

# Moderne Mechanik

Teil 4

Kontakt-Wechselwirkungen (en: *contact interactions*)

# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- anhand des Kugel-Feder-Modells in Worten zu erklären, wie ein Objekt eine Kraft auf ein anderes Objekt ausüben kann, das es berührt,
- einen Zusammenhang herzustellen, zwischen der Dichte eines Festkörpers sowie seines Elastizitätsmoduls mit der Steifigkeit einer als Feder modellierten interatomaren Verbindung und der Schallgeschwindigkeit,
- Systeme zu analysieren, die Zug-, Druck-, Reibungs- und Auftriebskräften ausgesetzt sind, mit Hilfe der abgeleiteten (momentanen) Form  $d\vec{p}/dt$  des Prinzips Impuls,
- eine mathematische Beschreibung der Bewegung eines Objekts zu formulieren, das mit einer Feder interagiert, sowohl analytisch als auch numerisch (iterativ), und
- die Schallgeschwindigkeit in einem Festkörper in Abhängigkeit von den mikroskopischen und makroskopischen Eigenschaften des Festkörpers zu bestimmen.

# Übersicht

- Jenseits von punktförmigen Objekten
- Das Kugel-Feder-Modell eines Festkörpers
- Zugkräfte
- Länge einer interatomaren Bindung
- Steifigkeit einer interatomaren Bindung
- Spannung, Dehnung, Elastizitätsmodul
- Normalkräfte
- Reibung
- Schallgeschwindigkeit und Steifigkeit der interatomaren Bindung eines Festkörpers
- Änderungsrate des Impuls
- Analytische Lösung für ein Masse-Feder-System
- Analytische Lösung und iterative Lösung im Vergleich
- Ein analytischer Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit
- Durch Gase verursachte Kontaktkräfte
- $F = ma?$
- Vertikal hängendes Masse-Feder-System
- Verallgemeinerte Lösung für das Masse-Feder-System
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

# Jenseits von punktförmigen Objekten

In den ersten drei (Folien-) Kapiteln haben wir die Bewegung einer Vielzahl von Systemen, von Protonen bis zu Sternen, überwiegend durch Modellierung von punktförmigen Objekten vorhergesagt. Wenn wir jedoch die **Wechselwirkungen von Objekten** betrachten, die in **physischem Kontakt** zueinander stehen, ist ein solches Modell nicht mehr angemessen. **Objekte, die sich berühren, verformen** sich gegenseitig indem sie sich **dehnen** oder **stauchen**. Wir können dann keine **punktförmigen Objekte** mehr verwenden, um Kontaktwechselwirkungen zu verstehen, denn **ein punktförmiges Objekt hat keine innere Struktur** und kann daher nicht verformt werden. Daher benötigen wir ein detaillierteres Modell der inneren Struktur von festen Objekten.

Eine Anekdote: **Tarzan** will eine **Liane** benutzen, um sich über einen **Fluss** zu schwingen. Um sicherzugehen, dass die Liane stark genug ist, um ihn zu tragen, testet er sie, indem er einige Minuten lang regungslos an der Liane hängt. Die Liane besteht diesen Test, und so ergreift Tarzan die Liane und schwingt sich über den Fluss. Er ist verärgert und erstaunt, als die Liane auf halber Strecke des Schwungs reißt und er mitten im kalten Fluss durchnässt und fröstelnd landet, zur großen Belustigung der umstehenden Affen. Warum riß die Liane, während Tarzan mit ihr schwang, aber nicht, als er regungslos an ihr hing? Offensichtlich ist das, was mit der Liane passiert, in diesen beiden Situationen unterschiedlich. Um dies zu verstehen, müssen wir wissen, wie Objekte, die sich berühren, Kräfte aufeinander ausüben; dies ist das Thema der nachfolgenden Folien. Die Frage, wie viel Kraft die Liane aushalten muss, wenn Tarzan mit ihr über den Fluss schwingt, im Gegensatz zum bewegungslosen Hängen, wird allerdings erst im nächsten Kapitel behandelt.

# Das Kugel-Feder-Modell eines Festkörpers

Die wichtigsten Eigenschaften von Atomen, die uns in diesen Folien beschäftigen werden, sind die folgenden:

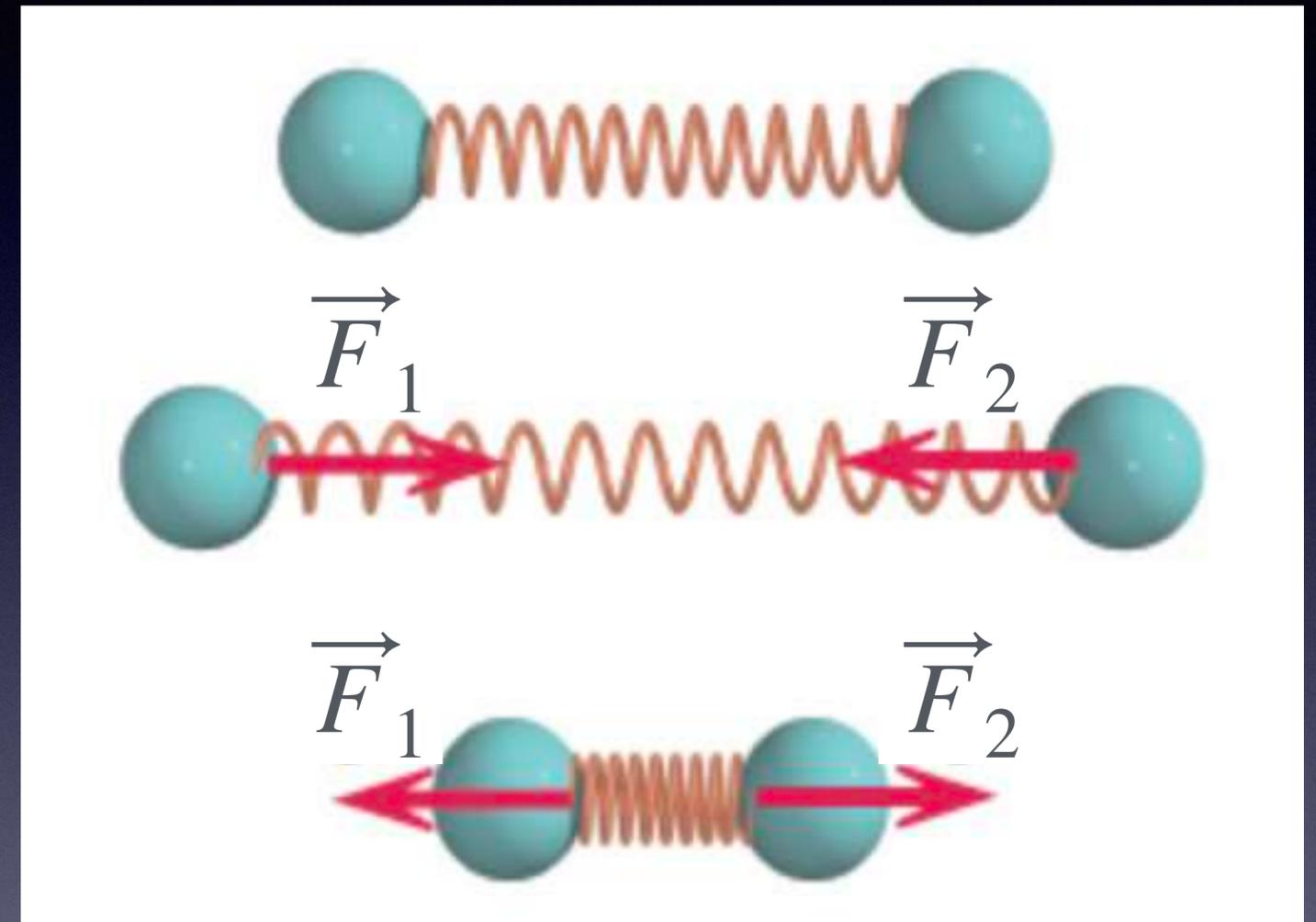
- Alle Materie besteht aus Atomen, deren typischer Radius etwa  $1 \times 10^{-10} \text{ m}$  ist.
- Atome ziehen sich gegenseitig an, wenn sie nahe (nicht zu nahe) beieinander sind.
- Atome stoßen stoßen sich gegenseitig ab, wenn sie sich zu nahe kommen.
- Atome in festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen bleiben auch bei sehr niedrigen Temperaturen „in Bewegung“.

Diese Eigenschaften von Atomen wurden in vielen umfangreichen Untersuchungen durch Physiker und Chemiker ermittelt und immer wieder bestätigt, wobei eine Vielzahl von experimentellen Techniken eingesetzt wurde.

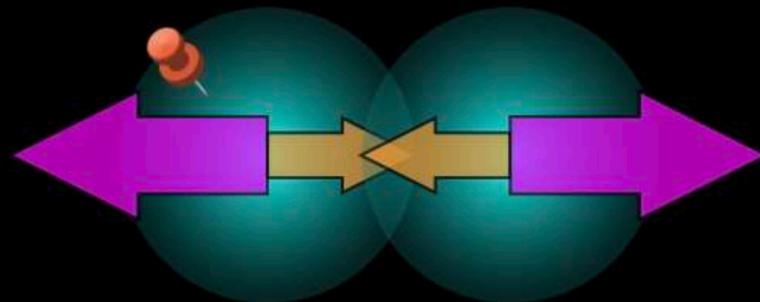
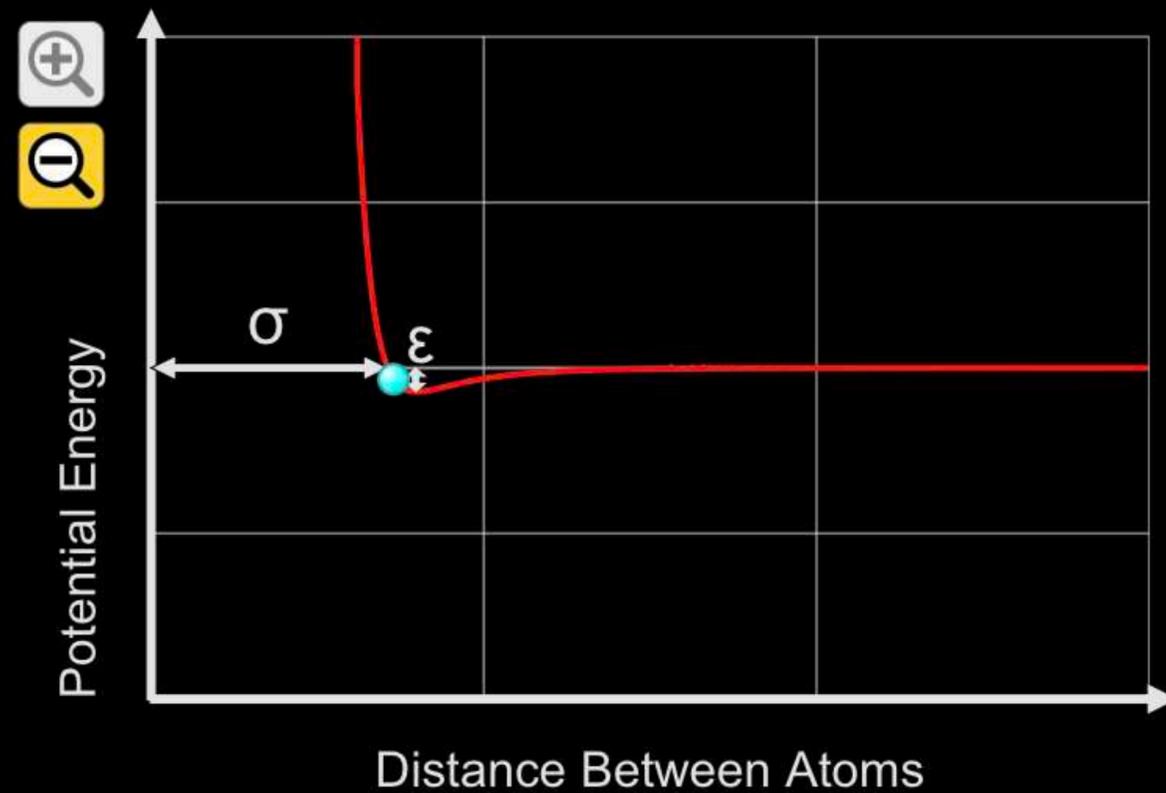
**Zwei Atome**, die durch eine chemische Bindung verbunden sind, **verhalten sich sehr ähnlich wie zwei makroskopische Kugeln**, die an den Enden einer Feder mit sehr geringer Masse befestigt sind.

- Jede Kugel in diesem Modell stellt einen massiven Atomkern dar, der von den inneren Elektronen des Atoms umgeben ist. Fast die gesamte Masse eines Atoms ist in dem winzigen Kern konzentriert.
- Die Feder im Modell stellt die chemische Bindung dar, die durch die gemeinsamen Außenelektronen der beiden Atome entsteht.

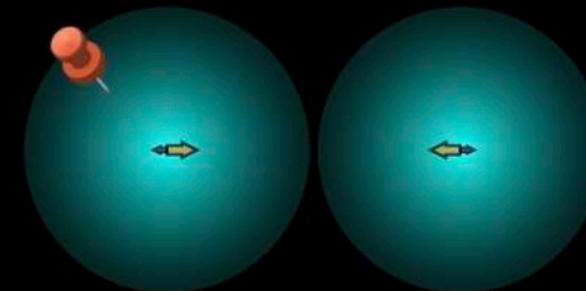
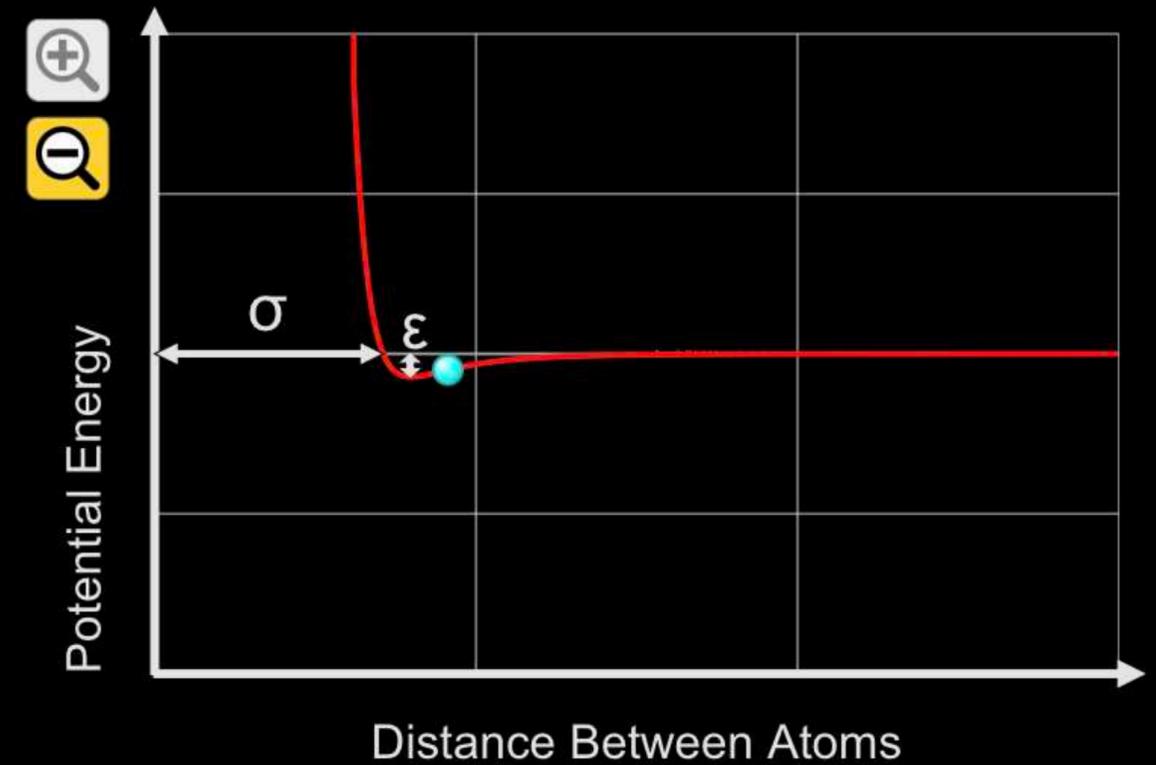
Das mikroskopische Atomsystem verhält sich ähnlich wie das makroskopische Modellsystem, solange die Dehnung oder Stauchung gering ist, wie es bei gewöhnlichen Prozessen der Fall ist. Werden die Atome weiter auseinanderbewegt, erfahren sie Kräfte, die sich der Trennung widersetzen. Werden die Atome enger zusammengeschoben, so wirken auf sie Kräfte, die der Kompression widerstehen.



Zwei Kugeln, verbunden durch eine Feder. **Oben:** Eine entspannte Feder übt keine Kräfte auf die Kugeln aus. **Mitte:** Eine gedehnte Feder übt Kräfte aus, um die Kugeln näher zusammenzubringen. **Unten:** Eine gestauchte Feder übt Kräfte aus, um die Kugeln auseinander zu bewegen.



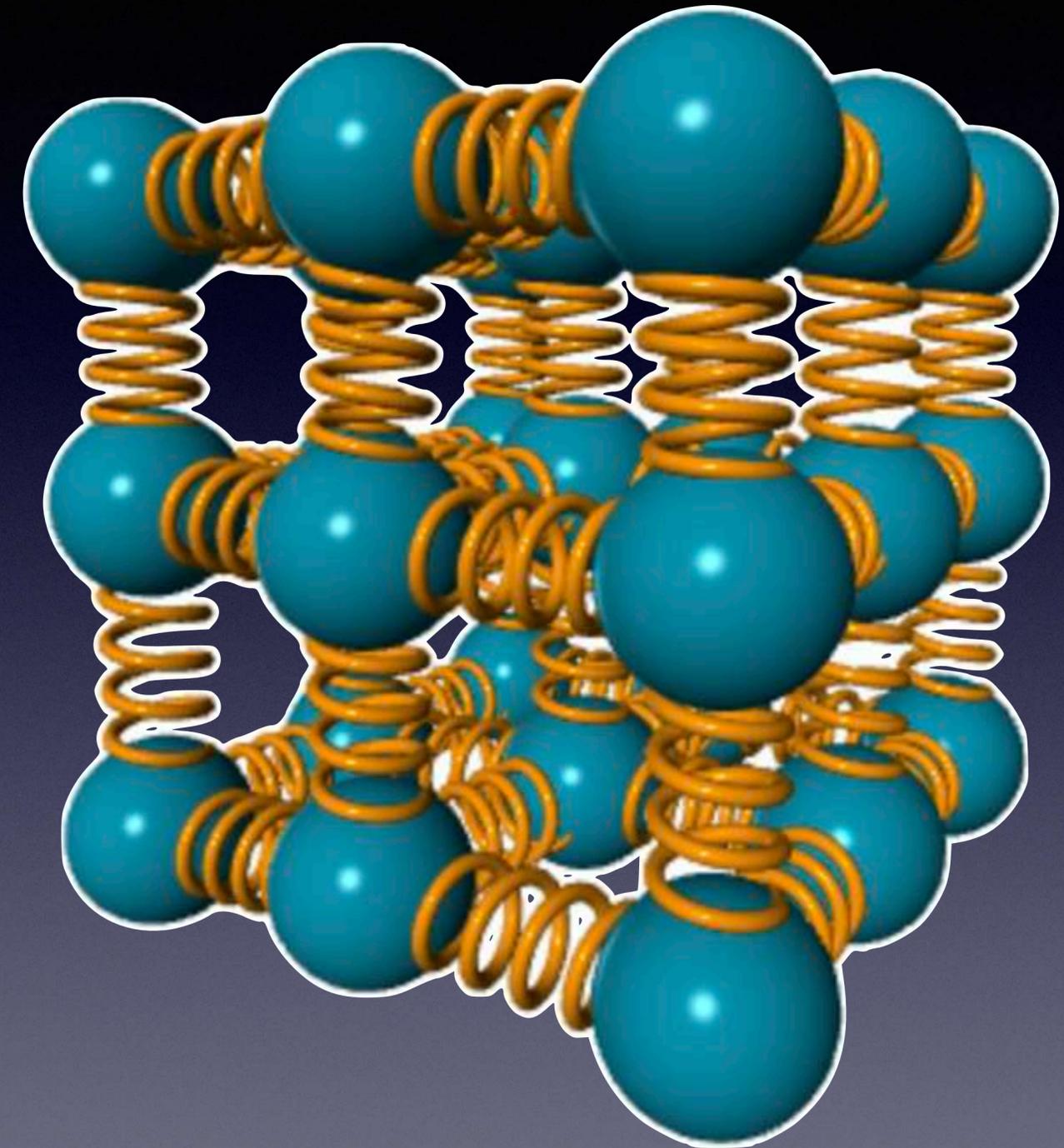
Starke Abstoßung bei Kompression.



Anziehung bei Dehnung.

Bei größeren Auslenkungen aus der Ruhelage entsprechen die rücktreibenden Kräfte nicht mehr dem einfachen (harmonischen) Kugel-Feder-System. Anziehung durch Van-der-Waals Kräfte. Abstoßung bei Überlappung der Elektronenhüllen. Man beachte die Asymmetrie zwischen Anziehung und Abstoßung.

Im Inneren des Festkörpers sind die Atome häufig in 3D-Strukturen angeordnet, wie die Kugeln und Federn in der nebenstehenden Abbildung. **Festkörper**, in denen die Atome in regelmäßigen „**Gittern**“ angeordnet sind, werden als **Kristalle** bezeichnet; dazu gehören Metalle, Quarz, Diamant, Eis und Kochsalz (NaCl), aber nicht die meisten organischen Festkörper wie Kunststoff oder Holz. Das hier gezeigte Gitter ist die einfachste Art von Kristall und wird als „kubisches“ Gitter bezeichnet, weil sich die Atome im Kristall an den Ecken benachbarter Würfel befinden. Obwohl die meisten Kristalle komplexer sind als das einfache kubische Gitter, werden wir dieses einfache kubische Kugel-Feder-Modell verwenden, weil es alle wichtigen Merkmale enthält, die wir brauchen.



