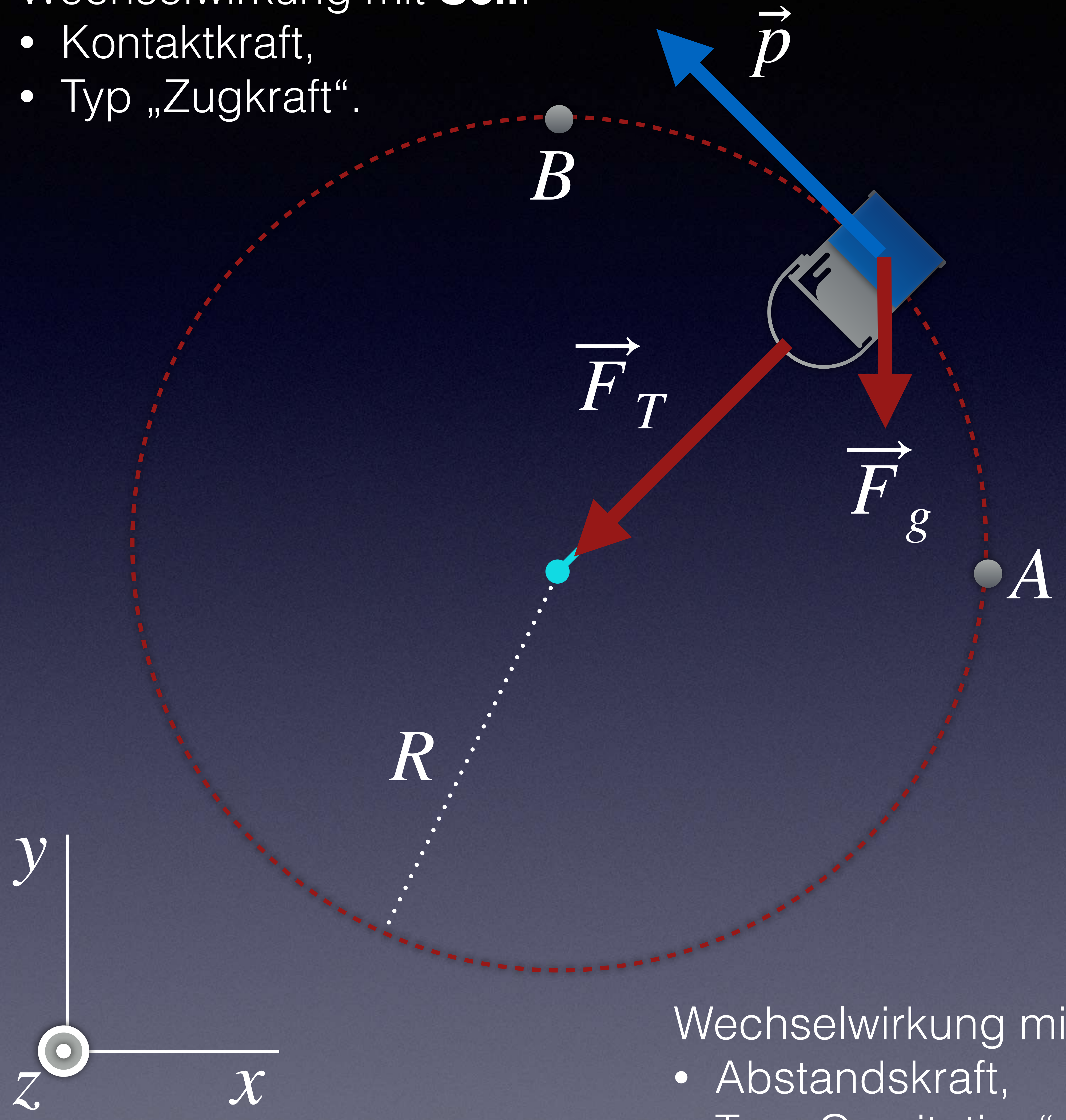
- F_T wird dem Betrage nach maximal für $\theta = 90^\circ$; dies entspricht der zuvor diskutierten, vertikal hängenden Liane, bei der auch die maximale Geschwindigkeit erreicht wird.
- Für $\theta = 0^\circ$ oder $\theta = 180^\circ$ bewirkt die Gravitationskraft keine Erhöhung der Zugspannung in der Liane.
- Der Verlauf der Zugspannung ist bei Abwärts- und Aufwärtsbewegung symmetrisch: $\left|\vec{F}_T(\theta = 90^\circ - \alpha)\right| = \left|\vec{F}_T(\theta = 90^\circ + \alpha)\right|\ .$

Kontrollpunkt 7

1. (1) Berechne für das Problem „Tarzan“ die maximale, durch die Liane ausgeübte Zugkraft F_T. Parameter: $m = 90\,\mathrm{kg}$, $R = 8\,\mathrm{m}$ und $\left|\vec{v}\right| = 12.5\ \mathrm{m/s}$. (2) Um wieviel Prozent ist dieser Wert größer als im Fall eines ruhig hängenden Tarzans? (3) Angenommen, es gilt $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2gR}$. Wie wirkt sich das auf die Zugkraft F_T in Abhängigkeit von der Länge R der Liane aus?

Schwingen eines Eimers in einer vertikalen Ebene: Du schwingst einen wassergefüllten Eimer am Ende eines Seils in einer vertikalen *xy*-Ebene so schnell, dass das Wasser im Eimer verbleibt. Der Massenschwerpunkt des Eimers und des Wassers bewegt sich ungefähr auf einem Kreis mit dem Radius R. Die Geschwindigkeit $\left|\vec{v}\right|$ des Eimers ist im unteren Bereich schneller und im oberen Bereich langsamer. Der Eimer mit dem Wasser hat eine Masse m. In dem Augenblick, in dem das Seil waagerecht ist, beträgt die Geschwindigkeit des Eimers $\left|\vec{v}\right| = v_A$. Wie groß ist die Zugkraft $\left|\vec{F}_T\right|$ im Seil, wenn das Seil horizontal ist? Wie groß ist die Änderungsrate $\left|\vec{v}\right|/\mathrm{d}t$ der Geschwindigkeit in diesem Moment? Wie groß muss an Position B die Geschwindigkeit mindestens sein, damit das Wasser nicht aus dem Eimer herausfällt.

Wechselwirkung mit **Seil**:
- Kontaktkraft,
- Typ „Zugkraft“.



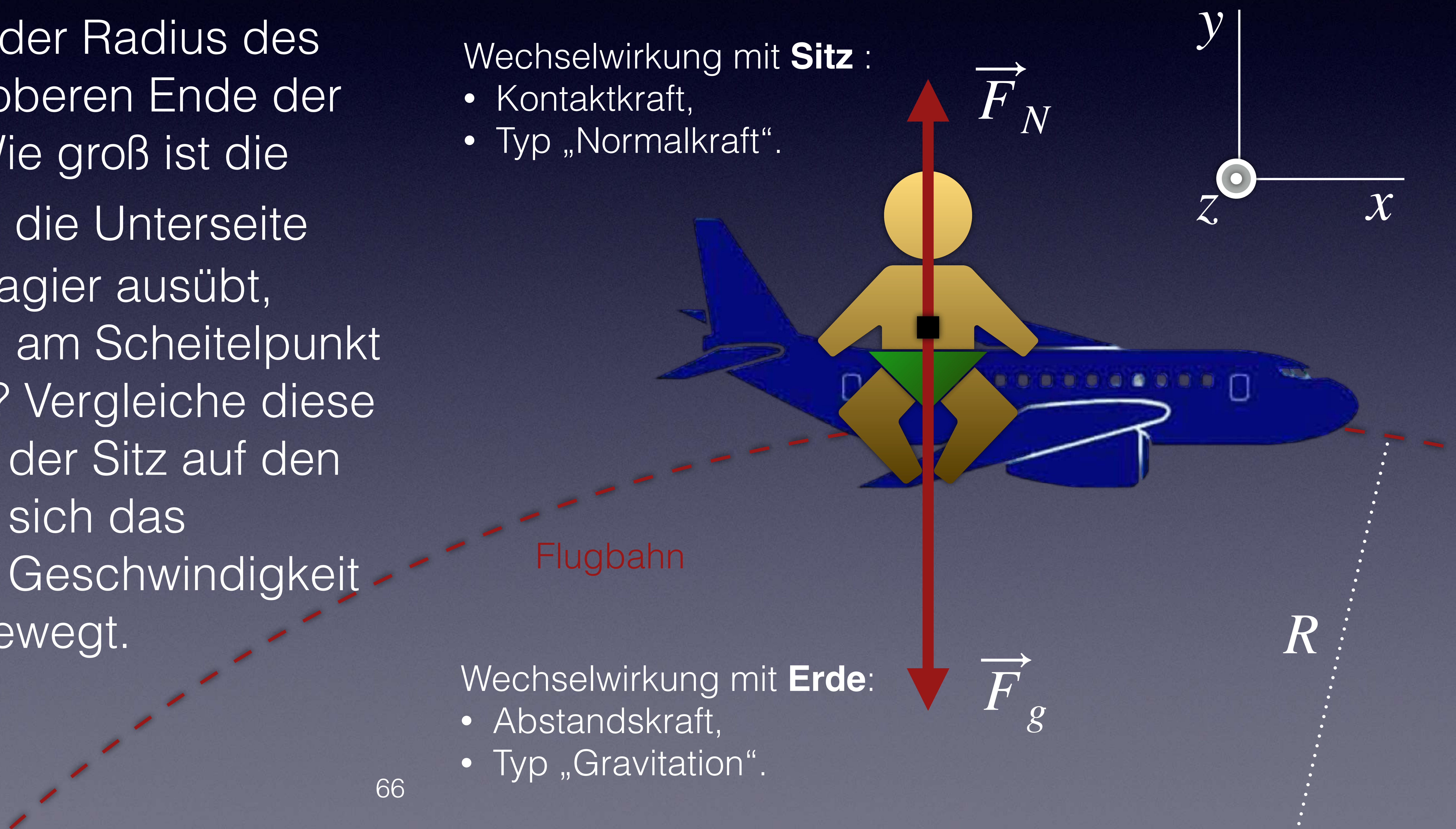
Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation“.

Zugkraft im Seil bei A: $\overrightarrow{F}_T|_A = \frac{mv_A^2}{R}\langle -1,0,0\rangle$.

Änderungsrate der Geschwindigkeit bei A: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}|_A = g\,\langle 0,-1,0\rangle$.

Minimale Geschwindigkeit bei B: $\left|\vec{v}\right|_B \geq \sqrt{gR}$. In dieser (Grenz-) Situation wird die Zugkraft $\overrightarrow{F}_T = \vec{0}$ und das Seil ist spannungsfrei.

Ein Passagier mit einer Masse m fliegt in einem Flugzeug, das mit konstanter Geschwindigkeit $\left|\vec{v}\right|$ eine gekrümmte Bahn zurücklegt, wobei der Radius des Krümmungskreises am oberen Ende der Flugbahn gleich R ist. Wie groß ist die Normalkraft $\vec{F}_N$, welche die Unterseite des Sitzes auf den Passagier ausübt, wenn sich das Flugzeug am Scheitelpunkt seines Bogens befindet? Vergleiche diese Kraft mit derjenigen, die der Sitz auf den Passagier ausübt, wenn sich das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt.



$$\left| \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right)_{\parallel} \right| = 0; \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right)_{\perp} = \overrightarrow{F}_N + \overrightarrow{F}_g$$. Werte eingesetzt

$$\left\langle 0, -\frac{mv^2}{R}, 0 \right\rangle = \langle 0, F_N, 0 \rangle + \langle 0, -mg, 0 \rangle$$

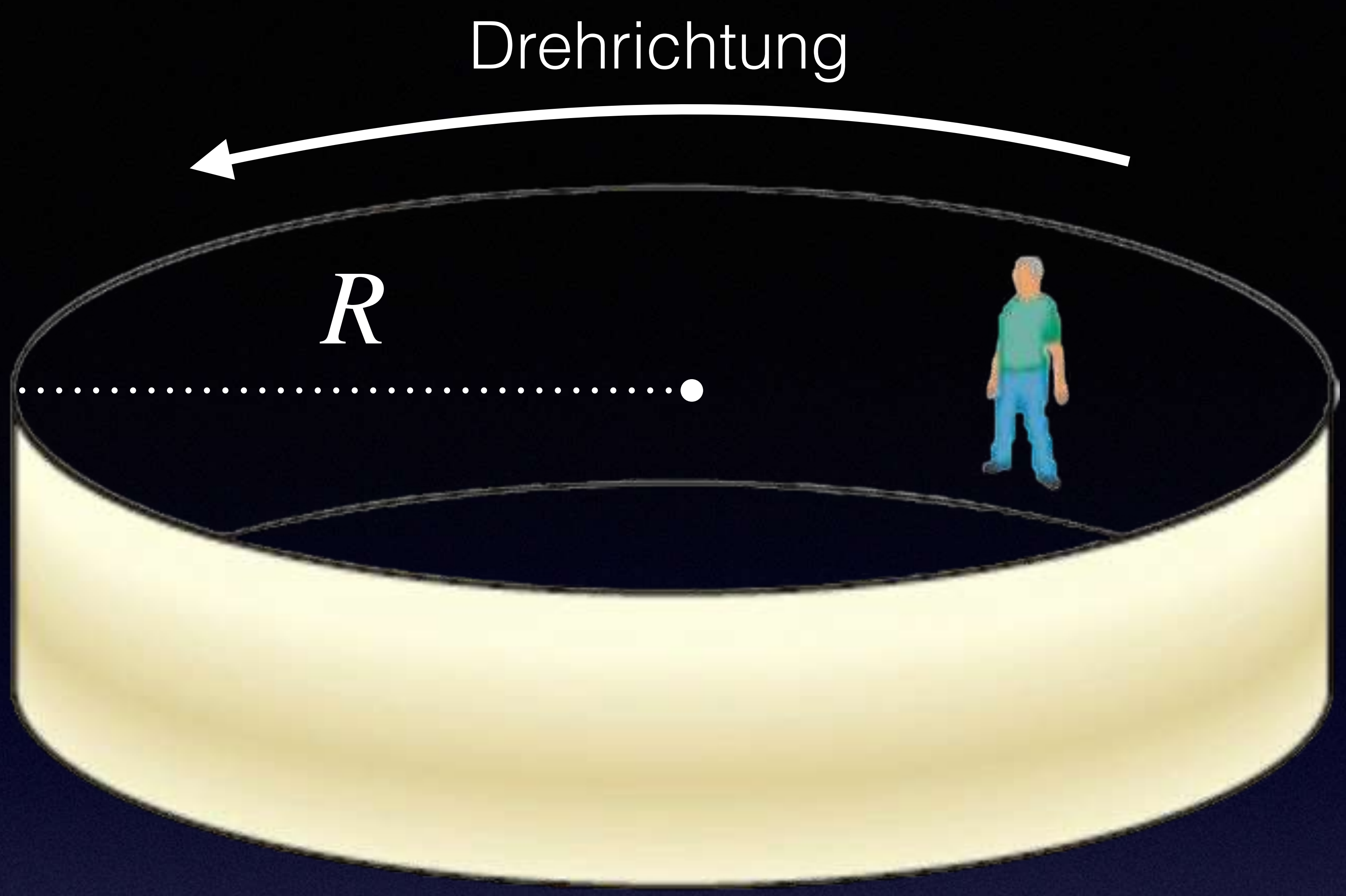
$$\overrightarrow{F}_N = \left\langle 0, m\left(g - \frac{v^2}{R} \right), 0 \right\rangle.$$