Ein einfaches Modell eines Festkörpers. Diese Abbildung zeigt nur den kleinen Ausschnitt eines Festkörpers.

# Zugkräfte

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Eisenkugel, die **bewegungslos** am Ende eines Drahtes hängt. Der Impuls der Kugel ändert sich nicht, also muss die Komponente der **Nettokraft** auf die Kugel gleich **Null** sein:

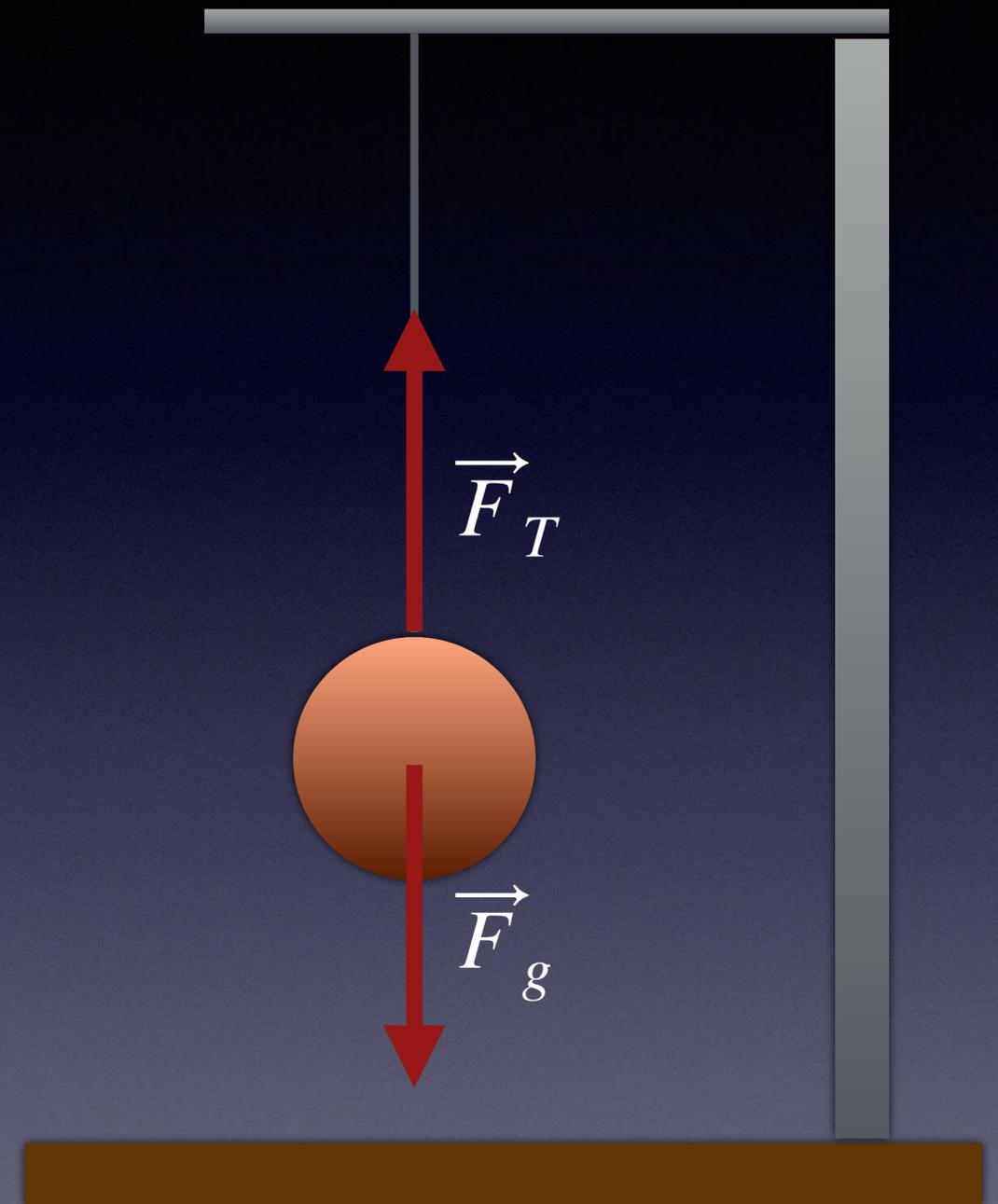
$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{net}} \Delta t = \vec{0}$$

und somit

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{F}_T = \vec{0}$$

also

$$\vec{F}_T = -\vec{F}_g.$$

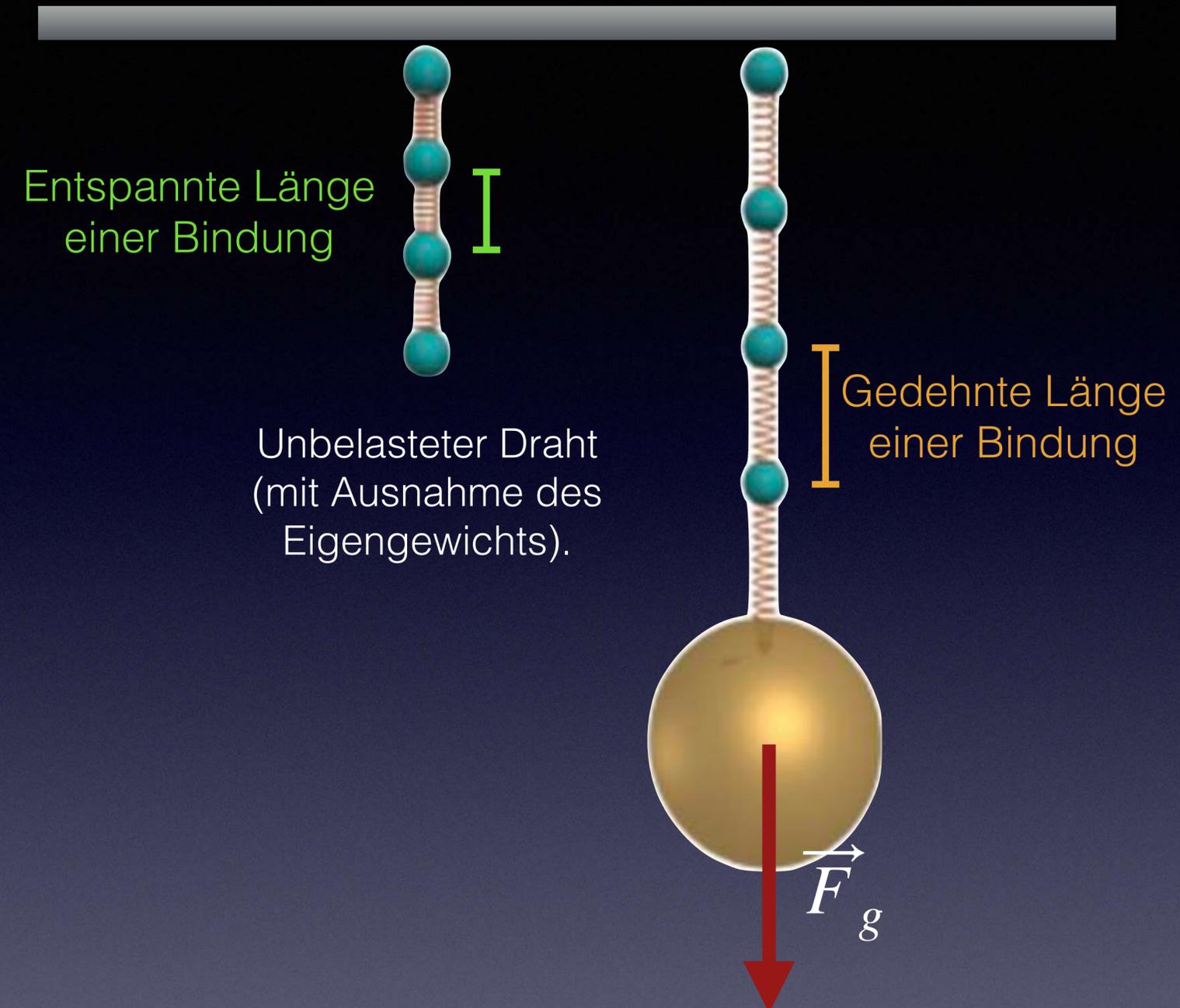


Eine schwere Kugel hängt ruhend am Ende eines dünnen Drahtes.

Das auf der vorangehenden Folie abgeleitete einfache Ergebnis hat eine interessante Auswirkung: Offensichtlich hängt die Größe der vom Draht ausgeübten Zugkraft  $\vec{F}_T$  von der Masse der Kugel ab.

Aber: Woher „weiß“ ein unbelebtes Objekt wie ein Draht, wie groß die Kraft ist, die er in einer bestimmten Situation ausüben muss? Wir haben bereits gesehen, dass die von einer Feder ausgeübte Kraft davon abhängt, wie stark die Feder gedehnt wird. Einen Draht kann man sich als eine sehr steife Feder vorstellen. Wenn ein Gewicht an das Ende eines Drahtes gehängt wird, dehnt sich der Draht, auch wenn die Dehnung normalerweise sehr gering ist. Das Kugel-Feder-Modell eines Festkörpers hilft uns zu verstehen, was passiert, wenn ein Draht gedehnt wird.

Wir können einen Draht als eine Kette von Kugeln und Federn modellieren (Atome, die durch federartige chemische Bindungen verbunden sind). Der Einfachheit halber betrachten wir einen Draht, der nur ein Atom dick ist. Wenn der Draht auf einem Tisch liegt, ist jede der Federn (Bindungen) entspannt. Wenn der Draht senkrecht hängt, ohne dass etwas an ihm befestigt ist, dehnen sich die Bindungen nur ein wenig, um das Gewicht der darunter liegenden Atome zu tragen. Wenn jedoch ein massiver Gegenstand an den Draht gehängt wird, dehnen sich die federartigen Bindungen zwischen den Atomen beträchtlich. Wenn wir davon ausgehen, dass die **Gesamtmasse aller Atome im Draht** im Vergleich zur Masse des aufgehängten Objekts **vernachlässigbar** ist, können wir sagen, dass **jede Bindung im Draht um ungefähr den gleichen Betrag gedehnt** wird, oder anders ausgedrückt, dass die **Spannung im gesamten Draht gleich groß** ist.



Die interatomaren Bindungen in einem Draht dehnen sich, wenn eine schwere Masse an den Draht gehängt wird. In diesem idealisierten Diagramm ist der Draht nur ein Atom dick, und die Dehnung der einzelnen Bindungen ist stark übertrieben.

# Länge einer interatomaren Bindung

Unser Ziel in den nächsten Abschnitten ist es, die Steifigkeit einer interatomaren Bindung zu bestimmen, die als Feder betrachtet wird. Der erste Schritt besteht darin, die Länge einer interatomaren Bindung in einem bestimmten Material zu bestimmen. Je nach Größe der Atome sind die **Bindungslängen in verschiedenen Materialien leicht unterschiedlich**. Wir definieren die Länge einer interatomaren Bindung als den **Abstand von Mitte zu Mitte zwischen zwei benachbarten Atomen**. Wenn wir das raumfüllende Modell eines Festkörpers betrachten, ist dieser **Abstand gleich dem doppelten Radius eines Atoms** oder dem Durchmesser eines Atoms. Der Durchmesser eines Atoms in einem Festkörper ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Materie, die bei Wechselwirkungen eine Rolle spielt. Wir können den **Atomdurchmesser für Kristalle** bestimmter Elemente berechnen, indem wir die gemessene **Dichte** des Materials und die **Avogadrozahl** (die Anzahl der Atome in einem Mol des Materials) verwenden.

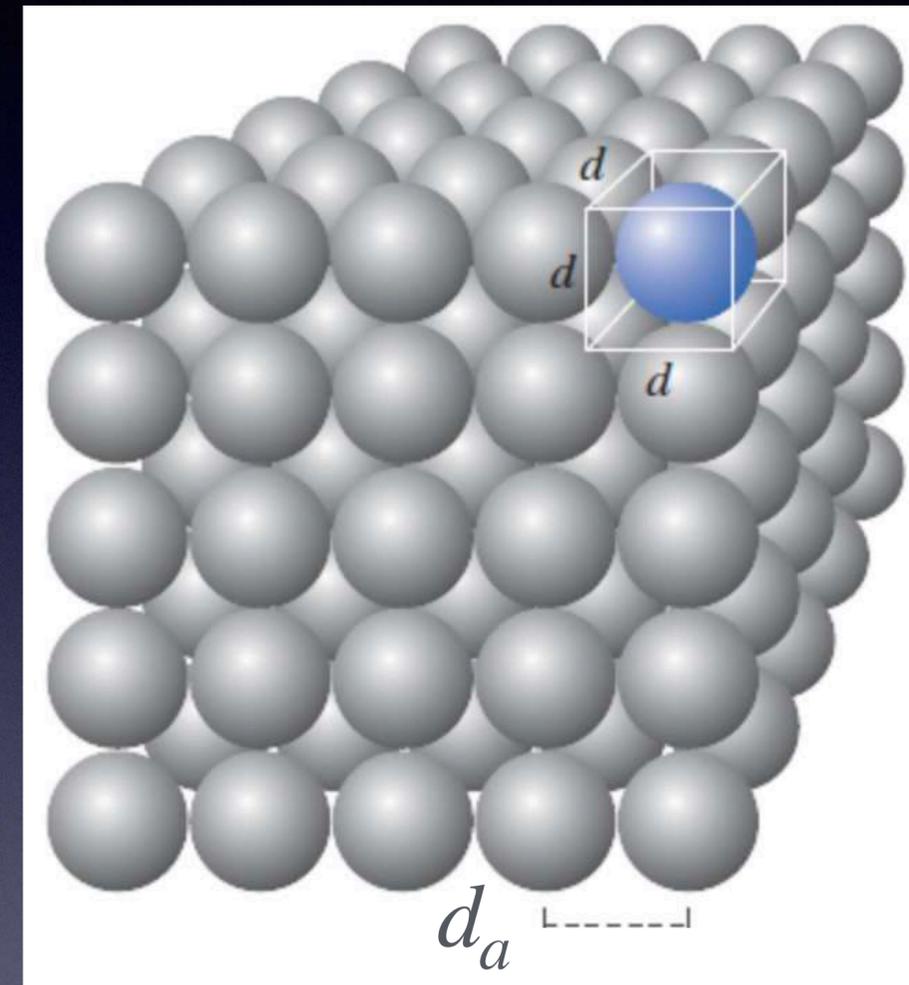
Für die Masse  $m_a$  eines einzelnen Atoms gilt:

$$m_a = \frac{\text{Molmasse}}{\text{Anzahl Atome/Mol}} = \frac{M_{\text{mol}}}{N_A}$$

Mit Hilfe der Dichte  $\rho$  folgt für den Atomdurchmesser  $d_a$

$$d_a = \sqrt[3]{\frac{m_a}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{mol}}}{N_A \rho}}$$

Ergebnis für Kupfer:  $d_a \approx 2.28 \times 10^{-10}$  m. Die Durchmesser der kleinsten und größten Atome unterscheiden sich nur um etwa den Faktor 8. Die meisten metallischen Elemente haben ähnliche Radien in der Größenordnung von  $1.5 \times 10^{-10}$  m.



Eine einfache kubische Anordnung von Atomen. Das zu jedem Atom gehörende Raumvolumen ist ein winziger Würfel  $V_a = d_a^3$ .

# Kontrollpunkt 1

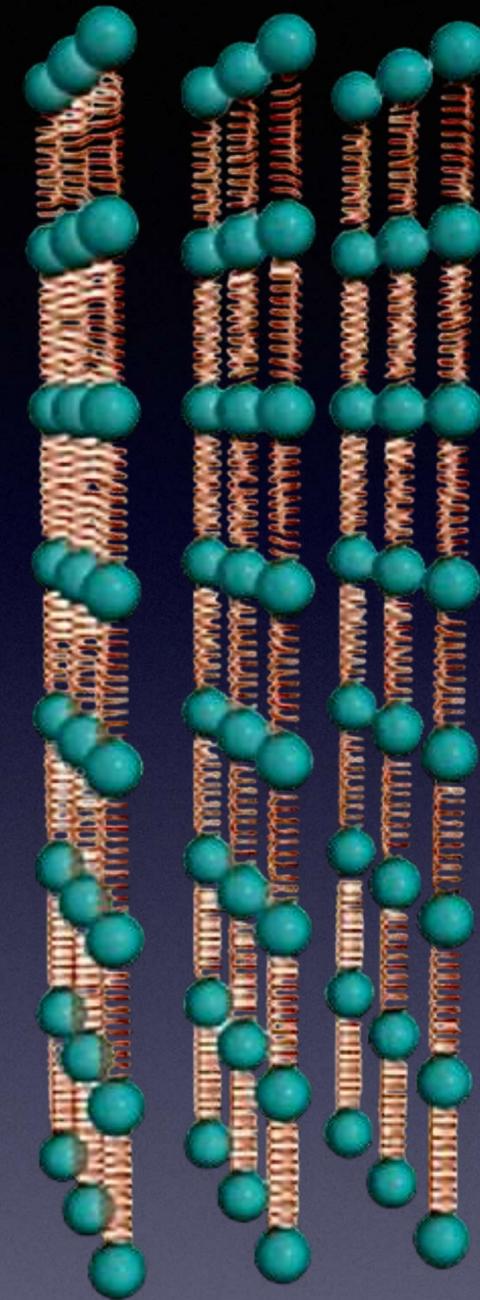
1. Betrachte  ${}_{13}^{26}\text{Al}$  und  ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ . (1) Wie groß ist der ungefähre Durchmesser eines Aluminiumatoms (Länge einer Bindung) in festem Aluminium? (2) Wie groß ist der ungefähre Durchmesser eines Bleiatoms (Länge einer Bindung) in festem Blei? Hinweis: verwende dazu die Angaben aus einer Tabelle des Periodensystems, siehe hierzu z. B. die früheren Folien des Kapitels 3.

# Steifigkeit einer interatomaren Bindung

Nun, da wir die Länge einer interatomaren Bindung in festem Kupfer (und den Durchmesser eines Kupferatoms) kennen, können wir anhand von **experimentellen Daten** die **Steifigkeit** der **interatomaren Bindung**, die wir hierfür als Feder betrachten, bestimmen. Wahrscheinlich hast du schon einige Erfahrungen mit gewöhnlichen makroskopischen Federn gemacht. Zum Beispiel einem „Treppenläufer“ (en: *Slinky*), einer recht weichen Feder; seine Federsteifigkeit ist sehr klein, etwa  $1 \text{ N/m}$ . Die Steifigkeit der Feder eines „Hüpfstabs“ (en: *Pogo Stick*) ist hingegen viel größer, etwa  $5000 \text{ N/m}$ . Es ist sehr schwierig, die Steifigkeit einer interatomaren Verbindung direkt zu messen, aber wir können Daten aus makroskopischen (großmaßstäblich angelegten) Experimenten analysieren, um ihren Wert zu bestimmen.

Die **Grundidee** besteht darin, schwere Gewichte an einen langen Draht zu hängen und die **Dehnung des Drahts** zu **messen**.

Wenn man dann herausfindet, wie viele interatomare „Federn“ der Draht hat, kann man die „Federkonstante“ einer einzelnen interatomaren Verbindung bestimmen. Hierfür müssen wir in der Lage sein, die **Steifigkeit eines aus vielen Federn bestehenden Objekts** mit der **Steifigkeit jeder einzelnen Feder** in Beziehung zu setzen. Dazu betrachten wir einen Draht, der aus vielen parallelen, langen Atomketten besteht, die durch Federn verbunden sind. Wir müssen zunächst bestimmen, wie die Steifigkeit einer einzelnen Feder (interatomare Bindung) mit der Steifigkeit einer ganzen Kette von Federn zusammenhängt und danach, wie die Steifigkeit des gesamten Drahtes (viele Federketten) mit der Steifigkeit einer Federkette zusammenhängt.



Ein massiver Draht, der aus vielen parallelen, langen Atomketten besteht, die durch Federn (interatomare Bindungen) verbunden sind. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die horizontalen Bindungen nicht dargestellt.

Hängt man mehrere Federn aneinander, so sind die **Federn in Reihe geschaltet**. Die **Längenänderung des Federsystems** infolge einer Kraftänderung ergibt sich dabei aus der **Summe der Längenänderung**, die jede der Federn für sich alleine erfahren würde.