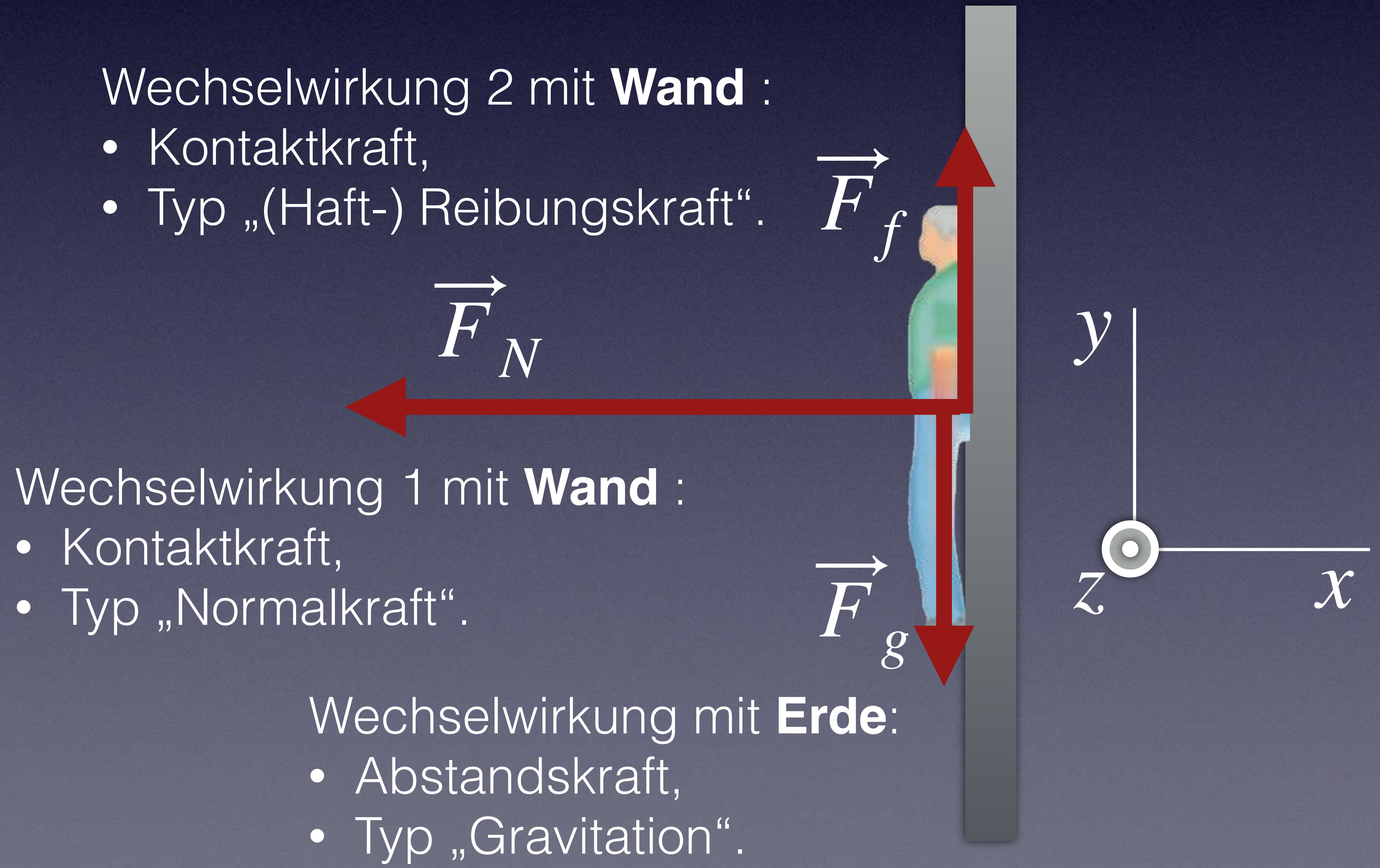
Der Passagier wird sich in dieser Phase des Fluges also „leichter“ als bei einem Flug entlang einer gerade verlaufenden Flugbahn fühlen. Im Grenzfall, für $\overrightarrow{F}_N = \vec{0}$, tritt für den Passagier „Schwerelosigkeit“ ein.

Während du diesen Text liest, spürst du ein Gefühl, das du mit deinem Gewicht in Verbindung bringst. In Wirklichkeit ist das, was du als „Gewicht“ wahrnimmst, gar nicht die Schwerkraft, sondern die Kräfte der Atome im Stuhl (oder im Flugzeugsitz, im Boden usw.) auf die Atome in deiner Haut. Es sind deine Nervenenden, welche die Kompression der interatomaren Bindungen in deiner Haut spüren. Du interpretierst diese als Beweis für die auf dich wirkende Schwerkraft. Wenn du also in einem Flugzeug sitzt, und dabei auf Grund der Flugbahn des Flugzeugs den Kontakt zum Sitz verlierst, so spürst du keine Kontaktkräfte mehr und du fühlst dich „schwerelos“. Aber: Die einzige Kraft, die in diesem Moment auf dich wirkt, ist die Schwerkraft der Erde. Die **Schwerelosigkeit in Erdnähe** ist paradoxerweise damit verbunden, dass man **nur noch seinem eigenen Gewicht unterworfen** ist. Um Astronauten zu trainieren, verfügt die NASA über ein umgebautes Frachtflugzeug, das absichtlich in einer abwärts gerichteten Parabel geflogen wird, so dass die Menschen im gepolsterten Innenraum den Kontakt zum Flugzeugboden verlieren und frei zu schweben scheinen (in Wirklichkeit beschleunigen sie aufgrund der auf sie wirkenden Kräfte auf die Erde zu).

Weitere Fragestellungen

Es gibt ein Fahrgeschäft im Vergnügungspark, bei dem eine Gruppe von Personen an der zylindrischen Wand des Fahrgeschäfts mit einem Radius R steht und das Fahrgeschäft beginnt, sich mit immer höherer Geschwindigkeit zu drehen. Die Oberfläche der Wand ist so beschaffen, dass die Reibung zwischen der Person und der Wand groß wird. Die Wand ist also hinreichend rau, in jedem Fall nicht glatt. Wenn eine bestimmte kritische Geschwindigkeit $\left|\vec{v}_c\right|$ erreicht ist, wird der Boden nach unten abgesenkt, so dass die Personen an der Wand haften bleiben, während sie mit konstanter Geschwindigkeit herumwirbeln. Wie schnell muss das Fahrgeschäft fahren, damit eine Person nicht herunterfällt?



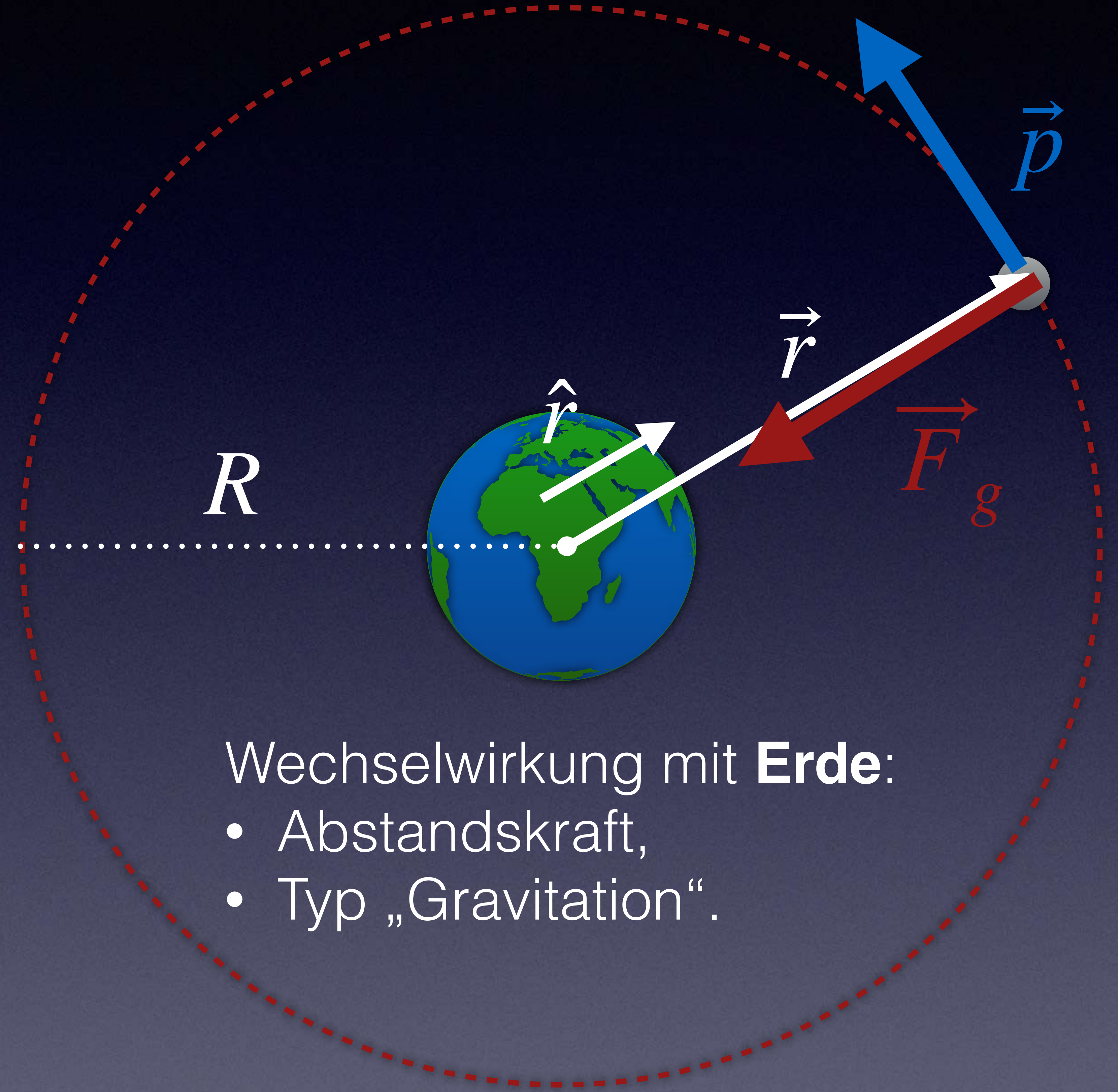


$$\left|\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel}\right| = 0;\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \overrightarrow{F}_N;\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{y} = \overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_f = \vec{0}\,.$$

$$\left\langle -\frac{mv^2}{R},0,0 \right\rangle = \left\langle -F_N,0,0\right\rangle + \left\langle 0,\mu_s F_N - mg,0\right\rangle\,.$$

$$\overrightarrow{F}_N = \left\langle -\frac{mv^2}{R},0,0 \right\rangle;\ \overrightarrow{F}_f = \langle 0,mg,0\rangle;\ \mu_s \geq \frac{gR}{v^2} \rightarrow v \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu_s}}\,.$$

Wie lange (Periode T) braucht ein Satellit (Masse m) auf einer kreisförmigen Umlaufbahn mit einem bestimmten Radius R, um einen vollständigen Umlauf um die Erde (Masse M_E) zu machen?