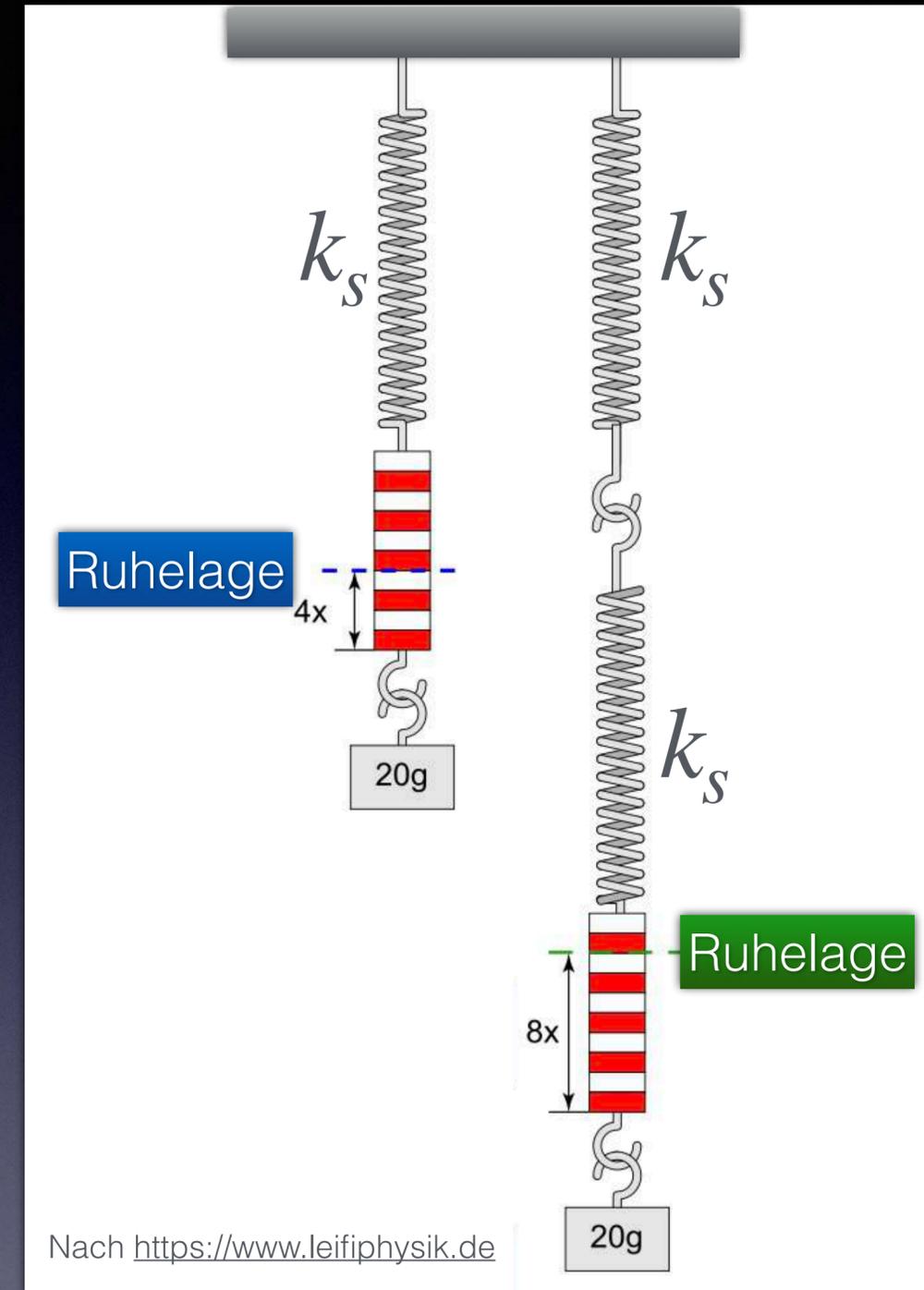
$$s_{\text{tot}} = \sum s_l = \left( \sum_l \frac{1}{k_{s,l}} \right) |\vec{F}|$$

Mit  $s_{\text{tot}} = \frac{|\vec{F}|}{k_{s,\text{eff}}}$  folgt  $\frac{1}{k_{s,\text{eff}}} = \sum_l \frac{1}{k_{s,l}}$ .

Für  $N$  identische Federn  $k_{s,l} = k_s$  gilt

$$k_{s,\text{eff}} = \frac{k_s}{N}$$

Daher ist die effektive Federkonstante  $k_{s,\text{eff}}$  immer kleiner als die kleinste Federkonstante einer einzelnen Feder.



Reihenschaltung zweier identischer Federn. Die Längenänderung verdoppelt sich im Vergleich zur einzelnen Feder.

Hängt man mehrere Federn nebeneinander auf, so dass alle Federn direkt mit dem angehängten Gewicht verbunden sind, so sind diese **parallel geschaltet**. Eine Kraft, die auf die Federn wirkt, besitzt in Bezug auf beide Federn den gleichen Angriffspunkt. Die parallel aufgehängten Federn werden dabei **um die gleiche Strecke gedehnt**.

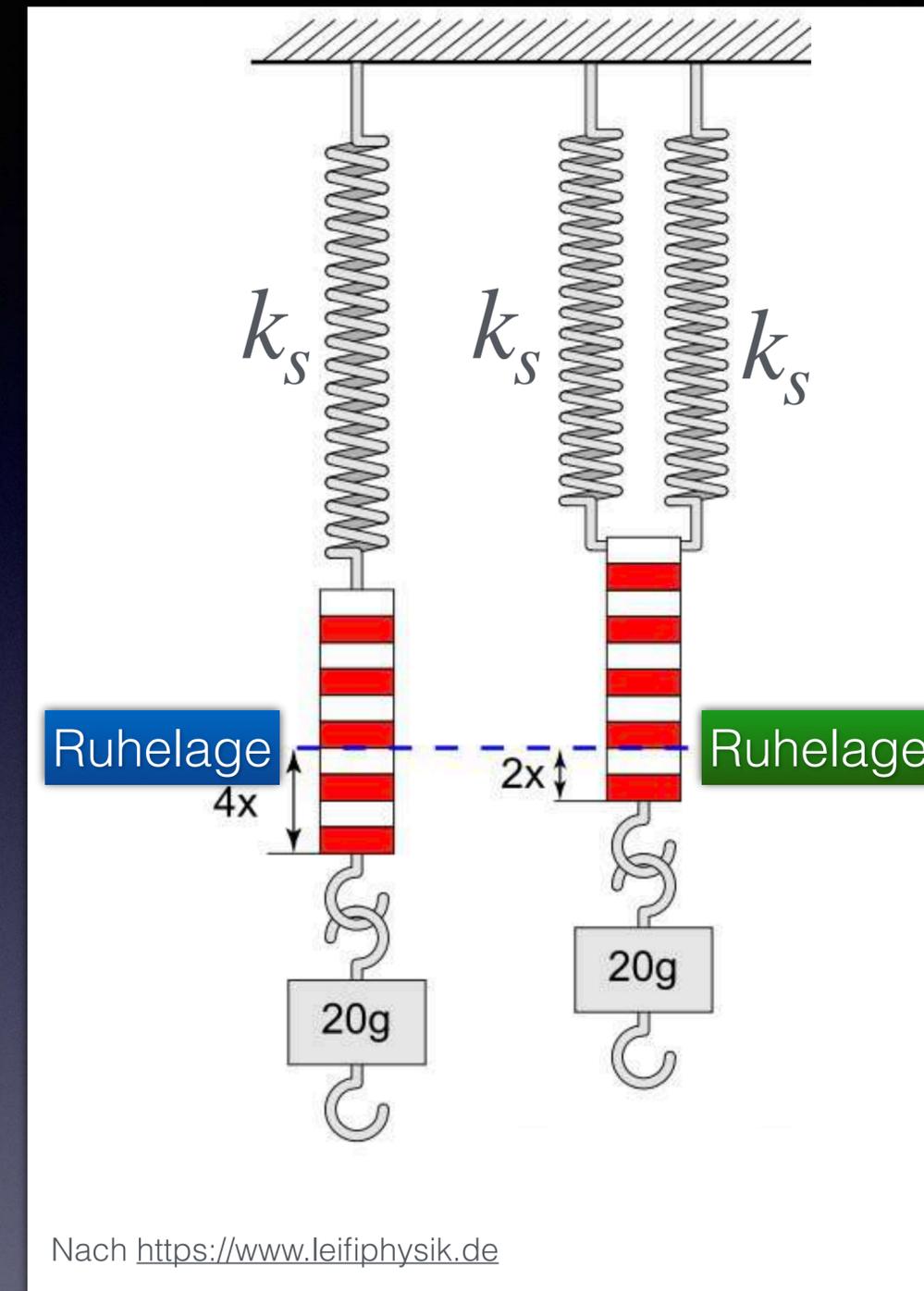
$$|\vec{F}| = \left( \sum_l k_{s,l} \right) s$$

Mit  $|\vec{F}| = k_{s,\text{eff}} s$  folgt  $k_{s,\text{eff}} = \sum_l k_{s,l}$ .

Für  $N$  identische Federn  $k_{s,l} = k_s$  folgt

$$k_{s,\text{eff}} = N k_s .$$

Daher ist die effektive Federkonstante  $k_{s,\text{eff}}$  immer die Summe der Federkonstanten aller parallel geschalteten Federn.



Parallelschaltung zweier identischer Federn. Die Längenänderung halbiert sich im Vergleich zur einzelnen Feder.

# Kontrollpunkt 2

1. Eine (Feder-) Kette bestehe aus 20 identischen kurzen Federn, die aneinander gekoppelt sind. Die Steifigkeit (effektive Federkonstante) der Kette beträgt  $40 \text{ N/m}$ . Wie groß ist dann die Steifigkeit einer einzelnen kurzen Feder?
2. Neun identische Federn sind nebeneinander angeordnet (parallel geschaltet) und mit einem großen massiven Gewicht verbunden. Die Steifigkeit (effektive Federkonstante) der Kombination beträgt  $2700 \text{ N/m}$ . Wie hoch ist die Steifigkeit einer einzelnen Feder?

Die **Querschnittsfläche eines Objekts** ist die Fläche einer ebenen Schnittfläche, die beim Durchschneiden des Objekts entsteht. Ein zylindrischer Gegenstand, wie z. B. ein runder Bleistift, hat eine kreisförmige Querschnittsfläche (man stelle sich vor, man sägt quer durch den Bleistift).

Ein gerader Kupferdraht ist  $2\text{ m}$  lang. Der Draht hat einen quadratischen Querschnitt (also ist er nicht rund). Jede Seite des Drahtes ist  $1\text{ mm}$  breit. Nun hängt man eine Masse von  $10\text{ kg}$  an das Ende des Drahtes. Eine sorgfältige Messung zeigt, dass der Draht nun  $1.67\text{ mm}$  länger als zuvor ist. Aus dieser Beobachtung wollen wir nun die Steifigkeit einer interatomaren Bindung in festem Kupfer ableiten.

Steifigkeit des Drahts:

$$k_{s,\text{draht}} = \frac{|\vec{F}_g|}{s} = \frac{mg}{s}$$

Atom-Durchmesser:

$$d_a = \sqrt[3]{\frac{m_a}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{mol}}}{N_A \rho}}$$

Fläche eines Atoms (Schnittfläche):

$$A_a = d_a^2$$

Anzahl der Atom-Ketten im Draht:

$$N_k = A_{\text{draht}} / A_a$$

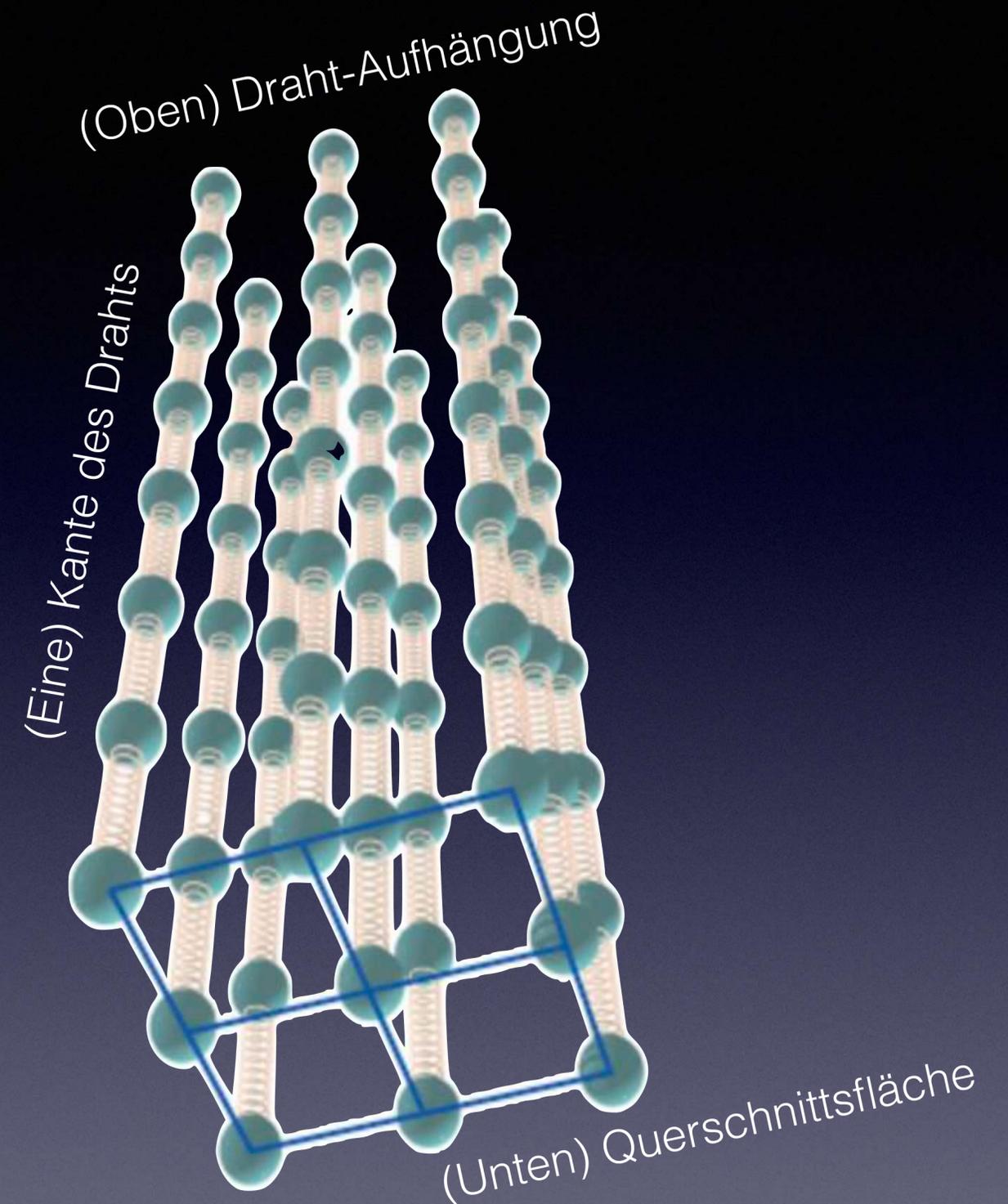
Interatomare Bindungen/Atom-Kette:

$$N_b = L_{\text{draht}} / d_a$$

Parallel- und Reihen-Federn mit  $k_{s,i}$ :

$$k_{s,\text{draht}} = \frac{k_{s,i}}{N_b} N_k, \text{ also } k_{s,i} = k_{s,\text{draht}} \frac{N_b}{N_k}$$

Für  ${}^{63}_{29}\text{Cu}$  ist  $k_{s,i} \approx 26.8 \text{ N/m}$ .



Ein Draht wird als eine Anordnung von nebeneinander liegenden Ketten aus Kugeln und Federn modelliert. Farbige Linien verbinden die unterste Schicht der Atome im Draht (hier sind nur neun Kugel-Feder-Ketten dargestellt).

# Kontrollpunkt 3

1. Der  $2\text{ m}$  lange Kupferdraht mit quadratischem Querschnitt von  $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$  verlängerte sich um  $1.67\text{ mm}$  nach dem Anhängen einer Masse von  $10\text{ kg}$ . Derselbe Draht wird auf  $0.2\text{ m}$  gekürzt und dasselbe Gewicht erneut angehängt. Wie stark wird sich dieser gekürzte Draht jetzt dehnen?

# Spannung, Dehnung, Elastizitätsmodul

Angenommen, wir hätten einen anderen Kupferdraht verwendet, mit anderer Länge und anderem Querschnitt. Wäre unser Ergebnis für die interatomare Bindungssteifigkeit anders ausgefallen? Das Ergebnis sollte nicht anders ausfallen, da die interatomare Bindungssteifigkeit eine Eigenschaft des Materials ist. Die makroskopischen Abmessungen des Drahtes ändern seine intrinsischen (Material-) Eigenschaften nicht. In der Literatur wirst du keine Tabellen zur interatomaren Bindungssteifigkeit für verschiedene Materialien finden. Stattdessen wird eine makroskopische Größe namens **Elastizitätsmodul  $E$**  veröffentlicht. Wie die Dichte und die interatomare Bindungssteifigkeit ist der Elastizitätsmodul eine **Materialeigenschaft** (z. B. für Kupfer) und ist **unabhängig von** der **Form** oder **Größe** eines bestimmten Objekts aus diesem Material. Der Elastizitätsmodul (en: *Young's modulus*) ist ein makroskopisches Maß für die „**elastische Verformbarkeit**“ eines festen Materials. Er setzt den Bruchteil der **Längenänderung** eines Objekts in Beziehung zur **Kraft** auf die **Querschnittsfläche**, die auf das Objekt ausgeübt wird.

Je länger ein Draht ist, desto mehr Atombindungen hat er entlang seiner Länge, und desto mehr dehnt er sich, wenn eine Kraft auf ihn einwirkt. Um eine Größe (Elastizitätsmodul) zu definieren, die eine Materialeigenschaft ist und nicht von der Form des Drahtes abhängt, müssen wir nicht nur die gemessene Längenänderung, sondern auch die ursprüngliche Länge des Drahtes berücksichtigen. Wenn der Draht eine **Länge**  $L$  hat und wir die **Längenänderung** des Drahtes mit  $\Delta L$  bezeichnen (eine kleine Änderung der Länge), so wird die **relative Längenänderung** (dimensionslos)

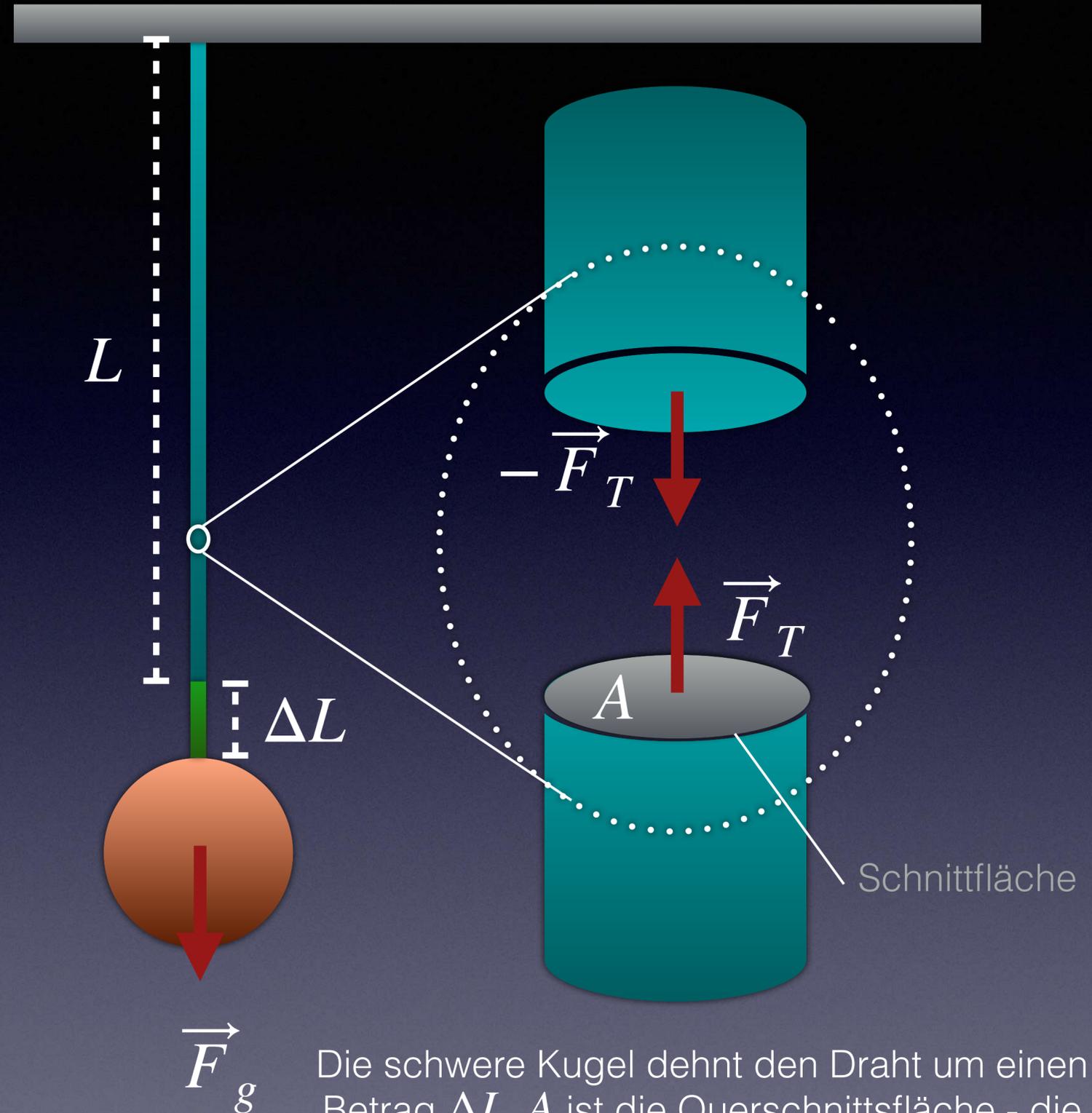
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

als **Dehnung** (en: *strain*) bezeichnet.

Wie wir oben gesehen haben, tragen alle interatomaren Bindungen dazu bei, das am Draht befestigte Gewicht zu halten. Um eine Größe zu definieren, die nicht von der Dicke des Drahtes abhängt, müssen wir nicht nur die **Zugkraft**  $\vec{F}_T$ , sondern auch die **Querschnittsfläche**  $A$  des Drahtes berücksichtigen (siehe nebenstehende Abbildung). Die **Zugkraft pro Flächeneinheit** wird als „(Normal-) **Spannung**“

$$\sigma_T = \frac{|\vec{F}_T|}{A}$$

bezeichnet.



Die schwere Kugel dehnt den Draht um einen Betrag  $\Delta L$ .  $A$  ist die Querschnittsfläche - die Fläche eines Schnitts durch den Draht, senkrecht zu seiner Länge.