Satellit auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde. Hinweis: Vektoren zur Verdeutlichung teilweise leicht versetzt eingezeichnet.

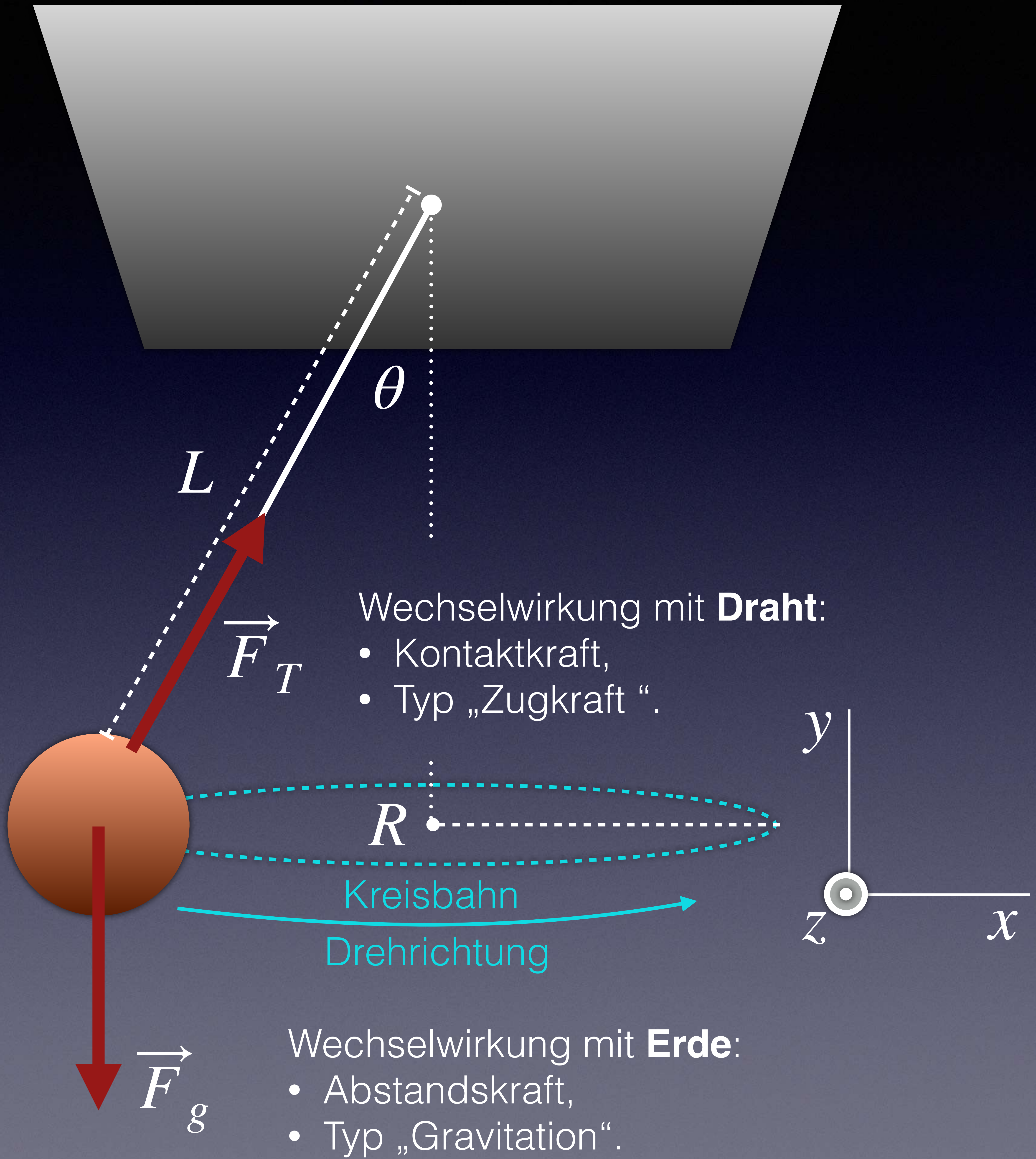
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \vec{0} + \vec{F}_g\,.$$

$$-\frac{\gamma m \left|\vec{v}\right|^2}{R}\hat{r} = -\frac{G M_E m}{R^2}\hat{r}\,;\, T = \frac{2\pi R}{\left|\vec{v}\right|}.$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\frac{G M_E}{\gamma R}} \rightarrow T = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\frac{G M_E}{\gamma}}}, \text{ für } \left|\vec{v}\right| \ll c \text{ ist } \gamma \simeq 1.$$

Da die Periode T proportional zu $R^{3/2}$ ist, ist die Periode umso kürzer, je kleiner der Radius R der Umlaufbahn ist. Deshalb sind geostationäre Satelliten weiter von der Erde entfernt als solche, die in weniger als einem Tag die Erde umkreisen.

Eine Kugel der Masse m ist an einem Draht aufgehängt und bewegt sich, nachdem sie angestoßen wurde, auf einer horizontalen Kreisbahn in der *xz*-Ebene, wie nebenstehend dargestellt. Du misst die Länge L des Drahtes und den Winkel θ (siehe Abbildung). Zusätzlich misst du auch die Zeit der Bewegung und stellst fest, dass die Kugel für einen vollständigen Umlauf T benötigt (Kreisbewegung). Bestimme aus diesen Messungen die Größe $\left|\vec{g}\right|$ des Gravitationsfeldes - Newton benutzte ein großes kreisförmiges Pendel, um mit hoher Genauigkeit $\left|\vec{g}\right|$ zu messen.



$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]_{\parallel} + \left[\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]_{\perp} = \vec{0} + \left(\overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_T\right).$$

$$\left\langle \frac{mv^2}{L\sin\theta},0,0 \right\rangle = \langle 0, -mg, 0\rangle + \left\langle F_T\sin\theta, F_T\cos\theta, 0\right\rangle.$$

$$F_T = \frac{mv^2}{L\sin^2\theta}, F_T = \frac{mg}{\cos\theta} : \to g = \frac{v^2\cos\theta}{L\sin^2\theta}$$

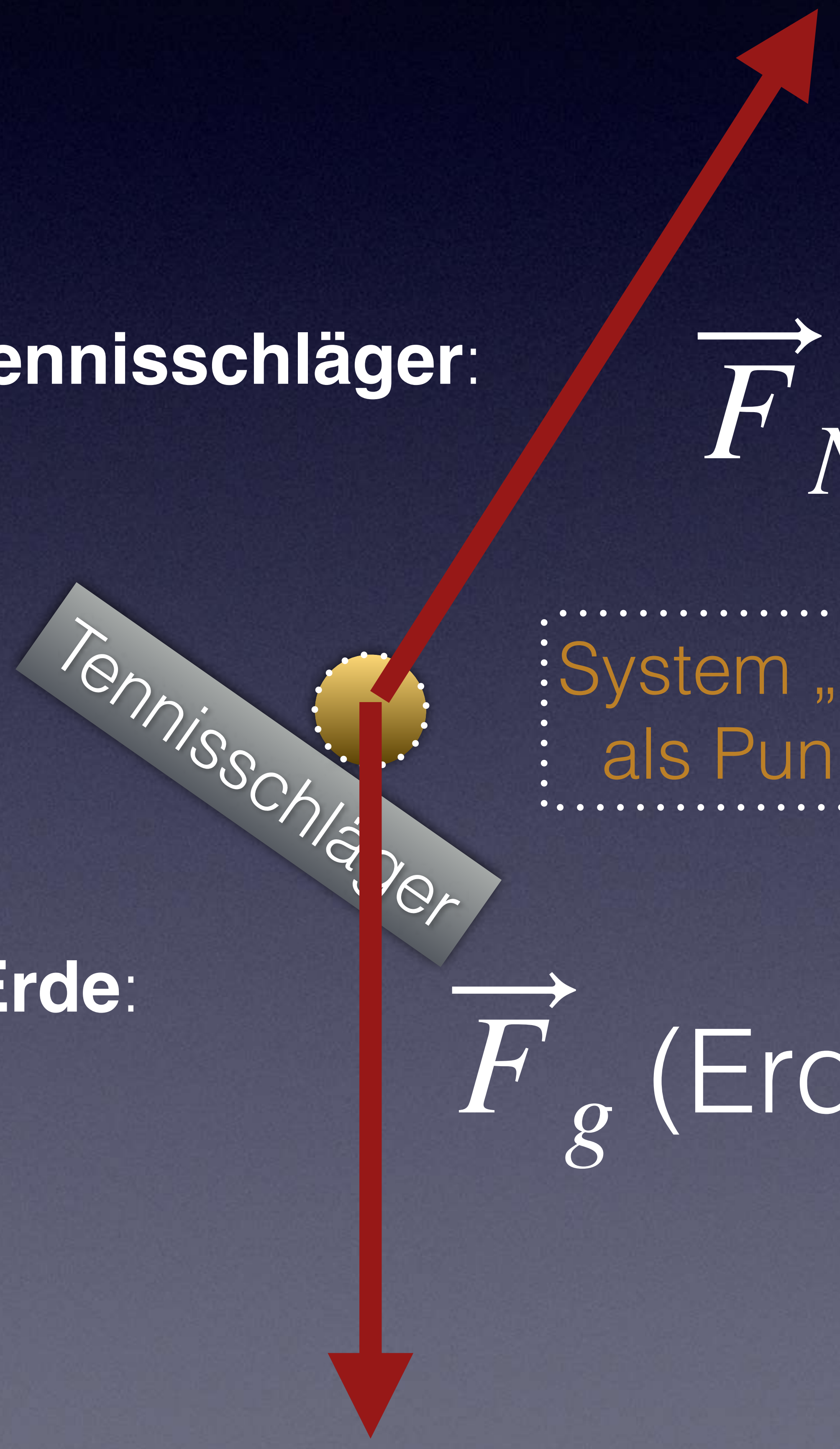
$$v = \frac{2\pi L\sin\theta}{T} : \to g = \frac{4\pi L\cos\theta}{T^2}.$$

Antworten
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: (1) Tennisball wird von einem Schläger getroffen. Kräfte im Augenblick des Ballkontakts.

Wechselwirkung mit **Tennisschläger**:
- Kontaktkraft,
- Typ „Normalkraft“.

$\vec{F}_N$ (Tennisschläger)



System „Tennisball“ als Punktteilchen

Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation“.

$\vec{F}_g$ (Erde)

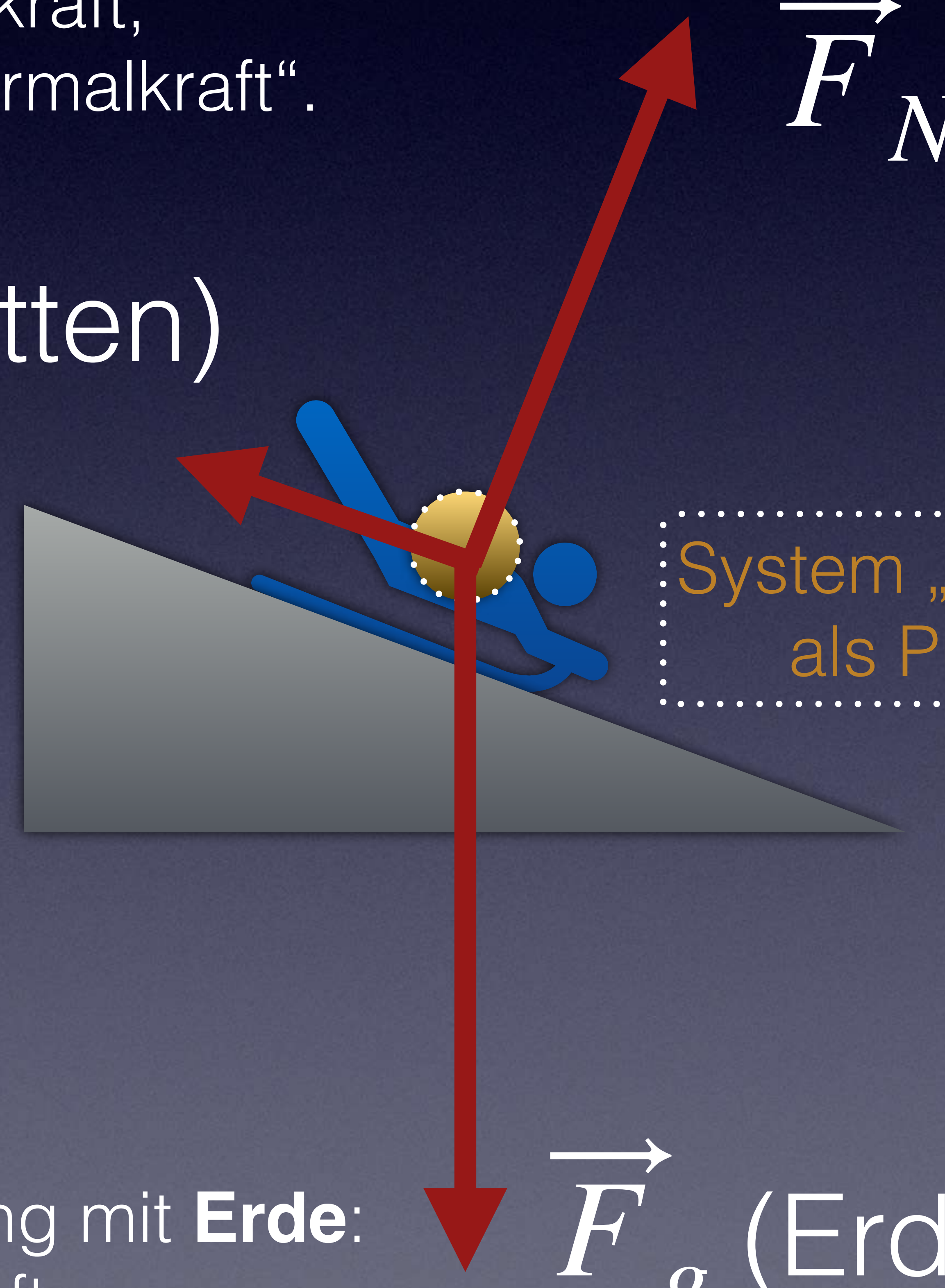
K1.1: (2) Schlittenfahrt, System 1 (Person)

Wechselwirkung 1 mit **Schlitten**:
- Kontaktkraft,
- Typ „Normalkraft“.

$\vec{F}_N$ (Schlitten)

$\vec{F}_f$ (Schlitten)

Wechselwirkung 2 mit **Schlitten**:
- Kontaktkraft,
- Typ „(Haft-) Reibungskraft“.



System „Schlittenfahrer“ als Punktteilchen

Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation“.

$\vec{F}_g$ (Erde)

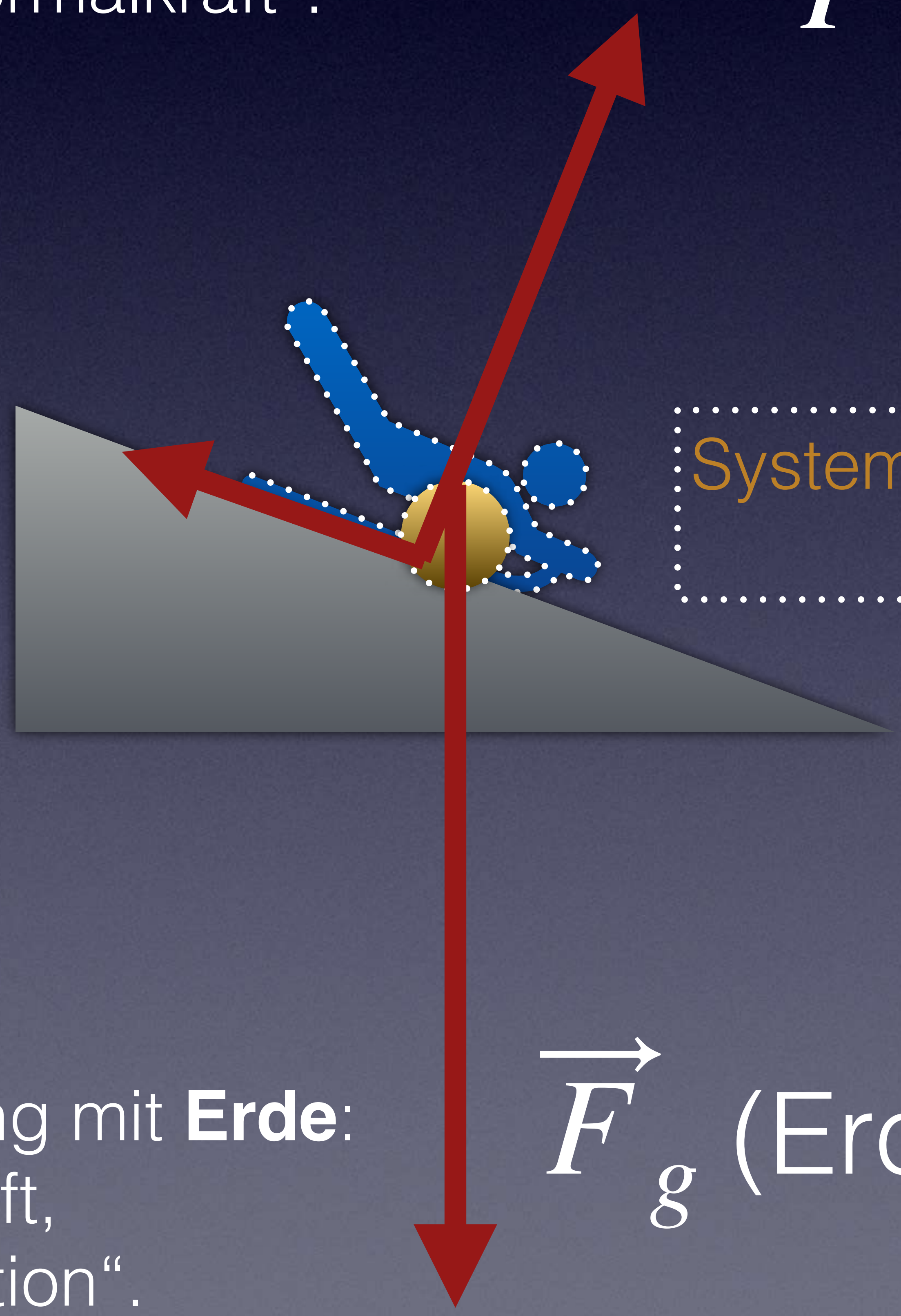
Interaktion mit Masse des Schlittenfahrers