Solange die Belastung nicht zu groß ist, ist die Dehnung  $\epsilon$  proportional zur Spannung  $\sigma_T$ . Auf atomarer Ebene kann die Spannung  $\sigma_T$  auf die Kraft bezogen werden, die jede lange Kette von interatomaren Bindungen ausüben muss, und die Dehnung  $\epsilon$  kann auf die Dehnung der interatomaren Bindung bezogen werden. Das **Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung** ist eine **Materialeigenschaft** und unterscheidet sich für Stahl, Aluminium usw., hängt aber nicht von der Länge oder Dicke des Drahtes ab, den wir für die Messung des **Elastizitätsmoduls**  $E$  verwenden:

$$E = \frac{\sigma_T}{\epsilon} , \text{ und damit ist } \sigma_T = E\epsilon .$$

Elastizitätsmodul und Spannung haben dieselbe Einheit  $\text{N/m}^2$ . Beachte: Nur bei kleinen Belastungen sind Spannung und Dehnung linear proportional.

# Kontrollpunkt 4

1. Du hängst eine Masse von  $5 \text{ kg}$  an das Ende eines Stabes, der unbelastet  $1.7 \text{ m}$  lang ist und einen quadratischen Querschnitt von  $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  aufweist. Du stellst fest, dass die Länge des Stabes im Anschluss an die Belastung auf  $1.74 \text{ m}$  zugenommen hat. (1) Wie groß ist die Dehnung  $\epsilon$ ? (2) Wie hoch ist die Spannung  $\sigma_T$ ? (c) Welchen Wert hat der Elastizitätsmodul  $E$  für dieses Material? Hinweis: Vernachlässige eine eventuelle Querkontraktion des Stabes bei Belastung. Verwende  $|\vec{g}| = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

Aus makroskopischen Messungen des Elastizitätsmoduls  $E$  können wir eine ungefähre Steifigkeit für die interatomare Bindung berechnen, indem wir wiederum eine **Verbindung zwischen der makroskopischen und der mikroskopischen Welt** herstellen. Mit der interatomaren Steifigkeit  $k_{s,i}$ , dem Atom-Durchmesser  $d_a$  und der Änderung des interatomaren Abstands  $s_a$  erhalten wir für

$$\sigma_T = \frac{k_{s,i}s_a}{d_a^2}, \quad \epsilon = \frac{s_a}{d_a} \quad \text{und damit} \quad E = \frac{\sigma_T}{\epsilon} = \frac{\frac{k_{s,i}s_a}{d_a^2}}{\frac{s_a}{d_a}} = \frac{k_{s,i}}{d_a}.$$

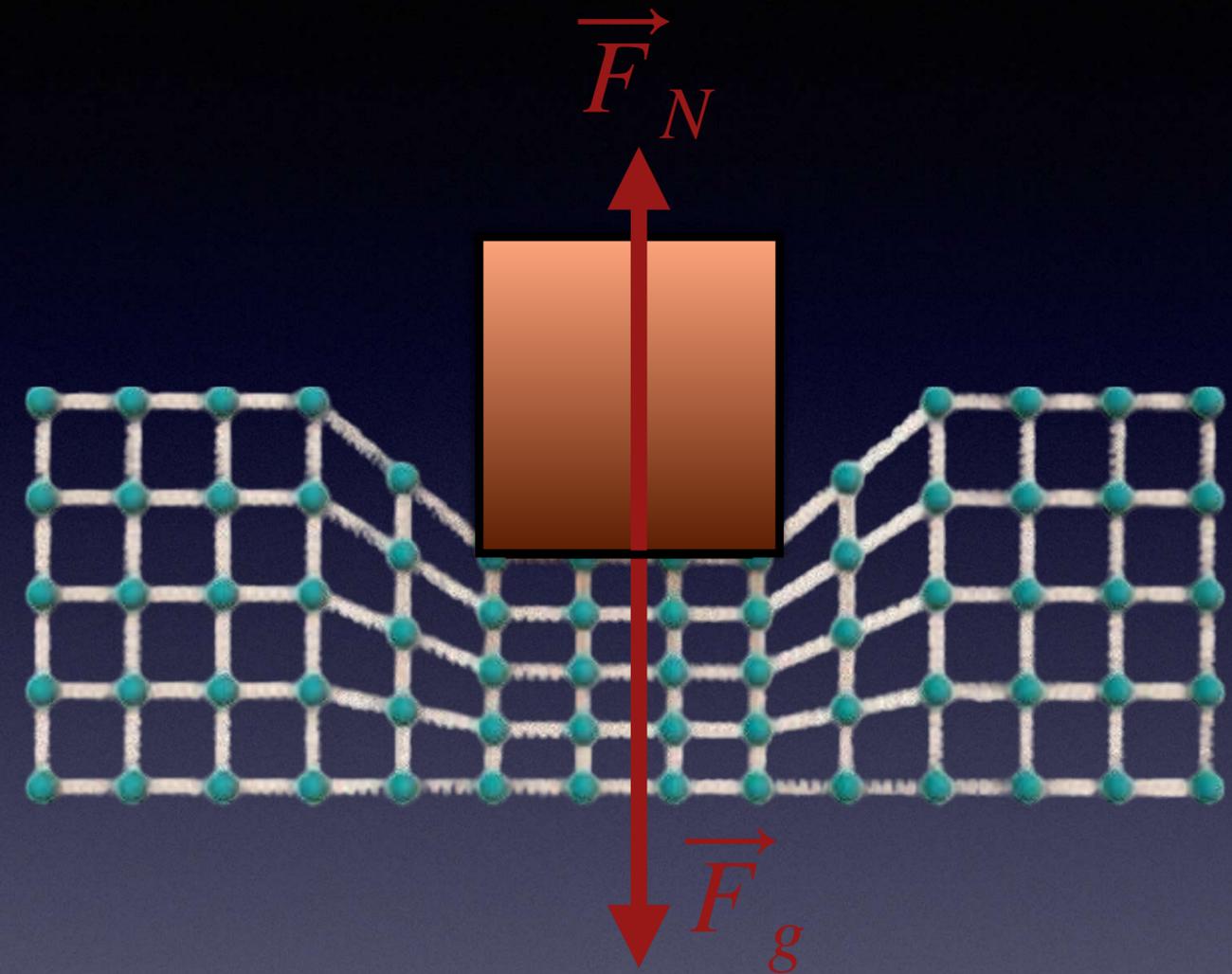
Für die aus dem Elastizitätsmodul abgeleitete interatomare Steifigkeit erhalten wir

$$k_{s,i} = Ed_a.$$

# Normalkräfte

(en: *normal forces*)

Als **Normalkraft** wird eine Wechselwirkungskraft in der Kontaktzone zwischen zwei Körpern oder eine Schnittkraft in einem stabförmigen Bauteil bezeichnet. Sie steht senkrecht zur Kontaktfläche bzw. Schnittfläche. Die in Richtung des Normalenvektors wirkende Normalkraft erzeugt Druck- bzw. *Zugspannungen*. Das Wort wird also im mathematischen Sinne verwendet und bedeutet „senkrecht zu“, weil die **Richtung der Kraft senkrecht zur Oberfläche** verläuft. Üblicherweise werden „normale“ Kräfte mit  $\vec{F}_N$  bezeichnet. Hinweis: Die Normalkraft ist keine *andere Art* grundlegender Kraft, wie die Gravitationskraft oder die elektrische Kraft. Es handelt sich lediglich um beschreibende Bezeichnungen für bestimmte Arten von interatomaren elektrischen Wechselwirkungen.

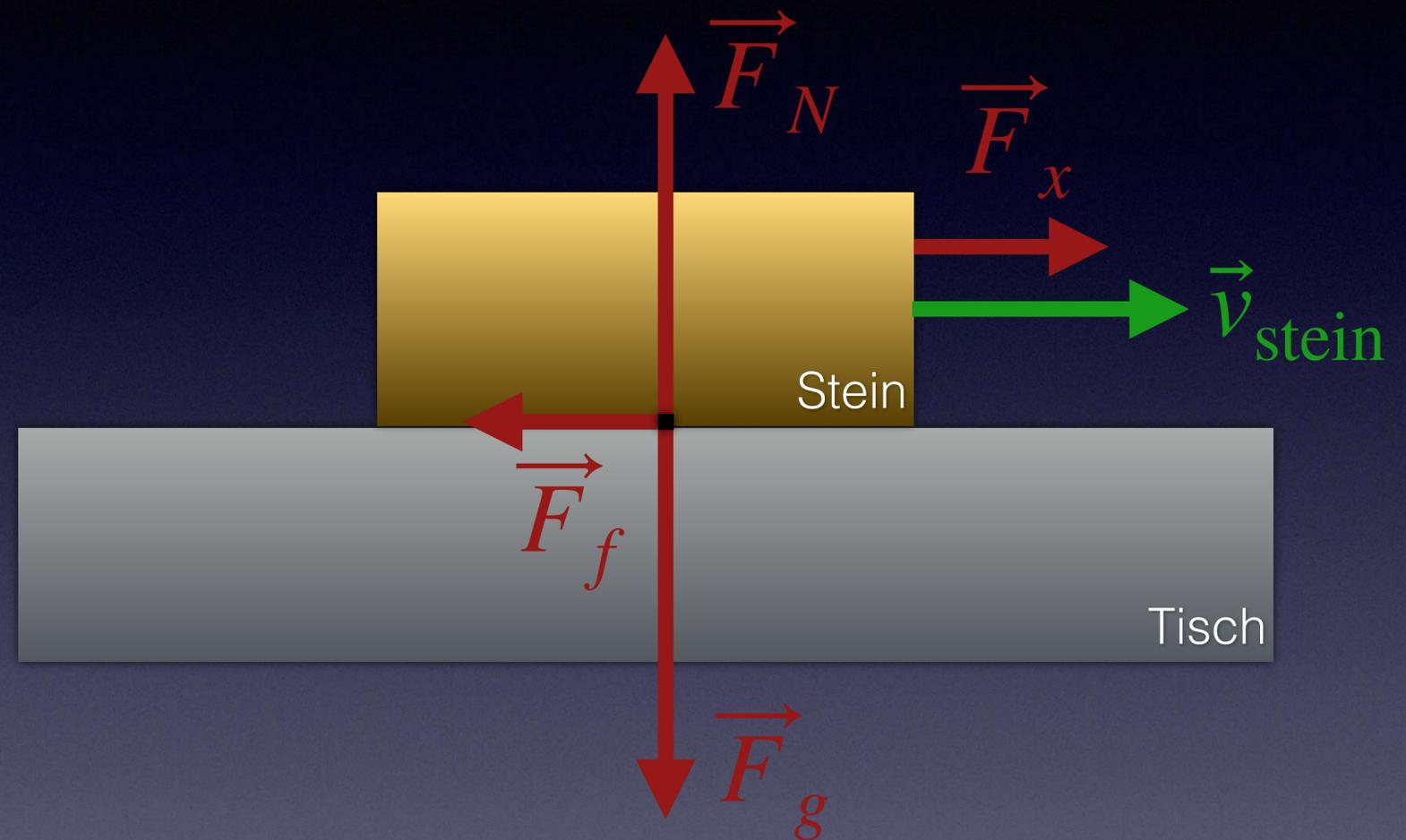


Schematische Darstellung eines auf einem Tisch ruhenden Objekts (stark übertriebener Maßstab). Die interatomaren „Federn“ im Kontaktbereich werden durch das Gewicht der darüber liegenden Atome zusammengedrückt.  $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{0}$ .

# Reibung

(en: *friction*)

**Reibung** ist ein weiteres Phänomen, das mit verformbaren Objekten zu tun hat. Um es zu verstehen, müssen wir wieder die innere Struktur von fester Materie betrachten. Wie wir gerade gesehen haben, sinkt ein Stein, der auf einem Tisch liegt, in den Tisch ein, wodurch die interatomaren Bindungen zusammengedrückt werden, und der Tisch drückt den Stein nach oben. Zieht man den Stein dann über den Tisch, stößt der Ziegelstein immer wieder auf zuvor nicht komprimierte Bereiche des Tisches, wodurch die Bindungen vor dem Ziegelstein komprimiert und die Bindungen dahinter gedehnt werden. Die Kraft  $\vec{F}_f$ , die entgegengesetzt parallel zur Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{stein}}$  verläuft, wird als „**Reibungskraft**“ bezeichnet. Nachdem der Stein vorbei geglitten ist, kehren die Atome im Großen und Ganzen in ihre Gleichgewichtspositionen zurück.



Wechselwirkungen nach dem Schnittprinzip für den mit konstanter Geschwindigkeit gleitenden Stein auf einem Tisch.  $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_f + \vec{F}_x = \vec{0}$ .

Die **Auslenkung** der Atome aus ihrer **Gleichgewichtslage** führt jedoch dazu, dass die **Atome** sowohl im Tisch als auch im Stein um ihre Gleichgewichtslage **schwingen**. Wie wir in späteren Abschnitten noch ausführlich besprechen werden, ist diese verstärkte Schwingungsbewegung oder „**innere Energie**“ mit einer höheren **Temperatur** verbunden. Wenn man den Stein über den Tisch zieht, steigt die Temperatur des Tisches und des Steins. Der Anstieg der inneren Energie bedeutet, dass du ständig eine Kraft aufbringen und Energie aufwenden musst, um den Stein zu ziehen. Wenn du mit dem Ziehen aufhörst, wird der Stein langsamer und kommt zum Stillstand, da seine Bewegungsenergie („kinetische Energie“) in Form der Bewegung von Atomen im gesamten Objekt in innere Energie umgewandelt wird. Wir sagen, dass Reibung ein „dissipativer“ Prozess ist. Reibung ist darüber hinaus ein recht komplexer Prozess, und dieses Bild der Reibung auf atomarer Ebene, das auf dem Kugel-Feder-Modell von Festkörpern basiert, ist notwendigerweise vereinfacht. Später, nachdem wir uns mit dem Thema Energie befasst haben, werden wir die Reibung noch einmal ausführlicher behandeln.

Wenn ein Objekt auf einem anderen **gleitet**, hat die Komponente der Kraft, die von einem Gegenstand auf den anderen ausgeübt wird, eine Komponente parallel (oder antiparallel) zur Bewegung  $\vec{v}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\vec{F}_f \approx -\mu_k \left| \vec{F}_N \right| \hat{v}.$$

$\vec{F}_N$  ist die Normalkraft, die senkrechte Komponente der Kraft, die die beiden Objekte ineinander drückt.  $\mu_k$  ist der (**Gleit-**) **Reibungskoeffizient**, der von der Beschaffenheit der beiden sich berührenden Materialien abhängt und typischerweise Werte zwischen 0 und 1 aufweist. Die Reibungskraft hängt in diesem Fall nicht von der Geschwindigkeit des Objekts ab, anders als z. B. der Luftwiderstand. Je stärker man die beiden Objekte zusammendrückt, desto tiefer ist ihre gegenseitige Durchdringung, weshalb  $\left| \vec{F}_f \right|$  proportional zu  $\left| \vec{F}_N \right|$  ist.

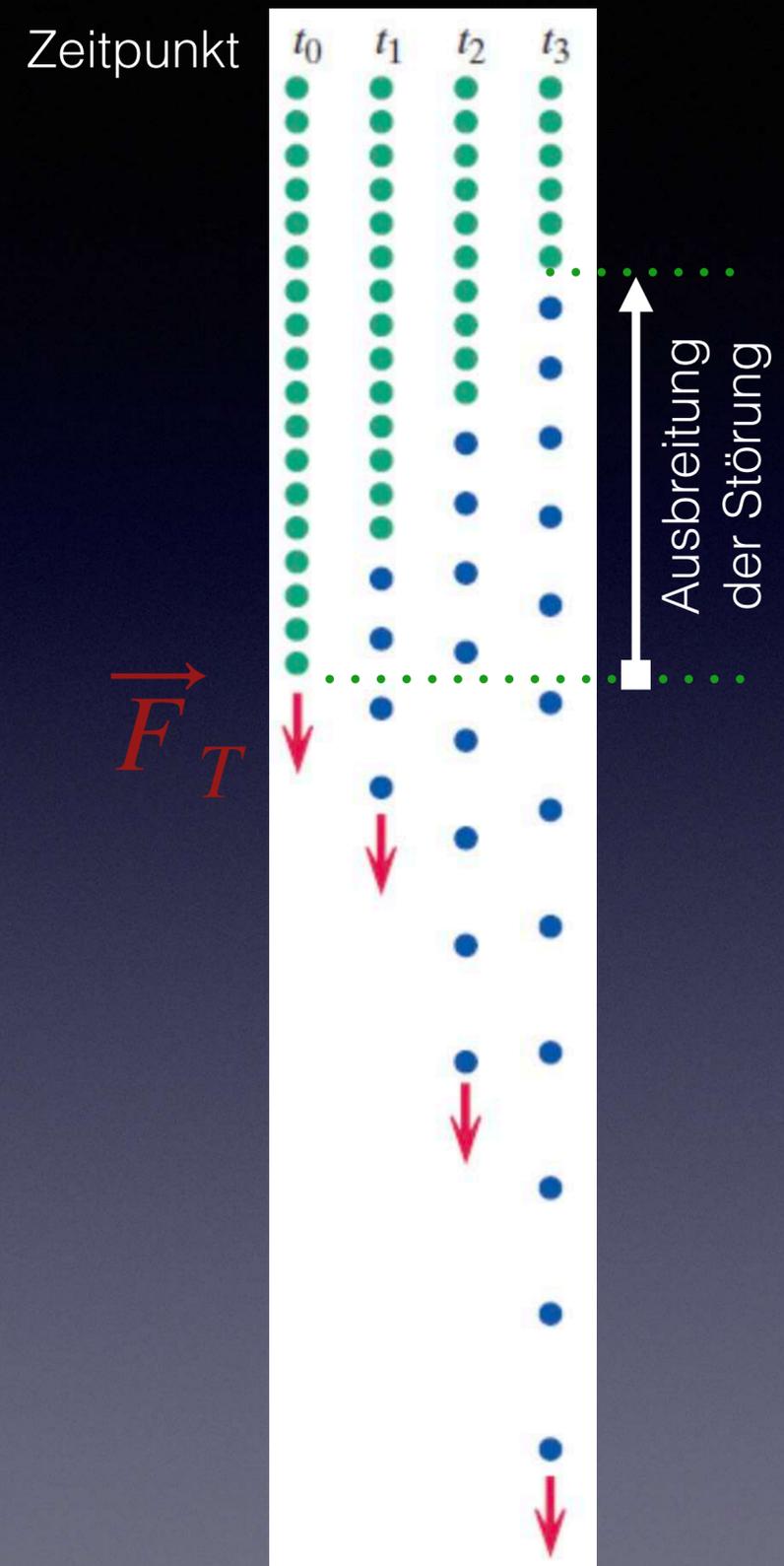
Falls auf ein ruhendes Objekt eine Kraft kleiner als  $\mu_k \left| \vec{F}_N \right|$  ausgeübt wird, wird sich das Objekt nicht in Bewegung setzen. Diese Situation wird als „**Haftreibung**“ bezeichnet. Die **Haftreibungskraft** kann einen beliebigen Wert annehmen, der kleiner als  $\mu_s \left| \vec{F}_N \right|$  ist, wobei der Wert  $\mu_s$  **Haft-Reibungskoeffizient** genannt wird. Bei einigen Materialpaaren kann es notwendig sein, eine Kraft auszuüben, die etwas größer ist als  $\mu_k \left| \vec{F}_N \right|$  ist, um das Objekt in Bewegung zu setzen. Aber sobald das Objekt zu gleiten begonnen hat, braucht man nur noch eine Kraft von  $\mu_k \left| \vec{F}_N \right|$ , um es in Bewegung zu halten. In solchen Fällen sagt man, dass der Haft-Reibungskoeffizient  $\mu_s$  größer als der Gleit-Reibungskoeffizient  $\mu_k$  ist. In dieser Situation tritt der **Stick-Slip-Effekt** ein und es kommt zu **Ruckgleiten** (periodischer Wechsel zwischen Haften und Gleiten, z. B. nasse Fingerkuppe streicht über den Rand eines Glases und erzeugt dabei einen Ton). In der Praxis wird sehr häufig versucht, diesen mit Geräuschentwicklung verbundenen Effekt zu vermeiden, z. B. durch Schmierung.

# Kontrollpunkt 5

1. Wenn du auf einen Holzklotz eine horizontale Kraft von  $80\text{ N}$  ausübst, bewegt sich dieser Klotz mit einer konstanten Geschwindigkeit über den Boden, wobei  $\mu_k = \mu_s$  sein soll. (1) Was passiert, wenn man stattdessen eine Kraft von  $60\text{ N}$  ausübt? (2) Falls man also eine Kraft von  $60\text{ N}$  auf den Klotz ausübt, wie groß ist in diesem Fall die horizontale Komponente der Kraft, die der Boden auf den Klotz ausübt? (3) Was passiert, falls du eine Kraft von  $100\text{ N}$  ausübst? (4) Wie groß ist die horizontale Komponente der Kraft, die der Boden auf den Klotz ausübt, falls man eine Kraft von  $100\text{ N}$  ausübt?