K1.1: (3) Schlittenfahrt, System 2 (Person und Schlitten)

Wechselwirkung 1 mit **Schnee** :
- Kontaktkraft,
- Typ „Normalkraft“.

$\vec{F}_N$ (Schnee)

Wechselwirkung 2 mit **Schnee** :
- Kontaktkraft,
- Typ „(Gleit-) Reibungskraft“.



System „Schlittenfahrer und Schlitten“
als Punktteilchen

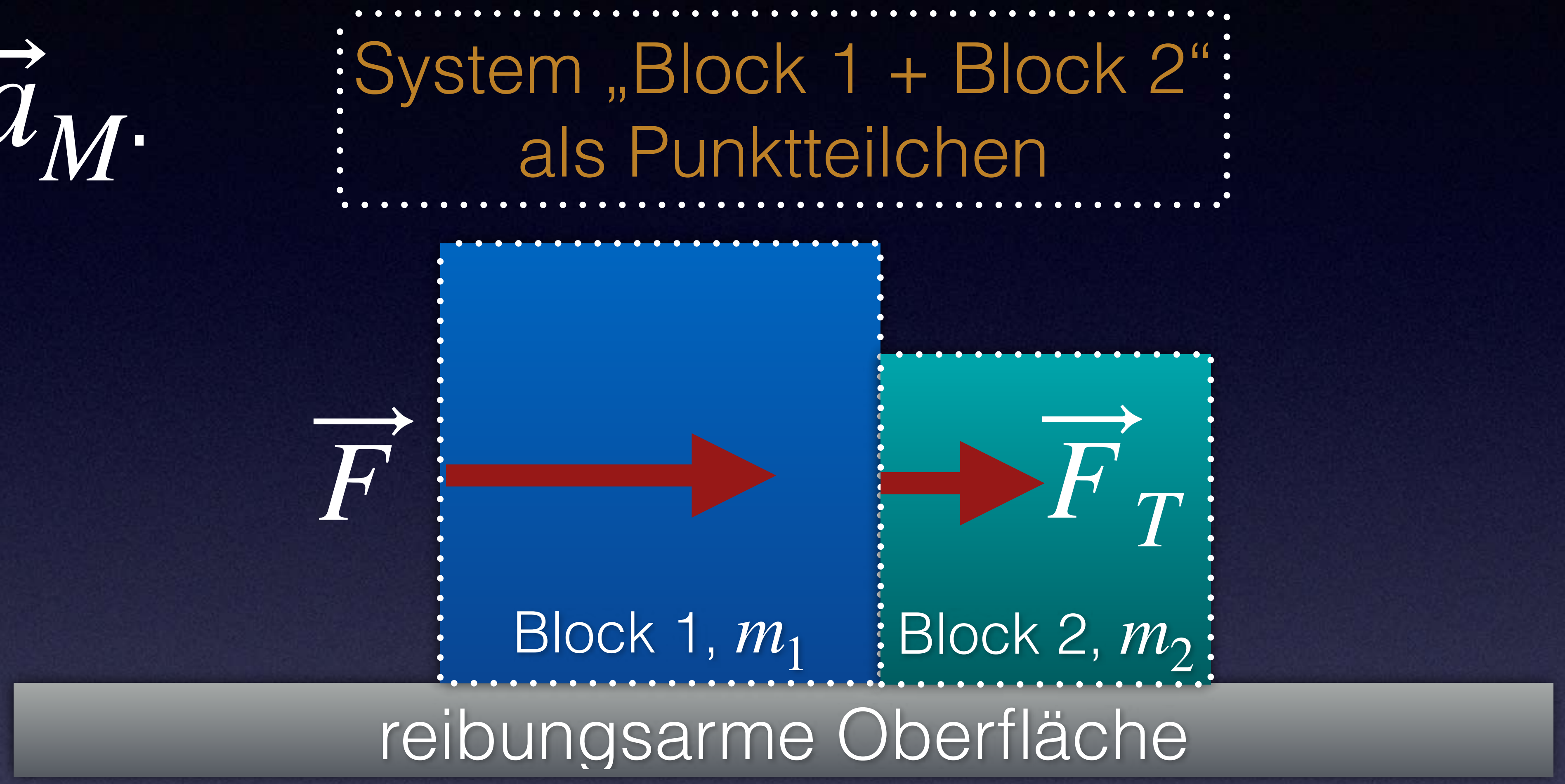
Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation“.

$\vec{F}_g$ (Erde)

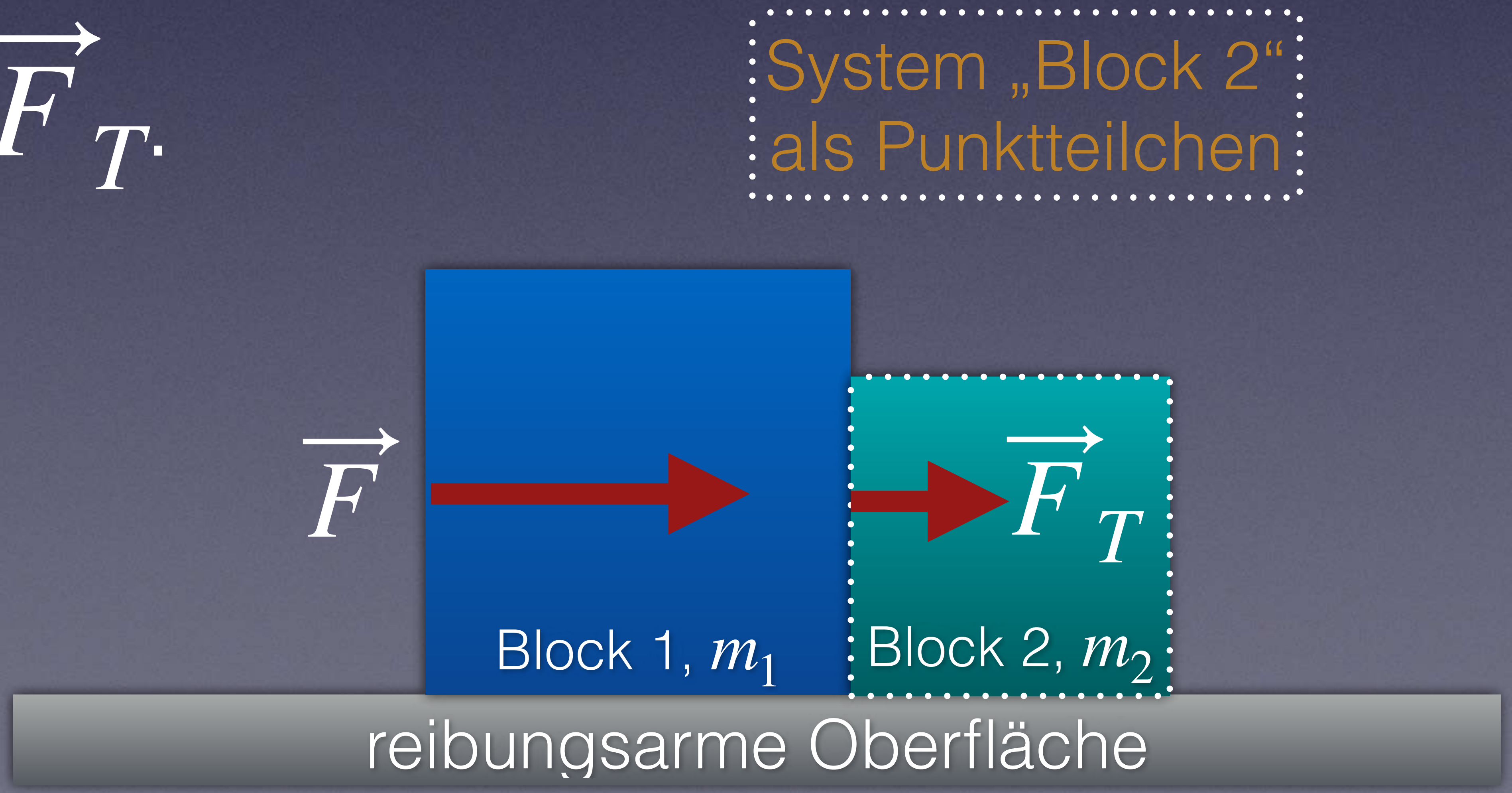
Interaktion mit Masse
des Schlittenfahrers und des Schlittens

K2.1: (1) $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{0}$. (2) $\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{0}$. (3) $\vec{F}_3 = \langle 30, -90, 130 \rangle$ N.

K3.1: (1) System zur Bestimmung von $\vec{a}_M$.



K3.1: (2) System zur Bestimmung von $\vec{F}_T$.

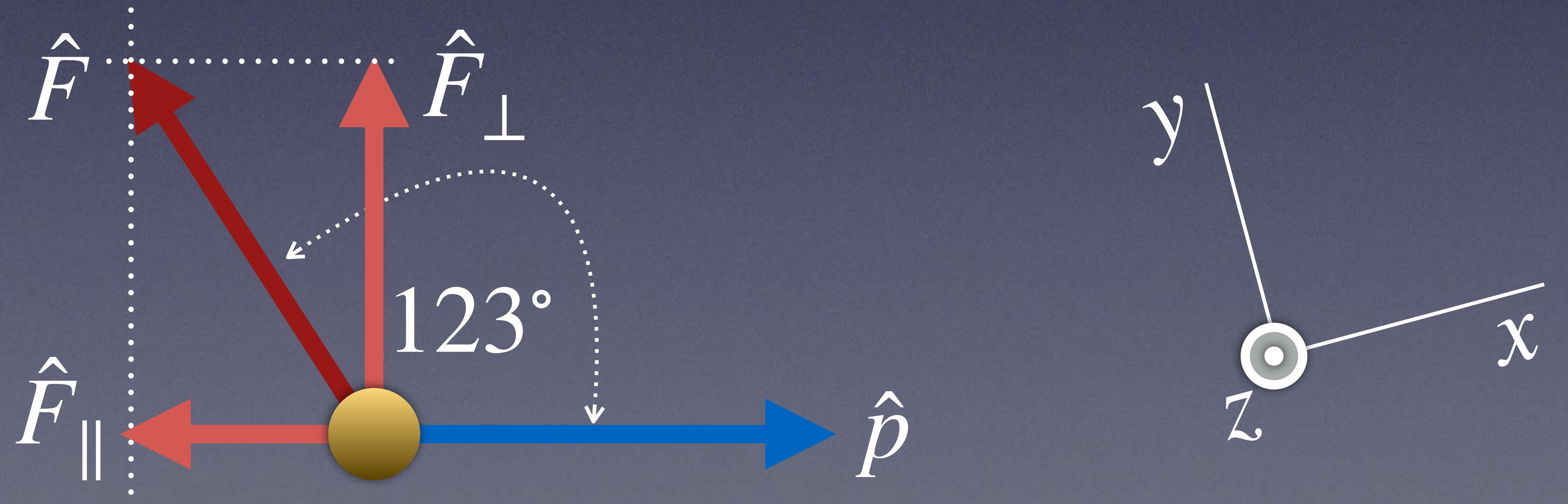


K4.1: $\vec{p} = \left\langle 3 \times 10^{29}, -6 \times 10^{28}, 0 \right\rangle$ kg · m/s und $\overrightarrow{F} = \left\langle -4 \times 10^{22}, 1 \times 10^{23}, 0 \right\rangle$ N. (1) $\hat{p} \approx \langle 0.98, -0.20, 0 \rangle$;

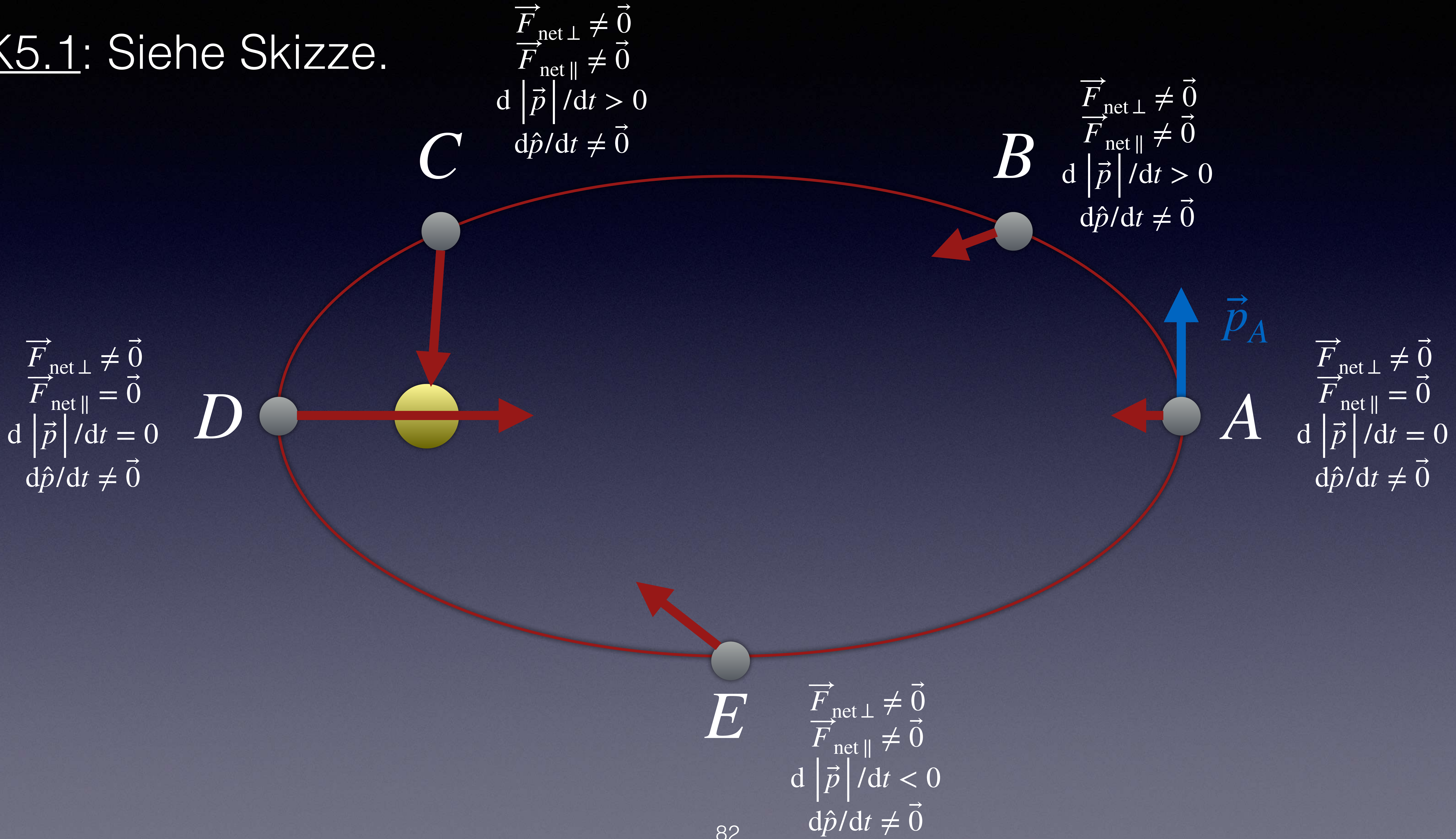
$\overrightarrow{F}_{\parallel} = \left(\overrightarrow{F} \cdot \hat{p} \right) \hat{p} \approx \langle -5.8, 1.2, 0 \rangle \times 10^{22}$ N;

$\overrightarrow{F}_{\perp} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F}_{\parallel} \approx \langle 1.8, 88, 0 \rangle \times 10^{22}$ N . (2) $\hat{F} \approx \langle -0.37, 0.93, 0 \rangle$;

$\hat{F} \cdot \hat{p} \approx -0.55 \rightarrow \arccos(-0.55) \approx 123°$: $\overrightarrow{F}_{\parallel}$ reduziert $\left| \vec{p} \right|$, d.h. die Geschwindigkeit des Planeten nimmt ab, und $\overrightarrow{F}_{\perp}$ ändert die Richtung von $\hat{p}$.



K5.1: Siehe Skizze.