# Schallgeschwindigkeit und Steifigkeit der interatomaren Bindungen eines Festkörpers

Bei der Betrachtung von Objekten, die Zugkräfte ausüben, wie Lianen, Schnüre und Drähte, usw. haben wir die (sehr gute) Näherung gemacht, dass die Dehnung der interatomaren Bindungen über die gesamte Länge des Objekts nahezu gleich ist. Ebenso nehmen wir an, dass innerhalb von Objekten, die Druckkräfte ausüben, die interatomaren Bindungen alle in etwa gleich stark zusammengedrückt werden. Die **Ausbreitung von Dehnung oder Kompression erfolgt jedoch nicht überall zu derselben Zeit**. Mit Beginn der Wirkung von  $\vec{F}_T$  am unteren Ende, werden zunächst die interatomaren Bindungen zwischen benachbarten Atomen im nahe gelegenen Abschnitt geringfügig gedehnt. Infolge ihrer Abwärtsbewegung dehnen diese Atome die Bindungen ihrer Nachbarn, und sehr schnell breitet sich diese neue interatomare Bindungsdehnung zum oberen Ende hin aus, bis der gesamte Abschnitt unter Spannung steht. Dieser Prozess ist schnell, aber nicht „unendlich schnell“. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grenze zwischen dem gedehnten und dem ungedehnten Bereich wird als „**Schallgeschwindigkeit**“ im jeweiligen Material bezeichnet. Hinweis: Darstellung extrem verzerrt.



Wir modellieren einen Kupferstab als eine einzige horizontale Kette von  $n_a$  Kupferatomen, jedes mit der Masse  $m_a = \frac{M_{\text{Mol}}}{N_A} = \frac{64 \times 10^{-3} \text{ kg}}{6.02 \times 10^{23}}$ . Der anfängliche Abstand  $L$  zwischen zwei beliebigen Atomen ist die Länge der interatomaren Bindung  $L_0 \equiv d_a = 2.28 \times 10^{-10} \text{ m}$  in festem Kupfer, und die Steifigkeit jeder interatomaren Bindung ist mit  $k_s = 26.8 \text{ N/m}$  gegeben (siehe hierfür noch einmal die vorangehenden Folien zu „Steifigkeit einer interatomaren Bindung“). Zu Beginn der Simulation befindet sich jedes Atom im Ruhezustand  $\vec{p}_i = \vec{0}$ . Die Berechnung ist ähnlich organisiert wie andere iterative Berechnungen, die wir bislang durchgeführt haben. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir die Position und den Impuls von  $n_a$  Objekten nach jedem Zeitschritt aktualisieren müssen. Die Berechnung lässt sich wie folgt skizzieren (siehe nächste Folie):

Initialisierung:  $\vec{r}_{i,0}$  und  $\vec{p}_{i,0}$ ,  $[i | i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n_a]$ ;  $\vec{r}_{1,0} = \vec{r}_{1,0} + \delta \vec{d}$ ;  $k = 0$

$$\vec{L}_{i,k} = \vec{r}_{i+1,k} - \vec{r}_{i,k} \text{ und } \hat{L}_{i,k} = \vec{L}_{i,k} / |\vec{L}_{i,k}| \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n_a - 1$$

$$s_{i,k} = |\vec{L}_{i,k}| - d_a \text{ und } \vec{F}_{i,k} = -k_s s_{i,k} \hat{L}_{i,k} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n_a - 1$$



Iteration  
 $k = k + 1$

$$\vec{p}_{i,k+1} = \vec{p}_{i,k} - \vec{F}_{i,k} \Delta t \quad \text{und} \quad \vec{p}_{i+1,k+1} = \vec{p}_{i+1,k} + \vec{F}_{i,k} \Delta t$$

$$\vec{v}_{i,k+1} = \vec{p}_{i,k+1} / m_a$$

$$\vec{r}_{i,k+1} = \vec{r}_{i,k} + \vec{v}_{i,k+1} \Delta t$$

Hinweis: Die Berechnung kann dann beendet werden, wenn das äußerste rechte, das  $n_a$ -te Atom, eine nennenswerte Auslenkung aus der Ruhelage erfahren hat.

# Änderungsrate des Impuls

Folgende Formulierungen des Prinzips Impuls (Kraftstoß) haben wir bislang verwendet:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{net}} \Delta t \quad \text{und} \quad \vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{F}_{\text{net}} \Delta t .$$

Diese Formulierungen sind besonders dann nützlich, wenn wir den Impuls zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen und vorhersagen wollen, wie der Impuls zu einem späteren Zeitpunkt sein wird. Wir verwenden diese Formen insbesondere in sich wiederholenden Computer-Simulationen, um die zukünftige Bewegung von Objekten vorherzusagen.

Insofern wir durch  $\Delta t$  dividieren, erhalten wir

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{net}}, \text{ und mit } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left\langle \frac{dp_x}{dt}, \frac{dp_y}{dt}, \frac{dp_z}{dt} \right\rangle.$$

Die Zeitableitung der vektoriellen Größe  $\vec{p}$  ist damit erneut ein Vektor. Wir haben schon früher vergleichbare Ableitungen kennengelernt: zum Beispiel die

Momentangeschwindigkeit  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  sowie die

Beschleunigung  $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ .

Diese Ableitungen eines Vektors haben sowohl einen Betrag als auch eine Richtung.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}}$$

„Die momentane zeitliche Änderungsrate des Impulses eines Objekts ist gleich der auf das Objekt wirkenden Nettokraft. Mathematisch ausgedrückt kann man sagen, dass die Ableitung des Impulses nach der Zeit gleich der Nettokraft ist, die auf das Objekt wirkt.“

**Ableitungs-Form des Prinzips Impuls**

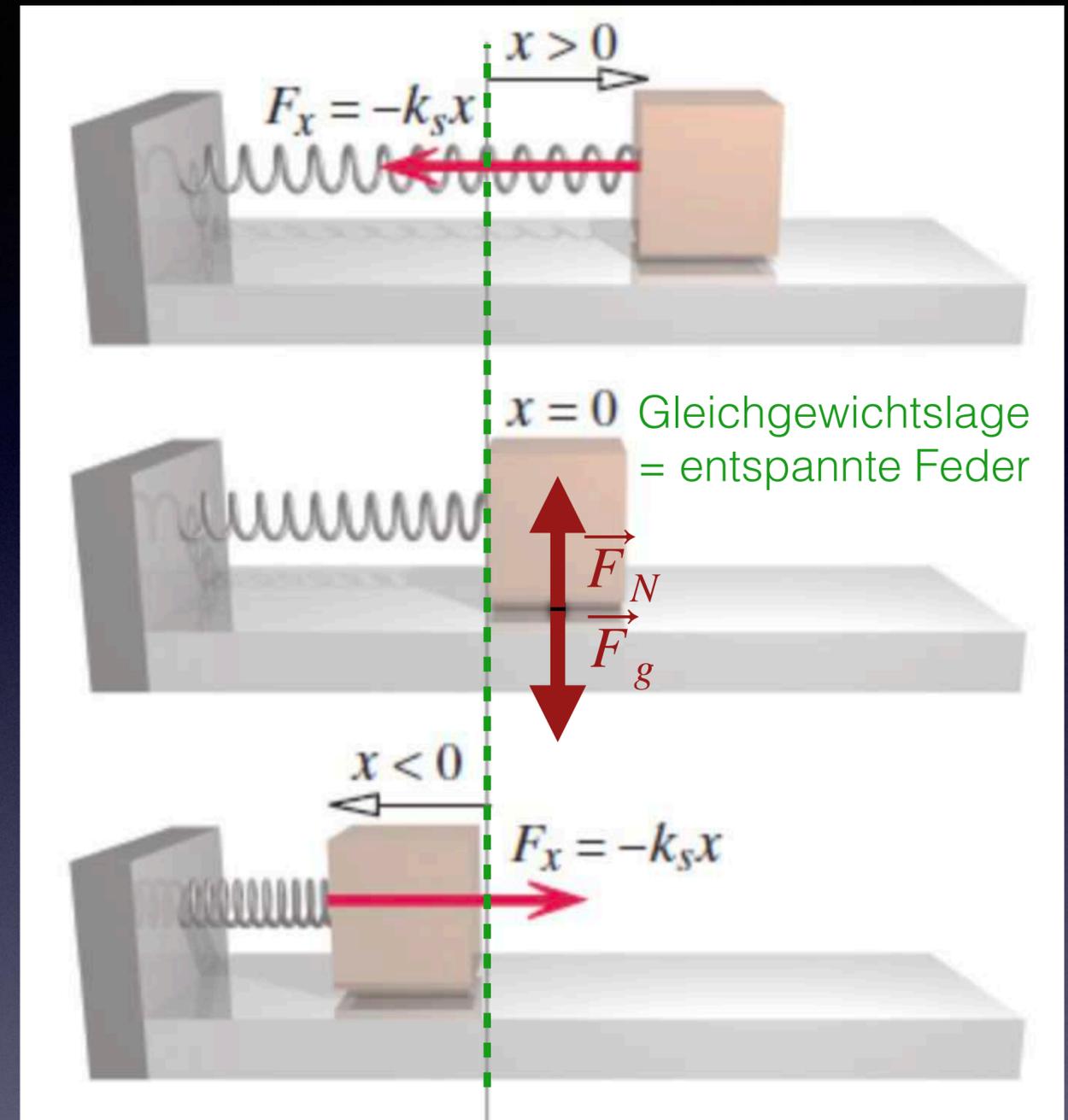
Die auf der vorangehenden Folie aufgeschriebene Form des Prinzips Impuls ist nützlich, wenn wir etwas über die Änderungsrate des Impulses zu einem bestimmten Zeitpunkt wissen. **Wenn wir die Änderungsrate des Impulses kennen, können wir diese Form des Impulsprinzips verwenden, um die Nettokraft abzuleiten**, die auf das Objekt wirkt und die numerisch gleich der Änderungsrate des Impulses ist. **Wenn wir die Nettokraft kennen, können wir möglicherweise bestimmte Beiträge zur Nettokraft ausfindig machen** (den Ursachen für die Bewegung eines Objekts).

# Kontrollpunkt 6

1. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert sich der Impuls eines Objekts mit einer Rate von  $\langle 0,0,4 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ . (1) Wie groß ist die Nettokraft  $\vec{F}_{\text{net}}$  auf das Objekt in diesem Moment? (2) Was kannst du über die Richtung des Impulses  $\vec{p}$  des Objekts zu diesem Zeitpunkt sagen?

# Analytische Lösung für das Masse-Feder-System

In einem früheren Kapitel haben wir die zeitlich diskrete Form des Prinzips Impuls iterativ benutzt, um die Bewegung der an einer Feder befestigten Masse vorherzusagen. Nun können wir mit Hilfe der Ableitungsform des Prinzips Impuls eine analytische (algebraische) Lösung für die Bewegung eines idealen Masse-Feder-Systems herleiten. Mit „ideal“ meinen wir, dass sich die Feder nahezu unbegrenzt dehnen oder stauchen kann, dass die Masse der Feder nahezu null ist, dass die Feder niemals heiß wird oder sich verformt und dass es weder Reibung noch Luftwiderstand gibt.



Ein Objekt, das mit einer Feder an einer Wand befestigt ist, gleitet in x-Richtung mit verschwindender Reibung (Lufttisch) hin und her. Die Komponente der Feder-Kraft ist gleich  $F_x = -k_s x$ .  $\vec{F}_N$  und  $\vec{F}_g$  addieren sich zu  $\vec{0}$ .

Da das Objekt nur entlang der  $x$ -Achse schwingt, ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Änderungsrate des Impulses und der Auslenkung  $x$  aus der Gleichgewichtslage, falls  $|\vec{v}| \ll c$  gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \approx m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{net}}, \text{ ergibt}$$

$$m \left\langle \frac{d^2x}{dt^2}, 0, 0 \right\rangle = \langle -k_s x, 0, 0 \rangle \text{ und damit}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_s x.$$

Wenn wir die Konstanten und Vorzeichen für einen Moment ignorieren, besagt diese Gleichung, die eine (gewöhnliche) Differentialgleichung ist, dass wir, wenn wir eine Funktion der Zeit kennen, durch die zweite (Zeit-) Ableitung dieser Funktion wieder die ursprüngliche Funktion erhalten.

Wenn wir eine Kosinusfunktion zweimal differenzieren, erhalten wir wieder einen Kosinus. Und da das Objekt periodisch hin- und herschwingt, ist der Kosinus eine plausible erste Schätzung. Das „Raten“ einer Funktion ist nicht so ungewöhnlich, wie es vielleicht scheint. Es ist eine Standard-Methode, um eine Differentialgleichung zu lösen.

Die Funktion  $x(t) = \cos(t)$  scheint jedoch noch nicht ganz okay zu sein, da in diesem Fall das Objekt immer zwischen  $\pm 1 \text{ m}$  hin- und her schwingen müsste.

Mit  $x(t) = A \cos(t)$ , also Einführung der Amplitude  $A$ , können wir das korrigieren. In diesem Fall müsste die Periode  $T$  allerdings immer  $2\pi \text{ s}$  betragen, was in den allermeisten Fällen ebenfalls nicht der Realität entsprechen wird.

Mit  $\omega = 2\pi/T$  erhalten wir schließlich  $x(t) = A \cos(\omega t)$ . Ist das jetzt okay?

Dazu setzen wir die geratene Lösung  $x(t) = A \cos(\omega t)$  in die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_s x$$

ein. Wir erhalten dann

$$-Am\omega^2 \cos(\omega t) = -k_s A \cos(\omega t), \text{ also } m\omega^2 = k_s, \text{ womit}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_s}{m}}$$

den Zusammenhang zwischen Frequenz, Feder-Steifigkeit und Masse beschreibt.

Dies ist ein interessantes Ergebnis, denn es besagt, dass die Dauer der Schwingungen von den physikalischen Größen, Masse des Objekts und der Feder-Steifigkeit abhängt:

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_s}{m}}.$$

Die Amplitude  $A$  ist eine Konstante, die nur von den Anfangs-Bedingungen abhängt.  $A$  ist gleich der maximalen Dehnung der Feder während einer Schwingung.  $\omega$  wird als Kreisfrequenz bezeichnet und hat die Einheit Rad/s. Periode  $T = 2\pi/\omega$  und Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$ .

Aus der analytischen Lösung geht hervor, dass die Kreisfrequenz  $\omega$  (und damit die Periode  $T$ ) überhaupt nicht von der Amplitude  $A$  abhängt!  $\omega$  hängt nur von der Federsteifigkeit und der Masse des Objekts ab. Ein solches **idealisiertes Masse-Feder-System** wird als **harmonischer Oszillator** bezeichnet, und seine Schwingungsbewegung als **harmonische Bewegung**. Die **besonderen Merkmale** eines harmonischen Oszillators sind:

- Die Position der Masse als Funktion der Zeit ist durch eine Kosinusfunktion gegeben;
- Die Periode ist unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

Die Tatsache, dass die **Periode** eines harmonischen Oszillators **nicht von der Amplitude abhängt**, ist überraschend. Bei einer größeren Amplitude legt die Masse in einer Periode eine größere Strecke zurück. Allerdings erreicht sie auch höhere Geschwindigkeiten, und bei einem idealen Masse-Feder-System heben sich diese beiden Effekte genau auf.

# Kontrollpunkt 7

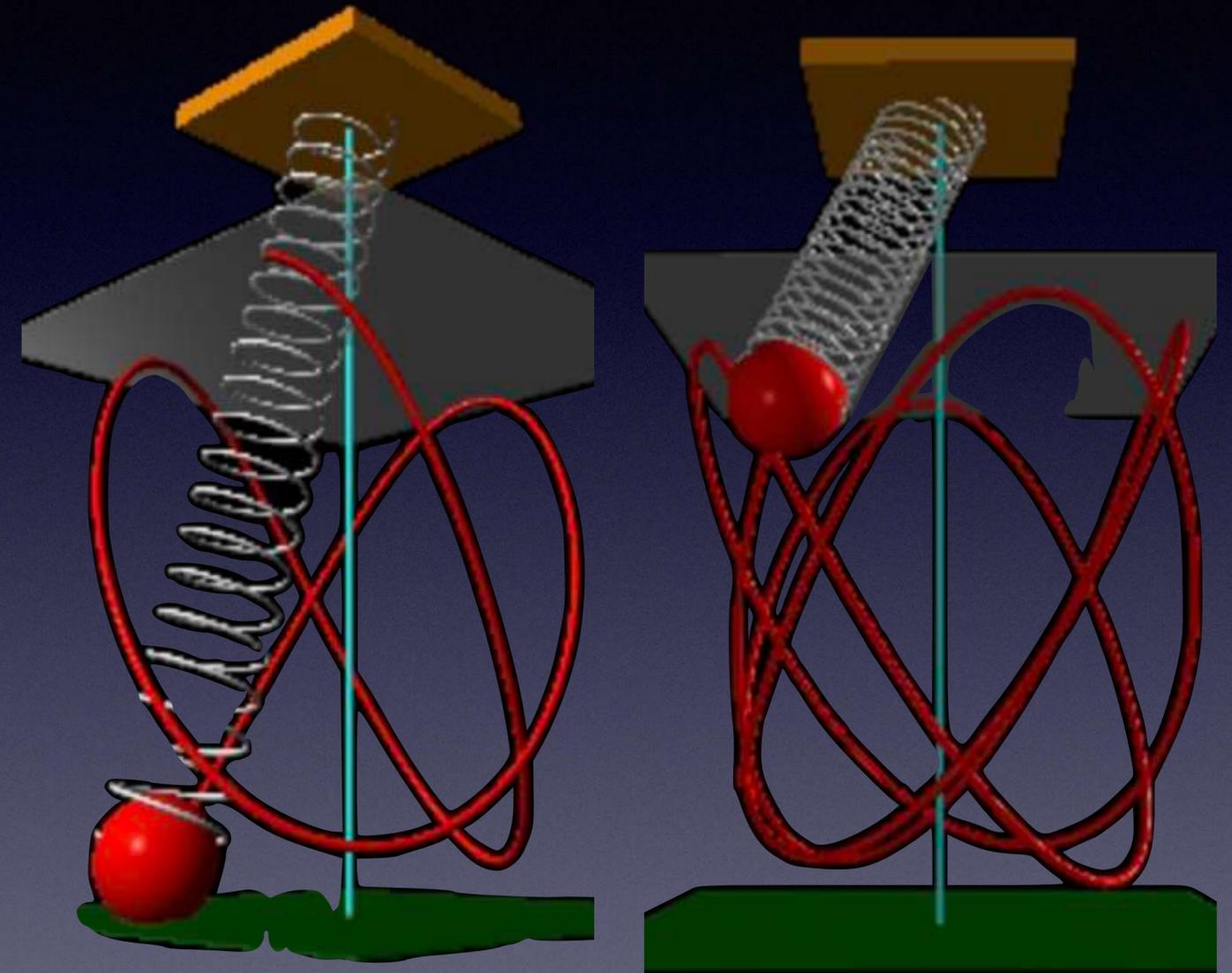
1. Gilt die obige analytische Lösung für einen horizontalen Oszillator auch für ein vertikal hängendes Masse-Feder-System? Weshalb ja, oder weshalb nicht?
2. Du hast ein Gummiband, dessen entspannte Länge gleich  $8.5 \text{ cm}$  ist. Du hängst ein Objekt mit der Masse  $330 \text{ g}$  an das Gummiband, das sich danach bis zu einer Länge von  $14 \text{ cm}$  dehnt. Betrachte das Gummiband als eine einzelne Feder. (1) Wie groß ist die Steifigkeit des Gummibandes? (2) Wenn Du dieses Masse-Feder-System in Schwingung versetzt, wie lange dauert eine volle Schwingung? (3) Du verdoppelst die Masse. Welchen Einfluss hat das auf die Dauer der Schwingung?

# Analytische Lösung und iterative Lösung im Vergleich

In einem früheren Kapitel haben wir die Bewegung eines Objekts an einer vertikalen Feder durch iterative Anwendung des Impulsprinzips und Aktualisierung der Position modelliert. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir durch Lösung einer Differentialgleichung, die auf der Ableitungsform des Prinzips Impuls basiert, eine analytische Lösung für die zeitabhängige Position eines idealen ein-dimensionalen Masse-Feder-Systems erhalten. Unsere analytische Lösung ermöglicht es uns, wichtige allgemeine Merkmale des Verhaltens des idealen Systems zu erkennen: Unabhängigkeit der Periode von der Amplitude, Vergrößerung der Periode bei größerer Masse, Verkürzung der Periode bei größerer Feder-Steifigkeit. Obwohl wir diese Dinge auch durch mehrere numerische (iterative) Berechnungen mit verschiedenen Werten für Masse, Feder-Steifigkeit oder anfänglicher Auslenkung hätten herausfinden können, ist es besonders einfach, diese Eigenschaften durch Interpretation der analytischen Lösung zu erkennen.

Obwohl wir in der Lage waren, eine analytische Lösung für ein ideales 1D-Masse-Feder-System zu finden, ist es nicht einfach, diese Lösung auf den allgemeinen Fall einer drei-dimensionalen Bewegung zu übertragen (siehe nebenstehende Abbildungen). Außerdem können wir bei der numerischen Vorgehensweise relativ einfach Reibung, Luftwiderstand nicht-lineare Feder-Steifigkeit oder eine massebehaftete Feder berücksichtigen.

Eine massebehaftete Feder kann durch Modellierung der Feder als Kette von winzigen Massen, die durch ideale Federn verbunden sind, dargestellt werden.



Bahnkurven eines Masse-Feder-Systems bei drei-dimensionalen Bewegung für zwei verschiedene Zeitpunkte.

Die Stärke der iterativen Anwendung des Prinzips Impuls liegt darin, dass es auch in Situationen angewendet werden kann, in denen eine analytische Lösung nicht möglich ist. Beispiel (nicht-lineare Feder-Steifigkeit):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_s x^3$$

Es mag eine analytische Lösung dieser Differentialgleichung in Form bekannter mathematischer Funktionen geben oder auch nicht, aber **jede Differentialgleichung kann numerisch gelöst werden**, so wie wir es für das Masse-Feder-System getan haben. Es ist zu beachten, dass eine analytische oder iterative Vorhersage der Zukunft nur für unser Modell der realen Welt gilt. Wenn unser Modell eine gute Annäherung an die reale Welt ist, wird unsere Vorhersage eine gute Annäherung an das sein, was tatsächlich passieren wird. Aber selbst eine analytische Vorhersage kann nicht exakt sein, weil es praktisch unmöglich ist, die Ausgangsbedingungen und die Nettokraft aufgrund aller anderen Objekte im Universum exakt zu kennen.

Ein analytischer Ausdruck für  
die Schallgeschwindigkeit

Unter normalen Bedingungen beträgt die **Schallgeschwindigkeit** in der **Luft** etwa **340 m/s**. In einem **Festkörper** ist die Schallgeschwindigkeit viel höher als in der Luft. In **Aluminium** beträgt die Schallgeschwindigkeit etwa **4800 m/s**. In **Blei**, das ein viel weicherer Material als Aluminium ist, beträgt die Schallgeschwindigkeit nur etwa **1200 m/s**. Auf atomarer Ebene gibt es zwei wesentliche Unterschiede zwischen Blei und Aluminium. Erstens ist die Masse eines Bleiatoms etwa achtmal so groß wie die **Masse** eines Aluminiumatoms. Zweitens ist die **Steifigkeit** der interatomaren Bindungen in Aluminium größer als die Steifigkeit der interatomaren Bindungen in Blei. Da die Ausbreitung einer Störung durch einen Metallstab mit der Verschiebung von Atomen verbunden ist, scheint es naheliegend, dass diese beiden Faktoren bei der Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung eine Rolle spielen sollten. Unser Ziel in der folgenden Diskussion ist es, das Masse-Feder-Modell eines Festkörpers zu verwenden, um diese Beziehung vorherzusagen.

Wie sollte die Schallgeschwindigkeit  $c_s$  von der Masse  $m_a$  eines Atoms in einem Material abhängen? Eine gegebene Kraft bewirkt dieselbe Impulsänderung für ein massives Atom wie Blei oder ein leichteres Atom wie Aluminium. Die Geschwindigkeitsänderung des Bleiatoms wird jedoch geringer sein als die des Aluminiumatoms. Dies deutet darauf hin, dass sich ein Schallimpuls (Störung) um so **langsamer** ausbreitet, **je größer die Masse** der Atome ist.

Wie sollte die Schallgeschwindigkeit  $c_s$  von der Steifigkeit  $k_{s,i}$  der interatomaren Bindungen in einem Material abhängen? Je steifer die Bindung ist, desto größer ist die Kraft, welche die „Feder“ als Reaktion auf dieselbe Verschiebung auf ein benachbartes Atom ausübt. **Steifere interatomare Bindungen** sollten also dazu führen, dass sich ein Schallimpuls **schneller** durch einen Stab ausbreitet.

Es gilt, einen mathematischen Ausdruck zu konstruieren, der die richtigen Einheiten oder „**Dimensionen**“ hat. Die Geschwindigkeit hat die Einheit  $\text{m/s}$  (Dimension  $L/T$ ). Also brauchen wir eine Gleichung mit der Steifigkeit interatomarer Bindungen sowie der Atommasse, die im Zähler mit Metern und im Nenner mit Sekunden endet:

$$c_s = f(\dots) \text{ m/s}$$

Die zuvor für den harmonischen Oszillator gefundene Winkelgeschwindigkeit

$\omega = \sqrt{k_{s,i}/m_a}$  hat die Einheit  $1/s$  und kann daher im Zähler des gesuchten

Ausdrucks für  $c_s$  stehen. Ist die Annahme  $c_s \sim \omega$  vernünftig? Ja, denn je größer  $\omega$  ist, desto schneller schwingt ein Atom hin und her, wodurch intermolekulare Bindungen gestaucht und gedehnt werden, was wiederum Auswirkungen auf benachbarte Atome hat. Mit  $x \sim A \cos(\omega t) \rightarrow dx/dt \sim -A\omega \sin(\omega t)$ .

Welche andere Größe sollte in den Ausdruck aufgenommen werden? Da wir am Ende die Einheit  $\text{m/s}$  erhalten wollen, müssen wir mit etwas multiplizieren, das die Einheit Meter hat.  $\omega$  steht im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit, mit der ein Atom auf seinen Nachbarn trifft und sich eine Veränderung über eine Strecke von einem interatomaren Abstand ausbreitet. Die Multiplikation mit der interatomaren Bindungslänge  $d_a$  könnte also zielführend sein.

$$c_s = \omega d_a = \sqrt{\frac{k_{s,i}}{m_a}} d_a . \text{ Alternativ: } c_s = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1-\nu-\nu^2)}} \sim \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{k_{s,i}}{d_a}}{\frac{m_a}{d_a^3}}} = \sqrt{\frac{k_{s,i}}{m_a}} d_a .$$

Für Poisson-Zahl  $\nu \ll 1$

Diese Argumentation ist ein Beispiel für die „**Dimensionsanalyse**“, bei der wir sinnvolle Größen identifizieren und kombinieren, um einen Ausdruck für eine andere Größe von Interesse zu finden. Obwohl dies ein fruchtbares Verfahren sein kann, sollten wir nicht überrascht sein, falls wir feststellen, dass die Schallgeschwindigkeit tatsächlich durch  $c_s = 2\omega d_a$ , oder  $c_s = \omega d_a / \pi$  gegeben ist. Hinweis: Gilt für eine Longitudinalwelle.

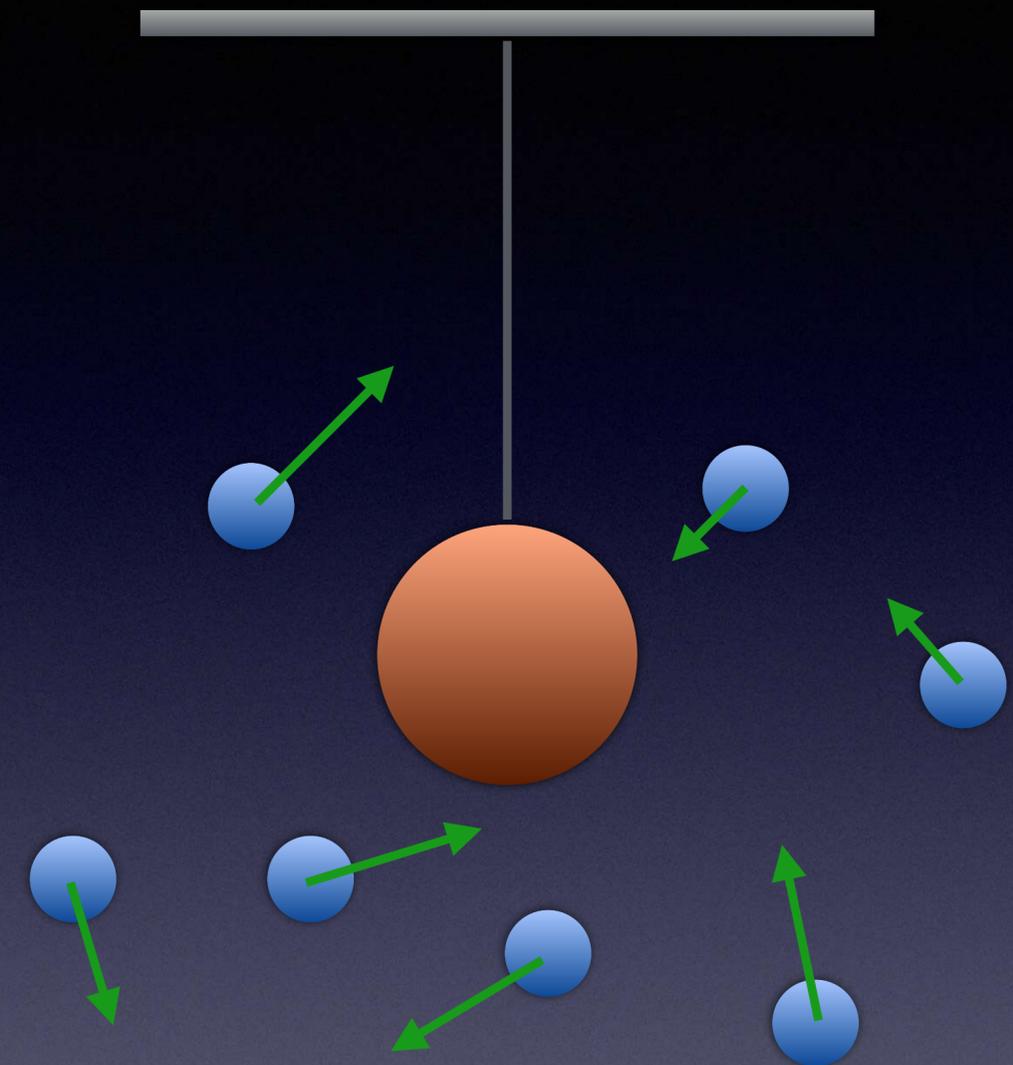
# Kontrollpunkt 8

1. Für ein bestimmtes Metall mit atomarer Masse  $m_a = 2 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , interatomarer Bindungslänge  $d_a = 2.1 \times 10^{-10} \text{ m}$  und Steifigkeit  $k_{s,i} = 40 \text{ N/m}$  soll die Schallgeschwindigkeit berechnet werden. (1) Wie groß ist sie für dieses Metall? (2) Welche der drei vorgenannten Größen hat den größten Einfluss auf  $c_s$ , z. B. bei einer Verdopplung des jeweiligen Wertes der Größe?

# Durch Gase\* verursachte Kontakt-Kräfte

(\* und Flüssigkeiten)

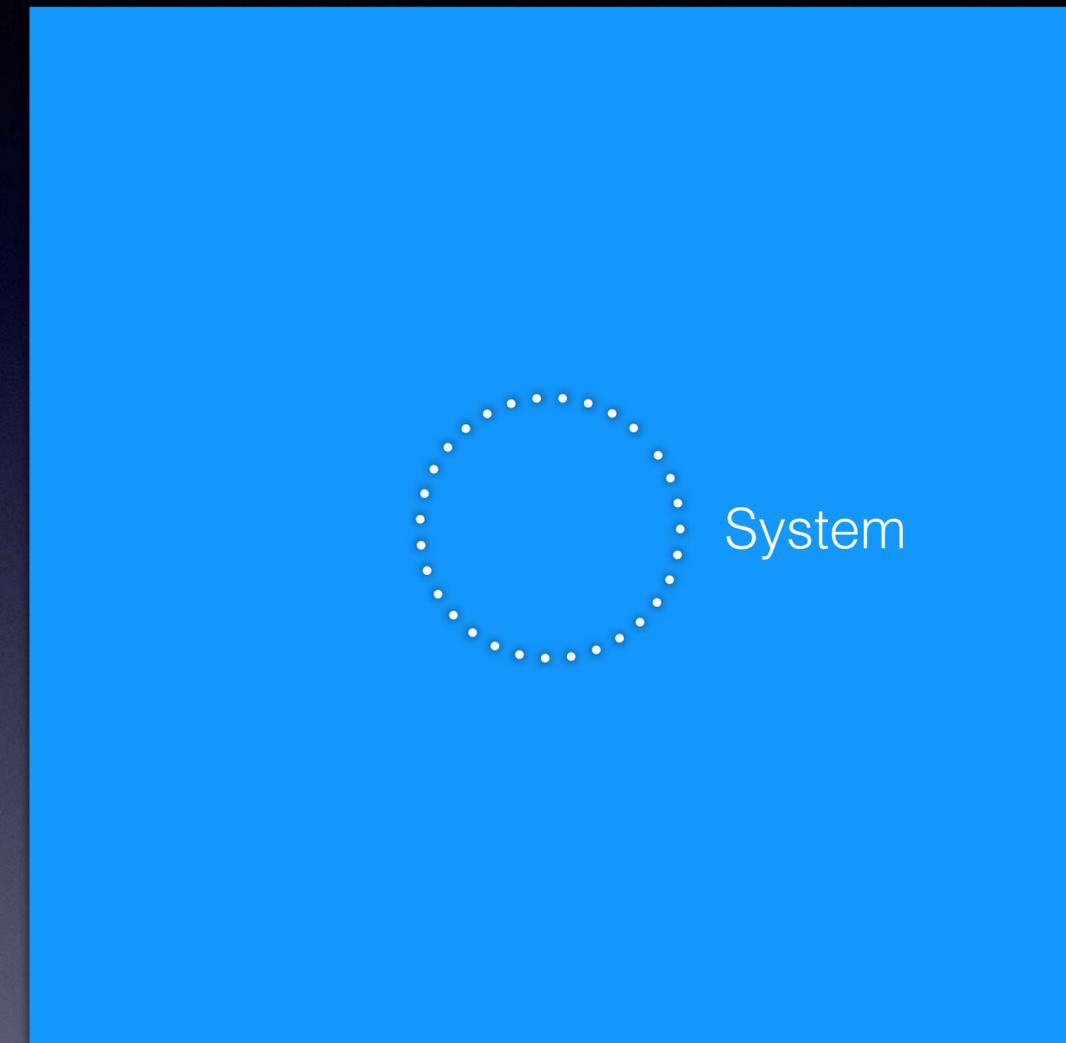
Bisher haben wir nur Kontaktkräfte von Festkörpern betrachtet. Aber auch Gase - oder Flüssigkeiten - können Kontaktkräfte ausüben. Im Alltag ist die bedeutendste davon die Kraft, die die Luft - oder Wasser - auf Objekte ausübt, sogar auf ruhende Objekte. Betrachte dazu die Umgebungsluft, die mit einem an einem Draht hängenden Ball in Kontakt ist (siehe nebenstehende Abbildung). Man könnte meinen, dass die Luft keinen Einfluss auf den Ball hat, zumal sich der Ball nicht bewegt, so dass wir uns keine Gedanken über den Luftwiderstand machen müssen. Um sicher zu gehen, sollten wir dieses Problem jedoch auf mikroskopischer Ebene betrachten.



In Bewegung befindliche Luftmoleküle in der Nähe eines hängenden Balls. Die Dichte der Luft unter dem Ball ist etwas größer als die Dichte der Luft über dem Ball, so dass die Luft eine kleine resultierende (Netto-) Kraft auf den Ball ausübt.

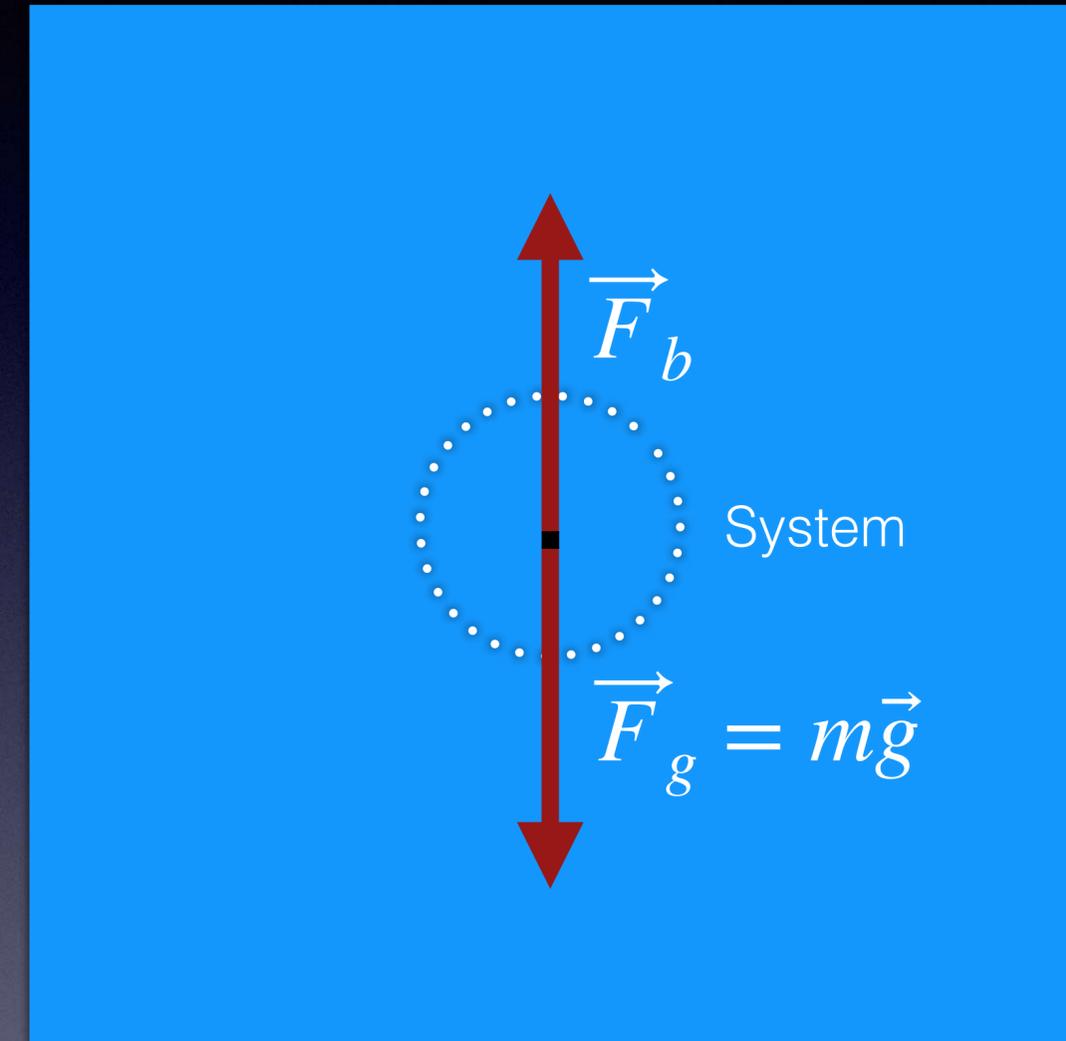
Die Moleküle in der Luft sind ständig in Bewegung und bewegen sich in beliebige Richtungen. So stoßen Moleküle häufig gegen den Ball, ändern dabei ihren Impuls und üben somit eine kleine Kraft auf den Ball aus. Wenn kein Wind weht, ist die Bewegung der Gasmoleküle zufällig, so dass in einer kurzen Zeitspanne etwa gleich viele Moleküle mit der rechten Seite des Balls zusammenstoßen wie mit der linken Seite. Somit sollte **im (zeitlichen) Durchschnitt keine seitliche Kraft** auf den Ball wirken. Bei Kollisionen mit der Ober- und Unterseite des Balls ist die Situation jedoch nicht ganz gleich. Die Richtungen der Geschwindigkeiten der Moleküle sind nach wie vor zufällig, aber unterhalb des Balls befinden sich mehr Luftmoleküle pro Kubikmeter als oberhalb des Balls, da die Dichte der Erdatmosphäre nach oben hin abnimmt. Daraus resultiert eine „**Auftriebskraft**“ auf den Ball, weil die **Anzahl der Luftmoleküle, die pro Sekunde auf die Unterseite des Balls treffen, etwas größer ist als die Anzahl der Moleküle, die pro Sekunde auf die Oberseite** des Balls treffen.

Wie lässt sich die Größe der Auftriebskraft bestimmen? Betrachten wir das Ganze aus einer makroskopischen Perspektive. Die folgenden Überlegungen, die sich auf das Prinzip Impuls stützen, lassen sich ebenso gut auf die Auftriebskraft anwenden, die von einem beliebigen Fluid (Luft, Wasser, etc.) auf einen Gegenstand ausgeübt wird. Das Ergebnis, das wir erhalten werden, heißt **Archimedisches Prinzip**, nach dem griechischen Denker, der es zuerst verstanden hat. Stelle dir dazu einen mit Luft (oder Wasser) gefüllten Kasten vor. Stelle dir außerdem einen kugelförmigen Bereich vor, den später eine massive Kugel einnehmen wird, der zunächst aber mit derselben Flüssigkeit gefüllt ist (siehe nebenstehende Abbildung). Wählen wir also diese kugelförmige Flüssigkeitsmasse als unser System und überlegen uns, welche Kräfte auf sie wirken müssen.



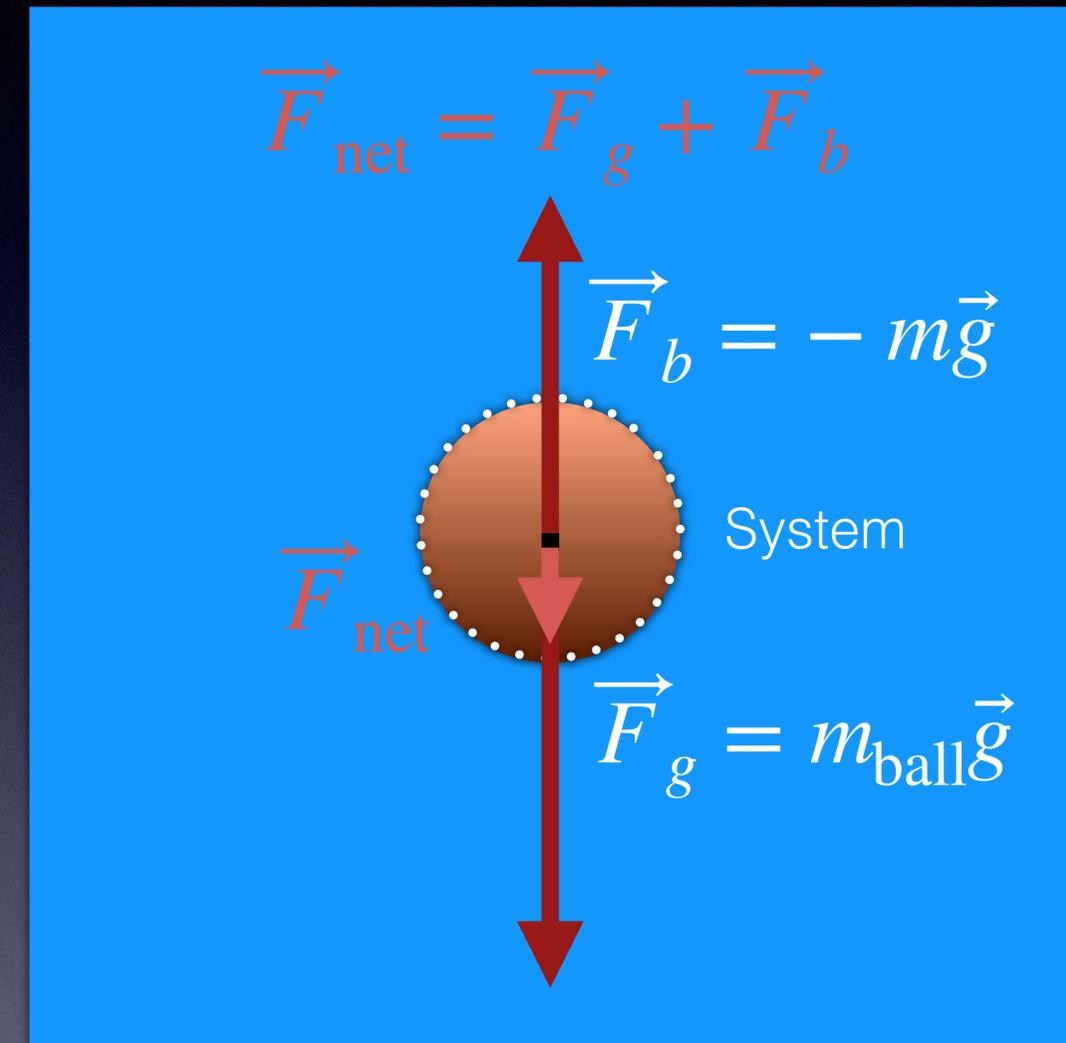
Ein System, das aus einem kugelförmigen Flüssigkeitsbereich besteht, der von demselben Fluid umgeben ist.