K6.1:

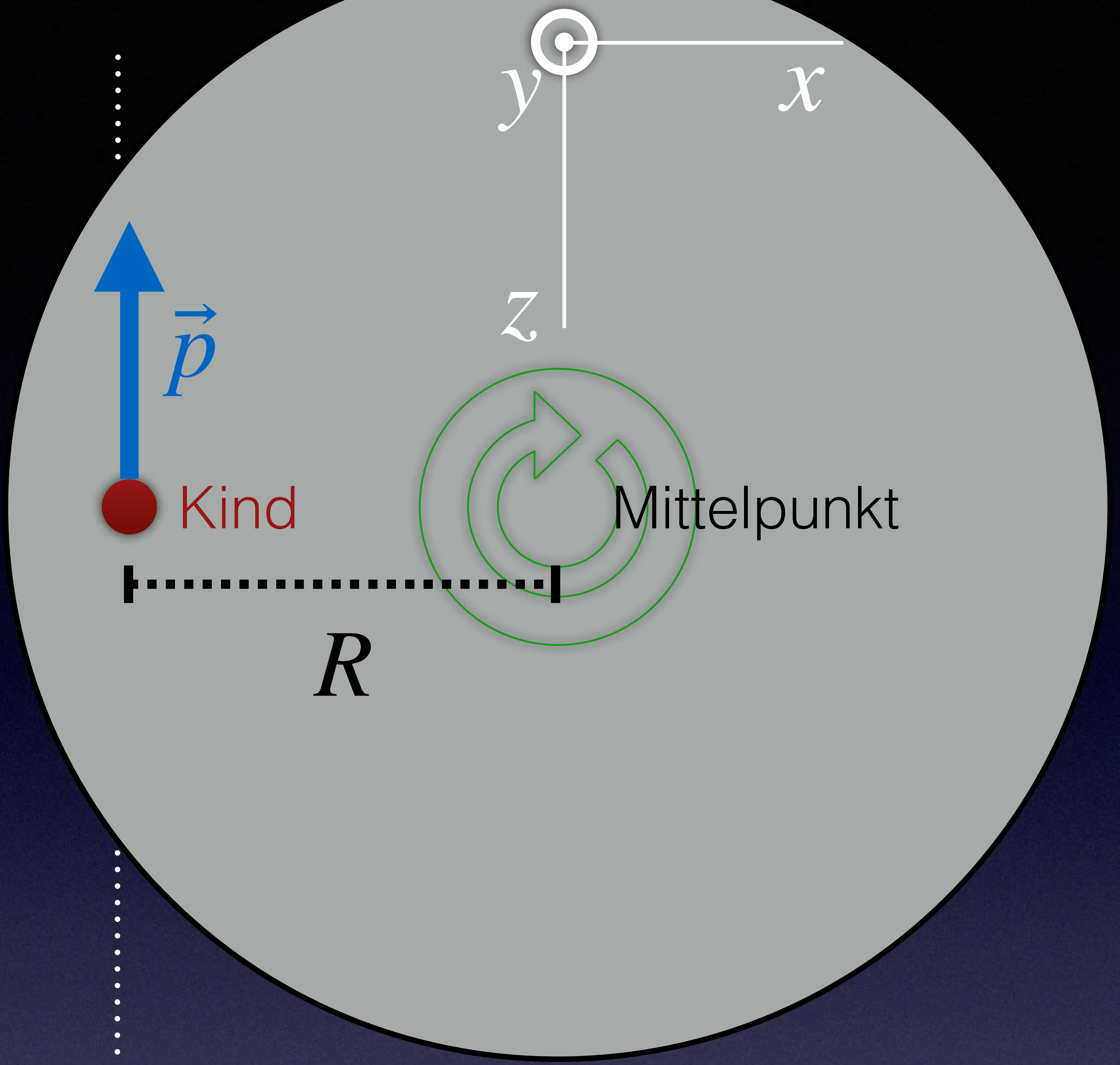
$$\left|\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\parallel}\right| = 0;\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\perp} = \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_f$$

$$\left\langle \frac{mv^2}{R},0,0 \right\rangle = \langle 0,-mg,0\rangle + \langle 0,F_N,0\rangle + \langle \mu_s F_N,0,0\rangle$$

$$F_N = mg$$

$$\frac{mv^2}{R} = \mu_s mg, \text{ und mit } v = \frac{2\pi R}{T} \text{ folgt}$$

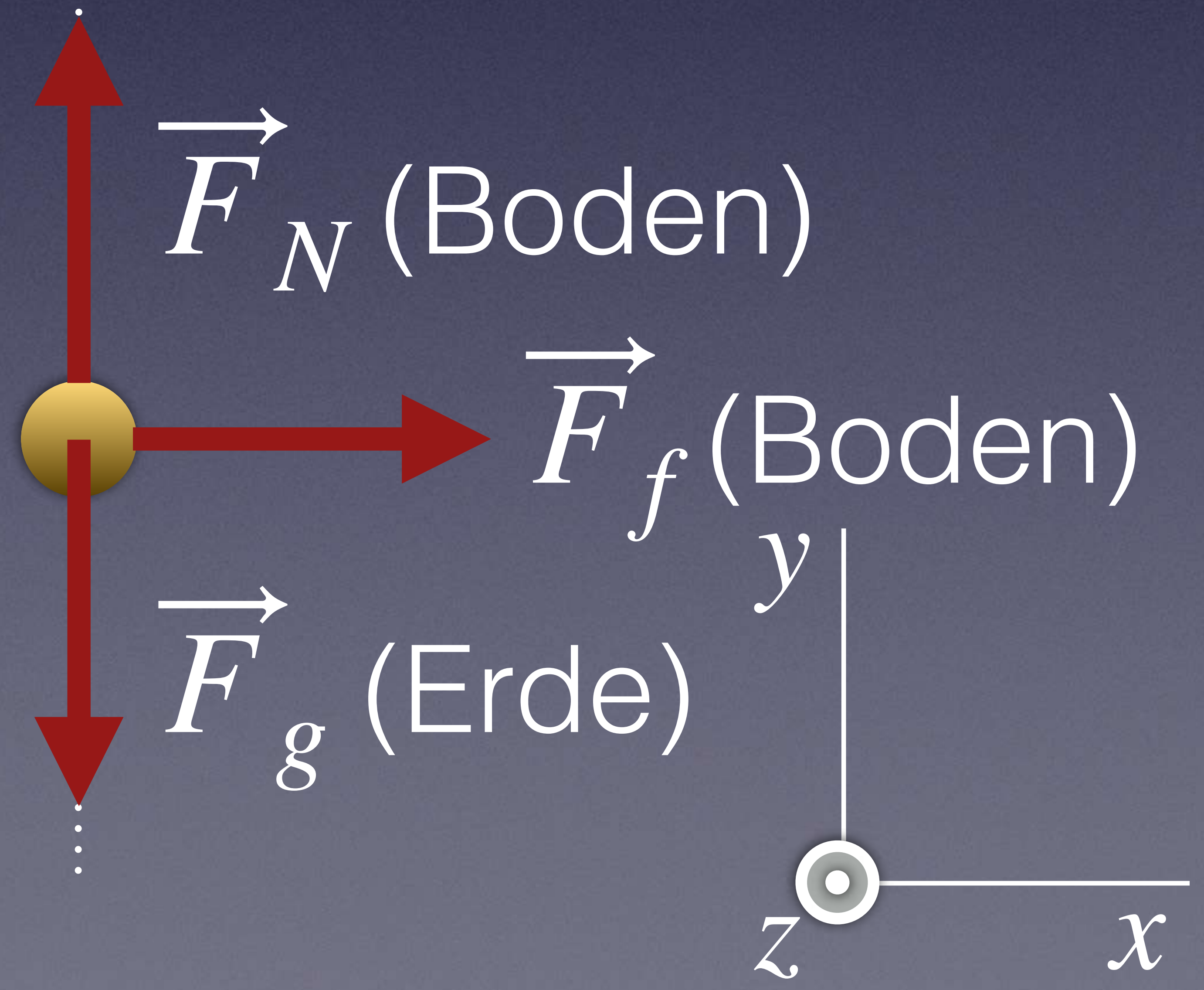
$$\mu_s > \frac{4\pi R}{gT^2}.$$



Wechselwirkung 1 mit **Boden** :
- Kontaktkraft,
- Typ „Normalkraft".

Wechselwirkung 2 mit **Boden** :
- Kontaktkraft,
- Typ „(Haft-) Reibungskraft".

Wechselwirkung mit **Erde**:
- Abstandskraft,
- Typ „Gravitation".



K7.1:

(1) $F_T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$: $F_T = 90\left(\frac{12.5^2}{8} + 9.8\right)\,\mathrm{N} \approx 2640\,\mathrm{N}$.

(2) $\frac{F_T}{mg} \times 100 = \left(1 + \frac{v^2}{gR}\right) \times 100$: $\frac{F_T}{mg} \times 100 \approx 300\,\%$.

(3) $F_T \sim \frac{v^2}{R} + g$: $F_T \sim \frac{2gR}{R} + g = 3g$ und F_T ist von R unabhängig.

Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

Ende

Folien zusammengestellt von Günther Lang

Es folgt: Teil 6 - Das Prinzip Energie