Der Impuls der skizzierten Flüssigkeitskugel ändert sich nicht. Die Erde übt eine nach unten gerichtete Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  auf sie aus, aber die Kugel sinkt nicht. Da sich der Impuls der Kugel nicht ändert, muss die Nettokraft auf die Kugel gleich Null sein, d. h. es muss eine nach oben gerichtete Kraft  $\vec{F}_b$  vorhanden sein, welche die Gravitationskraft ausgleicht. Das einzige Objekt, das mit dieser Kugel in Berührung kommt, ist der Rest der Flüssigkeit, so dass der Rest der Flüssigkeit eine nach oben gerichtete Kraft  $\vec{F}_b$  („**Auftriebskraft**“) ausübt, deren Größe gleich  $|m\vec{g}|$  ist, wobei  $m$  die Masse der eingeschlossenen Flüssigkeitskugel ist.



Kräfte, die auf die Flüssigkeitskugel wirken. Hier ist  $m$  die Masse der Flüssigkeit (Luft oder Wasser) innerhalb der Kugel.

Entfernen wir nun die Flüssigkeitskugel und ersetzen sie durch eine massive Kugel. Es ist klar, dass der Rest der verbleibenden Flüssigkeit zunächst immer noch die gleiche Kraft nach oben ausübt wie zuvor. Diese Kraft mag nicht groß genug sein, um der abwärts gerichteten Gravitationskraft auf die Kugel entgegenzuwirken; in diesem Fall (siehe nebenstehende Abbildung), würde sie anfangen, in Richtung der Nettokraft  $\vec{F}_{\text{net}}$  nach unten zu beschleunigen. Die nach oben gerichtete „**Auftriebskraft**“ ist aber lediglich eine Kontaktkraft, die durch das Auftreffen von Flüssigkeitsmolekülen auf Atome an der Oberfläche der Kugel entsteht. Interessant ist, dass trotz der Komplexität der interatomaren Wechselwirkungen der Nettoeffekt einfach eine nach oben gerichtete Kraft ist, deren Größe der Masse eines äquivalenten Volumens der Flüssigkeit mal  $|\vec{g}|$  entspricht.



Kräfte, die auf einen starren Körper wirken, der etwas schwerer als die ursprünglich dort vorhandene Flüssigkeit ist. In diesem Fall ist  $|\vec{F}_g| > |\vec{F}_b|$ .

Oft ist es sinnvoll, die Auftriebskraft  $\vec{F}_b$  in Luft zu vernachlässigen (in der Regel jedoch nicht im Wasser). Um zu sehen, warum das so ist, vergleichen wir die Auftriebskraft mit der Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  auf einen in der Luft hängenden Ball, wobei wir für das Volumen  $V$  des Balls schreiben:

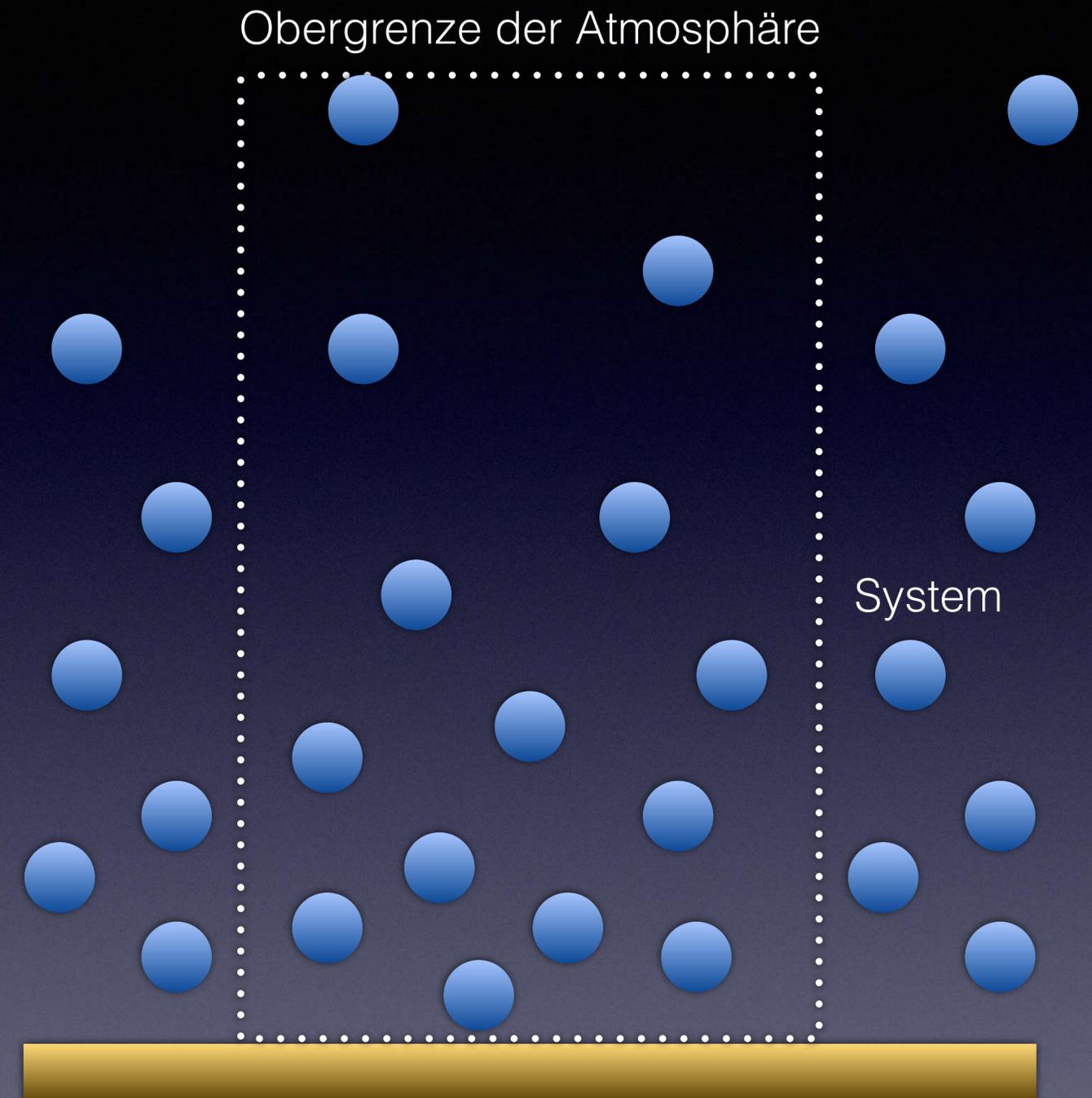
$$\frac{|\vec{F}_b|}{|\vec{F}_g|} = \frac{m_{\text{luft}} |\vec{g}|}{m_{\text{kugel}} |\vec{g}|} = \frac{m_{\text{luft}}}{m_{\text{kugel}}} = \frac{m_{\text{luft}}/V}{m_{\text{kugel}}/V} = \frac{\rho_{\text{luft}}}{\rho_{\text{kugel}}}$$

Die Auftriebskraft der Luft auf einen festen Gegenstand ist daher im Vergleich zur Gravitationskraft sehr gering. In vielen Fällen können wir sie daher getrost vernachlässigen ( $\rho_{\text{luft}}/\rho_{\text{kugel}} \sim 10^{-3}$  bis  $10^{-4}$ ).

# Kontrollpunkt 9

1. (1) Berechne die durch die Umgebungsluft (mit einer Dichte von etwa  $1.3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ) verursachte Auftriebskraft, die auf ein Kilogramm Eisen (mit einer Dichte von etwa  $8 \text{ g/cm}^3$ ) einwirkt? (2) Wie groß ist der prozentuale Fehler für die Nettokraft, falls die Auftriebskraft gegenüber der Gravitationskraft vernachlässigt wird?

Es gibt einen interessanten Fall, in dem die Wirkung der Luft sehr bedeutend ist und deshalb nicht vernachlässigt werden kann. Nehmen wir an, ein Gegenstand liegt auf einem Tisch und die Oberflächen des Tisches und des Gegenstandes sind so glatt, dass beim Zusammendrücken alle Luft zwischen den beiden Objekten herausgedrückt wird. Eine solche Situation tritt ein, wenn ein Saugnapf auf eine glatte Oberfläche gedrückt wird. Jetzt treffen keine Luftmoleküle mehr auf die Unterseite des Saugnapfes, während die Luftmoleküle weiterhin auf die Oberseite einwirken. Die **Kraft der Luft** auf der Oberseite ist ziemlich groß, etwa  $10^5 \text{ N}$  auf jedem Quadratmeter in Meereshöhe! Diese Kraft pro Flächeneinheit wird als „**Druck**“ der Luft, oder **Luftdruck** bezeichnet. Man kann sich den Druck so vorstellen, dass er auf das Gewicht einer ein Quadratmeter großen Säule der gesamten Atmosphäre zurückzuführen ist, die sich viele Kilometer nach oben erstreckt.



Eine Luftsäule, die sich durch die gesamte Atmosphäre nach oben erstreckt. Nicht maßstäbliche Darstellung.

Wenn die Atmosphäre eine konstante Dichte  $\rho$  wie in Oberflächennähe hätte (ca.  $1.3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ), könnte man die Höhe  $h$  der Atmosphäre auf folgende Weise berechnen: Das Volumen  $V$  einer Luftsäule mit der Höhe  $h$  und der Querschnittsfläche  $A$  ist

$$V = Ah, \text{ und ihre Masse ist } M = \rho Ah. \text{ Da der}$$

Massenschwerpunkt der Säule in Ruhe ist, besagt das Prinzip Impuls, dass **die nach oben gerichtete**

**Kraft des Bodens  $\vec{F}_N$  auf die Unterseite der Luftsäule entgegengesetzt gleich der nach unten gerichteten Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  für die gesamte Luftmasse der Säule sein muss.** Der Luftdruck  $p$

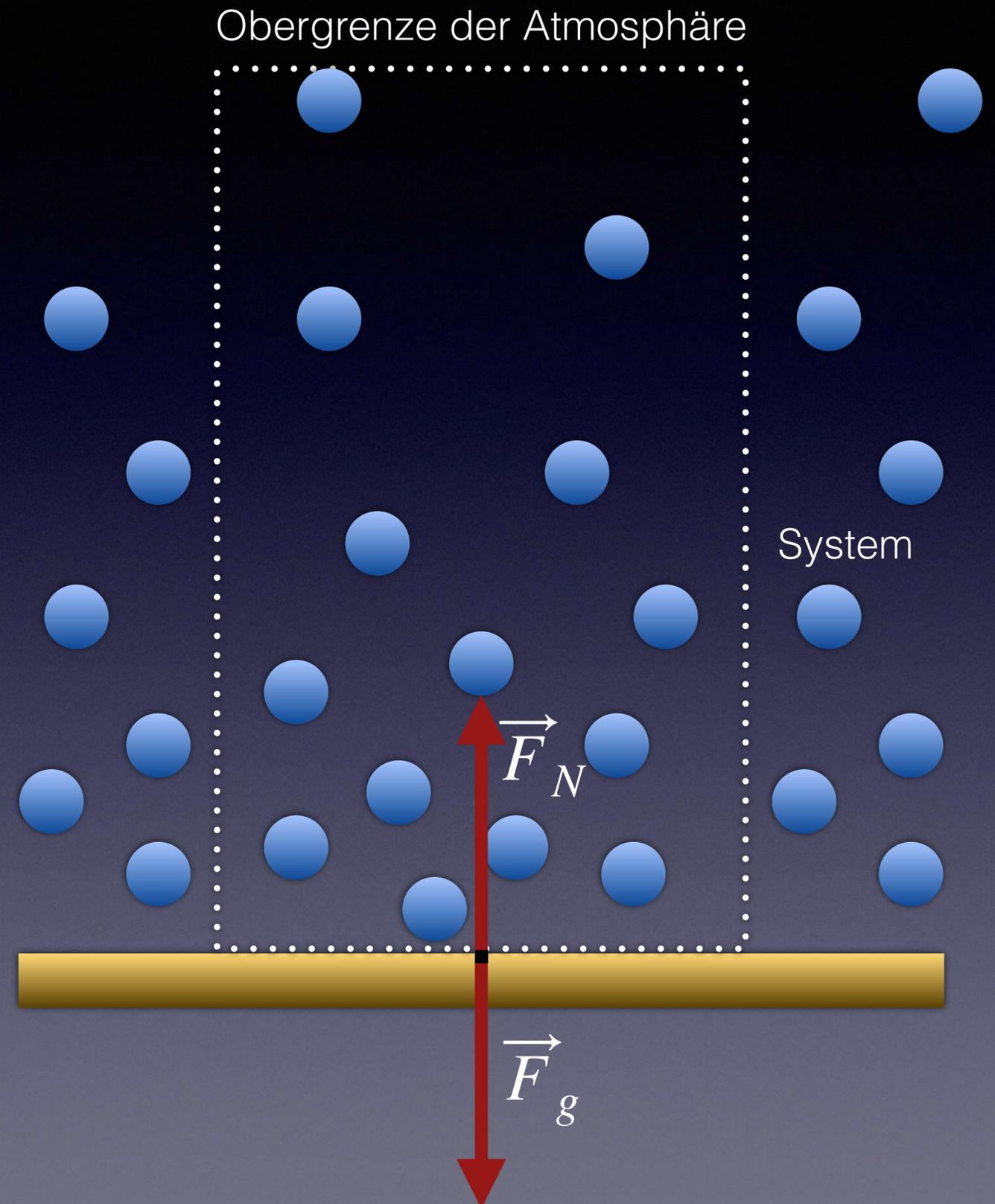
auf dem Boden ist also

$$p = \rho Ah |\vec{g}| / A = \rho |\vec{g}| h.$$

Dieses makroskopische Bild, bei dem die gesamte Luftsäule als System betrachtet wird, ist zwar nützlich, aber man darf nicht vergessen, dass die tatsächliche Kraft auf Luftmoleküle zurückzuführen

ist, die auf eine Fläche auftreffen. Die

Impulsänderung pro Sekunde entspricht dabei einer Kraft von ca.  $10^5 \text{ N}$  (je Quadratmeter).



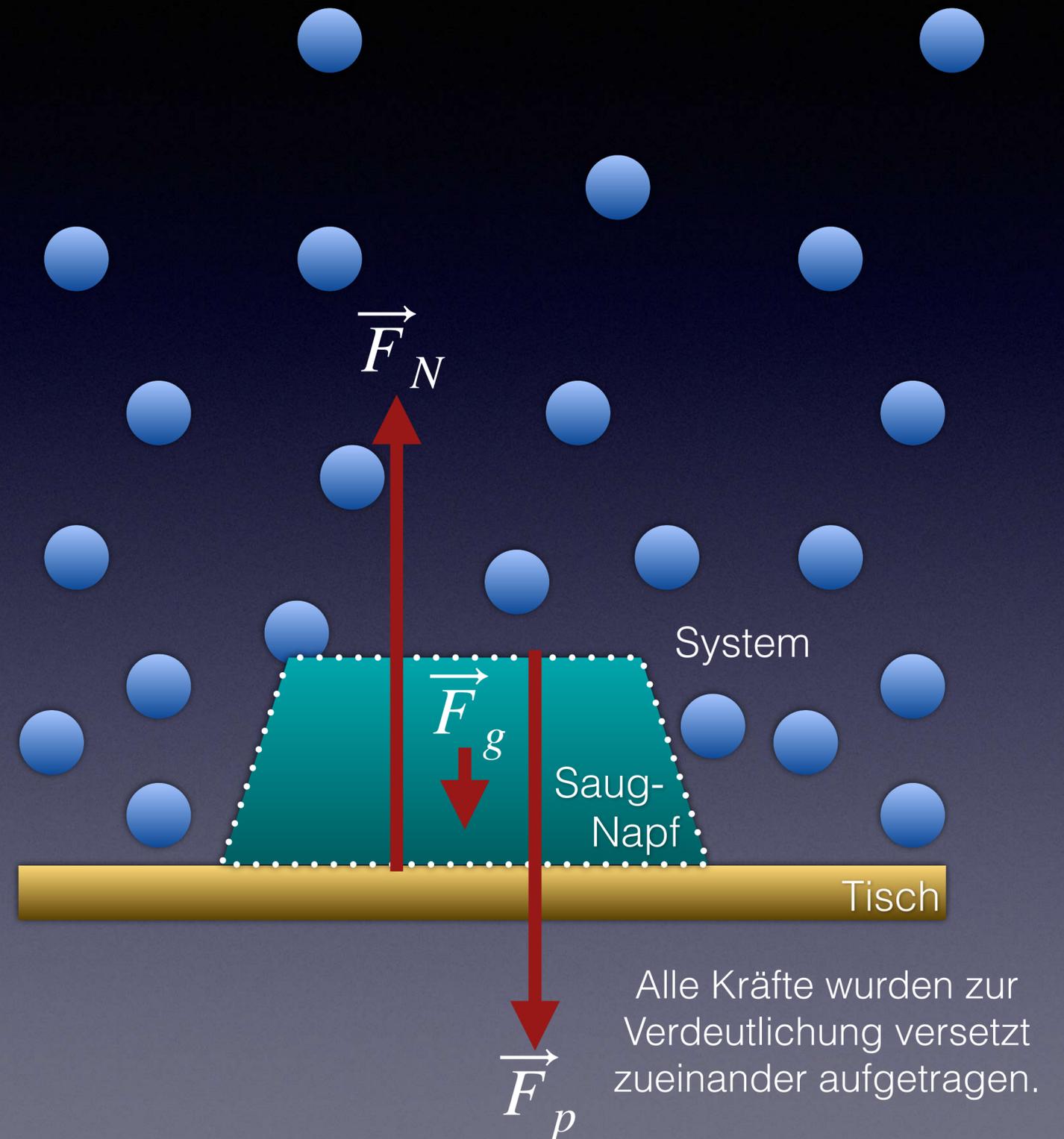
Die nebenstehende Grafik zeigt die Schnittkräfte für einen Saugnapf, wobei die Kraft aus dem Gewicht der Luft  $\vec{F}_p$  (Kraft aus Luftdruck) auf die Fläche der Oberseite des Saugnapfes wirkt. Die

Normalkraft  $\vec{F}_N$ , die vom Tisch nach oben ausgeübt wird, und die abwärts gerichtete Kraft  $\vec{F}_p$  aus dem Luftdruck sind im Vergleich zur Gravitationskraft  $\vec{F}_g$  des Saugnapfes sehr groß.

Da der Saugnapf ruht, können wir nach dem Prinzip Impuls schreiben:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{0}.$$

Jeder feste Gegenstand in der Luft, wie z. B. ein hängender Ball, ist durch den Luftdruck sehr großen Druckkräften ausgesetzt. Die nach oben gerichtete Auftriebskraft ist die winzige Differenz zwischen diesen großen Kräften. Im Wasser sind derartige Druckkräfte noch einmal um den Faktor 1000 größer als an Luft.



$$*F = ma?*$$

In anderen Studien hast du vielleicht eine **vereinfachte, näherungsweise** gültige **Form des Prinzips Impuls** gesehen, die in folgender Weise formuliert wird:

$$F = ma .$$

Diese Gleichung ist unter den folgenden Bedingungen gültig:

1. Es wirkt nur eine Kraft auf das System.
2. Die Bewegung erfolgt nur in einer Richtung.
3. Die Masse des Systems ist konstant.
4. Die Geschwindigkeit des Systems ist viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

Die Gleichung  $F = ma$  lässt sich aus der Ableitungsform  $d\vec{p}/dt$  des Impulsprinzips ableiten, wobei die Näherung für niedrige Geschwindigkeiten ( $|\vec{v}| \ll c$ ) verwendet wird:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für zeitlich konstante Masse erhalten wir schließlich

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \approx \vec{F}_{\text{net}} .$$

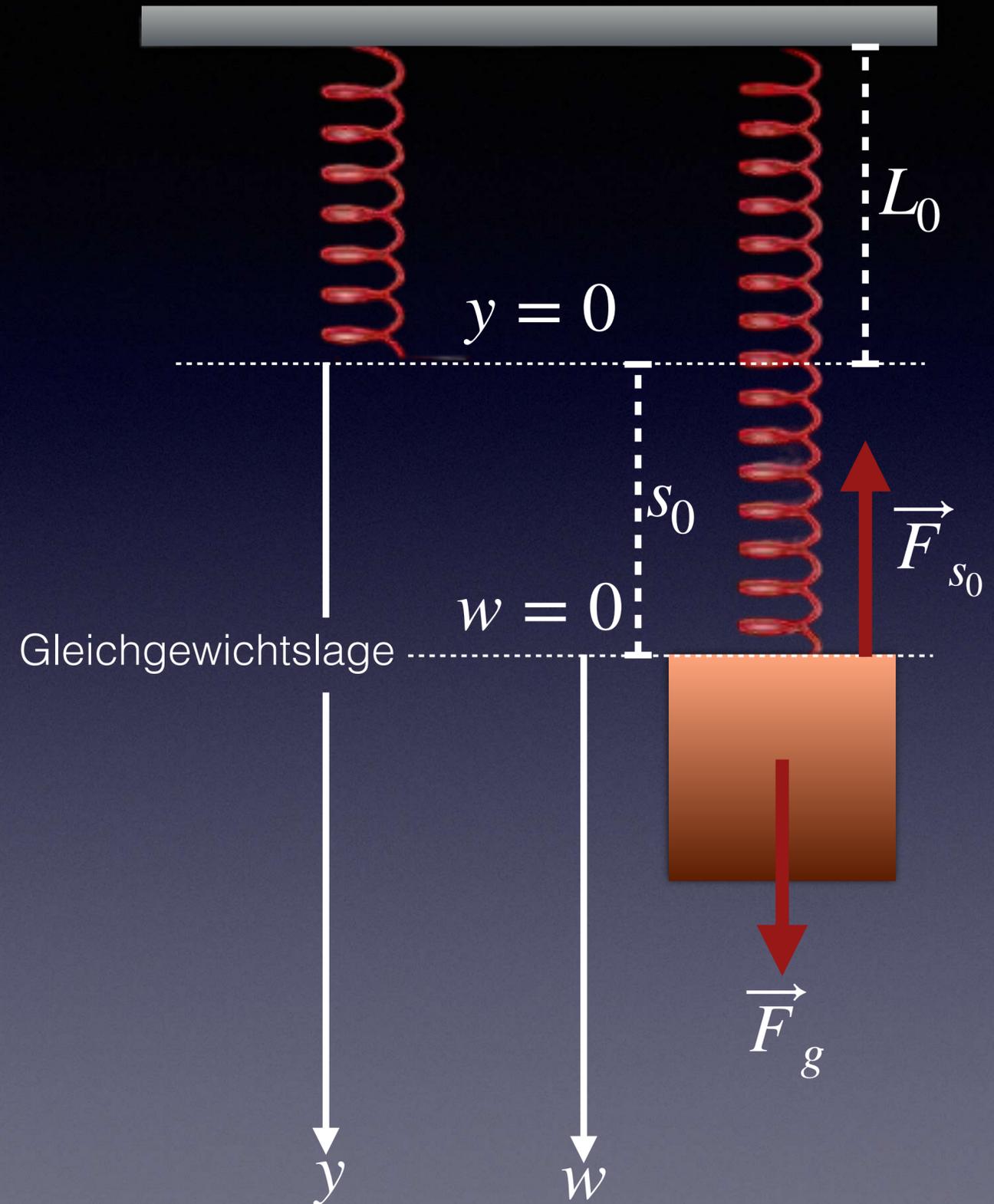
Im Allgemeinen ist die vollständige Form des Impulssatzes,  $d\vec{p}/dt = \vec{F}_{\text{net}}$ , für unsere Analysen besser geeignet. Vorteile:

- Relativistisch korrekt, denn wir haben es manchmal mit sich schnell bewegenden Teilchen zu tun.
- Beinhaltet die Erhaltungsgröße Impuls - und damit müssen wir arbeiten, wenn wir z. B. Kollisionen analysieren.
- Ist auch dann richtig, falls die Masse eines Objekts nicht konstant ist, wie z. B. bei einer Rakete auf Grund der nach hinten austretenden Abgase.
- Ist eine vektorielle Gleichung. Die Pfeile über den Symbolen sind äußerst wichtig: sie erinnern uns daran, dass es in Wirklichkeit drei separate Komponentengleichungen für die verschiedenen Raumrichtungen gibt.
- Erinnert uns daran, dass wir alle wirksamen Kräfte vektoriell addieren müssen, um die Nettokraft  $\vec{F}_{\text{net}}$  zu erhalten.

# Vertikal hängendes Masse-Feder-System

Um die Reibung zu verringern, ist es einfacher, mit einer Masse zu experimentieren, die an einer Feder vertikal auf und ab schwingt, als auf einem Lufttisch zu gleiten. Wir werden sehen, dass wir die gleiche Periode erhalten, unabhängig davon, ob die Feder vertikal oder horizontal montiert ist. Wir wählen ein Koordinatensystem, bei dem die positive  $y$ -Achse nach unten zeigt. Wir messen von der Stelle, an der sich das Ende der entspannten Feder befinden würde, nach unten (die entspannte Länge der Feder ist  $L_0$ ). Wir erhalten aus dem Prinzip Impuls:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_g + \vec{F}_s$$



Wenn wir uns dafür entscheiden, ausschließlich eine einfache vertikale Bewegung zu analysieren ( $p_x = p_z = 0$ ), so erhalten wir für die  $y$ -Komponente des Impuls folgende Gleichung:

$$\frac{dp_y}{dt} = -k_s y + mg .$$

Wir können die Gleichung auf eine uns schon bekannte Form reduzieren, falls wir eine neue Koordinate,  $w = y - s_0$ , einführen.  $w$  ist darin die auf die Gleichgewichtsposition bezogene Auslenkung. Damit erhalten wir

$$\frac{dp_y}{dt} = -k_s (w + s_0) + mg = -k_s w - k_s s_0 + mg = -k_s w .$$

Das bedeutet, dass die Gleichung für die Bewegung der Masse dieselbe ist wie bei einem horizontalen Masse-Feder-System, dessen Bewegung wir bereits kennen.

# Verallgemeinerte Lösung für das Masse-Feder-System

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Funktion

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

eine allgemeine Lösung für ein Masse-Feder-System mit beliebigen  $k_s$ ,  $m$  und Anfangsbedingungen ist. Darin ist  $\omega = \sqrt{k_s/m}$ . Die Amplitude  $A$  und die Phasenverschiebung  $\phi$  (in Rad) sind Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden, wie im Folgenden erläutert wird. Die Phasenverschiebung  $\phi$  modifiziert im Wesentlichen den Startpunkt (Abweichung aus der Gleichgewichtslage) der Schwingung.

Amplitude und Phasenverschiebung können aus den Anfangswerten von Position und Geschwindigkeit für  $t = t_0$  bestimmt werden:

$$x(t_0) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k_s}{m}} t_0 + \phi \right), \text{ und}$$

$$v(t_0) = -A \sqrt{\frac{k_s}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k_s}{m}} t_0 + \phi \right).$$

Mit Hilfe der Identität  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  erhalten wir die Amplitude  $A$

$$\frac{x^2(t_0)}{A^2} + \frac{mv^2(t_0)}{k_s A^2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{x^2(t_0) + \frac{mv^2(t_0)}{k_s}}.$$

Die Phasenverschiebung  $\phi$  erhalten wird durch Einsetzen oder über

$$\frac{v(t_0)}{x(t_0)} = -\sqrt{\frac{k_s}{m}} \tan \left( \sqrt{\frac{k_s}{m}} t_0 + \phi \right) \rightarrow \phi = \arctan \left( -\frac{v(t_0)}{x(t_0)} \sqrt{\frac{m}{k_s}} \right) - \sqrt{\frac{k_s}{m}} t_0.$$

# Kontrollpunkt 10

1. Angenommen, ein zu Schwingungen fähiges Masse-Feder-System mit Steifigkeit  $k_s$  und Masse  $m$  befinde sich im Ruhezustand. Du schlägst es mit einem Hammer an, wobei du für eine sehr kurze Zeit  $\Delta t$  eine große  $\vec{F}$  Kraft anwendest. (1) Wie hoch ist die Anfangsgeschwindigkeit? (2) Wie groß ist die Amplitude (die maximale Auslenkung aus der Gleichgewichtslage)? (3) Welchen Wert hat die Phasenverschiebung?

Beachte, dass **zwei Konstanten** erforderlich sind, unabhängig davon, ob wir die **Startbedingungen** in Form von  $x(t_0)$  und  $v(t_0)$  oder in Form von Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\phi$  angeben. Warum zwei Konstanten erforderlich sind, wird deutlich, wenn man sich den Beginn einer numerischen Integration ansieht. Eine solche Berechnung benötigt eine Anfangsposition  $\vec{r}_0$ , um die Anfangskraft und den anfänglichen Kraftstoß berechnen zu können, mit dessen Ergebnis der ebenfalls vorzugebende Anfangsimpuls  $\vec{p}_0$  aktualisiert wird, aus dem sich dann die neue Geschwindigkeit sowie die neue Position ergibt. Danach geht es iterativ in jedem Zeitschritt ohne weitere Vorgabewerte weiter.

Bei dem Masse-Feder-System haben wir mit einer „**Differentialgleichung zweiter Ordnung**“ gearbeitet. Das heißt, die höchste Ableitung in der Gleichung ist eine zweite Ableitung - in diesem Fall die Beschleunigung  $d^2\vec{r}/dt^2$ . Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sind normalerweise zwei Konstanten erforderlich, um die Ausgangsbedingungen vollständig anzugeben.

Wir haben gesehen, dass die Verdoppelung der Amplitude eines Masse-Feder-Systems die Lösung (Auslenkung, Geschwindigkeit) einfach um den Faktor zwei vervielfacht, ohne die Zeitabhängigkeit der Bewegung zu verändern. Dies ist eine äußerst wichtige Eigenschaft von Systemen, die durch **lineare Differentialgleichungen** beschrieben werden (Gleichungen, in denen die Variablen nur in der ersten Potenz erscheinen, nicht im Quadrat, zum Beispiel). Formaler ausgedrückt: In der auf dem Prinzip Impuls fußenden Gleichung für ein Masse-Feder-System ist die Größe  $x$  durch die Größe  $Rx$  zu ersetzen, wobei  $R$  eine Konstante ist. Für konstante Masse und kleine Geschwindigkeiten erhalten wir

$$m \frac{d^2(Rx)}{dt^2} = -k_s(Rx) \rightarrow Rm \frac{d^2x}{dt^2} = -Rk_s x \equiv \left[ m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_s x \right].$$

Die  $R$ 's fallen aus der Gleichung heraus, so dass wir wieder die ursprüngliche Gleichung erhalten. Wenn man also mit einer anderen Anfangsdehnung beginnt, wird die  $x$ -Achse des Diagramms einfach mit  $R$  skaliert.

Betrachten wir dagegen eine Differentialgleichung für ein Masse-Feder-System mit nicht-linearer Federkraft  $\sim k_s x^3$ , und skalieren diese, wie zuvor, erneut mit  $R$ , so folgt

$$m \frac{d^2(Rx)}{dt^2} = -k_s (Rx)^3 \rightarrow Rm \frac{d^2x}{dt^2} = -R^3 k_s x^3 .$$

In diesem Fall fallen die  $R$ 's nicht aus der Gleichung heraus, d.h. die Lösung für die mit  $R$  multiplizierte Gleichung können wir nicht durch Skalierung der Lösung der ursprünglichen Gleichung mit  $R$  erhalten. Die Lösungen dieser **nicht-linearen Differentialgleichung** skalieren also nicht auf die einfache Art und Weise, wie es die Lösungen einer linearen Differentialgleichung tun.

Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

1	<h2>Legende</h2> <p><b>Symbol</b>  schwarz = Feststoff  blau = Flüssigkeit  rot = Gas  grau = unbekannt  <u>unterstrichen</u> = radioaktiv</p> <p><b>Dichte</b>  rot = kg / m<sup>3</sup>  schwarz = kg / dm<sup>3</sup>  grau = unbestimmt</p> <p><b>Serie (Flächenfarbe)</b>  Alkalimetalle (rot)  Erdalkalimetalle (rosa)  Übergangsmetalle (hellblau)  Lanthanoide (orange)  Actinoide (dunkelorange)  Metalle (grau)  Halbmetalle (hellgrün)  Nichtmetalle (hellblau)  Halogene (gelb)  Edelgase (hellblau)  unbekannt (weiß)</p> <p><b>Schraffur</b>  durchgehend = natürliches Element  schraffiert = künstliches Element</p>																18		
1	1, 1,008 <b>H</b> Wasserstoff 2,2 0,09	2																	18
2	3 6,94 <b>Li</b> Lithium 0,98 0,53	4 9,0122 <b>Be</b> Beryllium 1,57 1,85																	10 20,180 <b>Ne</b> Neon — 0,90
3	11 22,990 <b>Na</b> Natrium 0,93 0,97	12 24,305 <b>Mg</b> Magnesium 1,31 1,74																	18 39,948 <b>Ar</b> Argon — 1,78
4	19 39,098 <b>K</b> Kalium 0,82 0,86	20 40,078 <b>Ca</b> Calcium 1,0 1,55	21 44,956 <b>Sc</b> Scandium 1,36 2,98	22 47,867 <b>Ti</b> Titan 1,54 4,50	23 50,942 <b>V</b> Vanadium 1,63 6,11	24 51,996 <b>Cr</b> Chrom 1,66 7,14	25 54,938 <b>Mn</b> Mangan 1,55 7,43	26 55,845 <b>Fe</b> Eisen 1,83 7,87	27 58,933 <b>Co</b> Cobalt 1,88 8,90	28 58,693 <b>Ni</b> Nickel 1,91 8,91	29 63,546 <b>Cu</b> Kupfer 1,90 8,92	30 65,380 <b>Zn</b> Zink 1,65 7,14	31 69,723 <b>Ga</b> Gallium 1,81 5,90	32 72,630 <b>Ge</b> Germanium 2,01 5,32	33 74,922 <b>As</b> Arsen 2,18 5,73	34 78,971 <b>Se</b> Selen 2,55 4,82	35 79,904 <b>Br</b> Brom 2,96 3,12	36 83,798 <b>Kr</b> Krypton 3,0 3,75	
5	37 85,468 <b>Rb</b> Rubidium 0,82 1,53	38 87,62 <b>Sr</b> Strontium 0,95 2,63	39 88,906 <b>Y</b> Yttrium 1,22 4,47	58–71 siehe unten	40 91,224 <b>Zr</b> Zirkonium 1,33 6,50	41 92,906 <b>Nb</b> Niob 1,6 8,57	42 95,95 <b>Mo</b> Molybdän 2,16 10,28	43 96,906 <b>Tc</b> Technetium 1,9 11,50	44 101,07 <b>Ru</b> Ruthenium 2,2 12,37	45 102,91 <b>Rh</b> Rhodium 2,28 12,45	46 106,42 <b>Pd</b> Palladium 2,20 12,02	47 107,87 <b>Ag</b> Silber 1,93 10,49	48 112,41 <b>Cd</b> Cadmium 1,69 8,64	49 114,82 <b>In</b> Indium 1,78 7,31	50 118,71 <b>Sn</b> Zinn 1,96 7,26	51 121,76 <b>Sb</b> Antimon 2,05 6,70	52 127,60 <b>Te</b> Tellur 2,1 6,25	53 126,90 <b>I</b> Iod 2,66 4,94	54 131,29 <b>Xe</b> Xenon 2,6 5,90
6	55 132,91 <b>Cs</b> Caesium 0,79 1,90	56 137,33 <b>Ba</b> Barium 0,89 3,59	57 138,91 <b>La</b> Lanthan 1,10 6,15	58–71 siehe unten	72 178,49 <b>Hf</b> Hafnium 1,3 13,3	73 180,95 <b>Ta</b> Tantal 1,5 16,65	74 183,84 <b>W</b> Wolfram 2,36 19,25	75 186,21 <b>Re</b> Rhenium 1,9 21,0	76 190,23 <b>Os</b> Osmium 2,2 22,6	77 192,22 <b>Ir</b> Iridium 2,2 22,56	78 195,08 <b>Pt</b> Platin 2,28 21,45	79 196,97 <b>Au</b> Gold 2,54 19,32	80 200,59 <b>Hg</b> Quecksilber 2,0 13,55	81 204,38 <b>Tl</b> Thallium 1,62 11,85	82 207,20 <b>Pb</b> Blei 2,33 11,35	83 208,98 <b>Bi</b> Bismut 2,02 9,75	84 209,98 <b>Po</b> Polonium 2,0 9,20	85 209,99 <b>At</b> Astat 2,2 ?	86 222,02 <b>Rn</b> Radon — 9,73
7	87 223,03 <b>Fr</b> Francium 0,7 ?	88 226,03 <b>Ra</b> Radium 0,9 5,5	89 227,03 <b>Ac</b> Actinium 1,1 10,1	90–103 siehe unten	104 267,12 <b>Rf</b> Rutherfordium ? ?	105 270,13 <b>Db</b> Dubnium ? ?	106 269,13 <b>Sg</b> Seaborgium ? ?	107 270,13 <b>Bh</b> Bohrium ? ?	108 269,13 <b>Hs</b> Hassium ? ?	109 278,16 <b>Mt</b> Meitnerium ? ?	110 281,17 <b>Ds</b> Darmstadtium ? ?	111 281,17 <b>Rg</b> Roentgenium ? ?	112 285,18 <b>Cn</b> Copernicium ? ?	113 286,18 <b>Nh</b> Nihonium ? ?	114 289,19 <b>Fl</b> Flerovium ? ?	115 289,20 <b>Mc</b> Moscovium ? ?	116 293,20 <b>Lv</b> Livermorium ? ?	117 293,21 <b>Ts</b> Tenness ? ?	118 294,21 <b>Og</b> Oganesson ? ?

Quelle der Grafik auf dieser Seite: <https://de.wikipedia.org/wiki/Periodensystem>.

Lanthanoide	58 140,12 <b>Ce</b> Cer 1,12 6,77	59 140,91 <b>Pr</b> Praseodym 1,13 6,48	60 144,24 <b>Nd</b> Neodym 1,14 7,01	61 144,91 <b>Pm</b> Promethium — 7,22	62 150,36 <b>Sm</b> Samarium 1,17 7,54	63 151,96 <b>Eu</b> Europium — 5,25	64 157,25 <b>Gd</b> Gadolinium 1,2 7,89	65 158,93 <b>Tb</b> Terbium — 8,25	66 162,50 <b>Dy</b> Dysprosium 1,22 8,55	67 164,93 <b>Ho</b> Holmium 1,23 8,78	68 167,26 <b>Er</b> Erbium 1,24 9,05	69 168,93 <b>Tm</b> Thulium 1,25 9,32	70 173,05 <b>Yb</b> Ytterbium — 6,97	71 174,97 <b>Lu</b> Lutetium 1,27 9,84
Actinoide	90 232,04 <b>Th</b> Thorium 1,3 11,72	91 231,04 <b>Pa</b> Protactinium 1,5 15,4	92 238,03 <b>U</b> Uran 1,38 18,95	93 237,05 <b>Np</b> Neptunium 1,36 20,45	94 244,06 <b>Pu</b> Plutonium 1,28 19,82	95 243,06 <b>Am</b> Americium 1,3 13,67	96 247,07 <b>Cm</b> Curium 1,3 13,51	97 247,07 <b>Bk</b> Berkelium 1,3 14,78	98 251,08 <b>Cf</b> Californium 1,3 15,1	99 252,08 <b>Es</b> Einsteinium 1,3 ?	100 257,10 <b>Fm</b> Fermium 1,3 ?	101 258,10 <b>Md</b> Mendelevium 1,3 ?	102 259,10 <b>No</b> Nobelium 1,3 ?	103 262,11 <b>Lr</b> Lawrencium — ?

- K1.1: (1) Aluminium,  $d_a \approx 2.55 \times 10^{-10}$  m; (2) Blei,  $d_a \approx 3.11 \times 10^{-10}$  m.
- K2.1:  $k_{s,i} = 800$  N/m.
- K2.2:  $k_{s,i} = 300$  N/m.
- K3.1:  $\Delta L = 0.167$  mm.
- K4.1: (1)  $\epsilon \approx 2.35 \times 10^{-2}$ ; (2)  $\sigma = 1.225 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>; (3)  $E \approx 5.21 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>.

- K5.1: (1) Holzklotz bewegt sich nicht; (2)  $|\vec{F}_f| = 60 \text{ N}$ ; (3) Holzklotz wird beschleunigt; (4)  $|\vec{F}_f| = 80 \text{ N}$ .
- K6.1: (1)  $\vec{F}_{\text{net}} = \langle 0, 0, 4 \rangle \text{ N}$ ; (2)  $d\vec{p}/dt$  sagt nichts über Betrag und Richtung von  $\vec{p}$  aus.
- K7.1: Ja, denn die (konstante) Gravitationskraft wird durch eine (konstante) Dehnung der Feder kompensiert.
- K7.2: (1)  $k_s \approx 58.86 \text{ N/m}$ ; (2)  $T \approx 0.47 \text{ s}$ ; (3) Die Periode der Schwingung verlängert sich um den Faktor  $\sqrt{2}$ .

- K8.1:  $c_s \approx 2670 \text{ m/s}$ ; (2)  $d_a$  hat den größten Einfluss, da  $c_s$  linear mit dieser Größe skaliert.
- K9.1: (1)  $\left| \vec{F}_b \right| \approx 1.59 \times 10^{-3} \text{ N}$ ; (2) Fehler  $\approx 1.6 \times 10^{-2} \%$ .
- K10.1: (1)  $v_{\max} = F\Delta t/m$ ; (2)  $A = v_{\max} \sqrt{m/k_s}$ ; (3)  $\phi = \pm \pi/2$ .

# Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 5 - Bestimmung von Kräften aus einem Bewegungsablauf