

# Moderne Mechanik

Teil 3

Die fundamentalen Wechselwirkungen (en: *fundamental interactions*)

# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- die 3D-Gravitations- oder elektrische Kraft, die von Objekten in der Umgebung auf ein System ausgeübt wird, zu berechnen,
- eine iterative Berechnung der Bewegung eines Objekts, das gravitativ oder elektrisch mit seiner Umgebung interagiert, per Hand oder mit einem Computer durchzuführen, und
- eine Analyse einfacher Kollisionen durch Anwendung des Prinzips Impuls auf ein System mit mehr als einem Teilchen anzuwenden.

# Übersicht

- Die fundamentalen Wechselwirkungen
- Die Gravitationskraft
- Die Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche
- Einige Eigenschaften des Gravitationsfeldes
- Das Reziprozitätsprinzip
- Berücksichtigung der Gravitationskraft in numerischen Modellen
- Die elektrische Kraft
- Die starke Wechselwirkung
- Die schwache Wechselwirkung
- Die Impulserhaltung
- Kollisionen: vernachlässigbare externe Kräfte
- Newton und Einstein
- Vorhersage der Zukunft komplexer Systeme
- Determinismus
- Punkte und Kugeln
- Messung der Gravitationskonstanten
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

# Die fundamentalen Wechselwirkungen

In der Welt sehen wir scheinbar viele verschiedene Arten von Wechselwirkungen. Planeten umkreisen Sterne. Ein fallendes Blatt wirbelt im Wind. Ein Metallstab wird gebogen. Kohlenstoff und Sauerstoff reagieren und bilden Kohlendioxid. In einem Kernkraftwerk spalten sich Urankerne und bringen Wasser zum Kochen, das wiederum Stromgeneratoren antreibt. Trotz der Vielfalt der von uns beobachteten Effekte wurde im 20. Jahrhundert klar, dass alle Veränderungen, die wir beobachten, auf nur **vier verschiedene Arten grundlegender Wechselwirkungen** zurückzuführen sind: die (1) **Gravitationswechselwirkung**, die (2) **elektromagnetische Wechselwirkung**, (3) die „**starke Wechselwirkung**“ (auch als „starke Kernkraft“ bezeichnet) und (4) die „**schwache Wechselwirkung**“ (auch als „schwache Kernkraft“) bezeichnet.

Die **Gravitationswechselwirkung** ist verantwortlich für die Anziehung zwischen massereichen Objekten. Zum Beispiel übt die Erde eine Anziehungskraft auf den Mond aus, und der Mond übt eine Anziehungskraft auf die Erde aus.

Die **elektromagnetische Wechselwirkung** ist verantwortlich für die Anziehung oder Abstoßung zwischen Objekten, die eine elektrische Ladung besitzen. Elektrische Kräfte binden Protonen und Elektronen in Atomen aneinander und sind für die chemischen Bindungen zwischen Atomen in Molekülen verantwortlich.

Die **starke Wechselwirkung** tritt zwischen Objekten auf, die aus Quarks bestehen, wie z. B. Protonen und Neutronen, die im Kern eines Atoms trotz der großen gegenseitigen elektrischen Abstoßung der Protonen zusammengehalten werden.

Die **schwache Wechselwirkung** betrifft alle Arten von Elementarteilchen, ist aber viel schwächer als die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung. Entfernt man z. B. ein Neutron aus einem Kern, so zerfällt es im Mittel nach 15 Minuten in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino.

Obwohl es immer noch sinnvoll ist, die Wechselwirkungen in vier Typen zu unterteilen, wurde in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entdeckt, dass die elektromagnetische Wechselwirkung und die schwache Wechselwirkung als verschiedene Erscheinungsformen eines einzigen Typs von Wechselwirkung betrachtet werden können, der heute als „**elektroschwache Wechselwirkung**“ bezeichnet wird. Durch diese Entdeckung wurde es möglich, die starke und die elektroschwache Wechselwirkung in einer Theorie, dem „**Standardmodell**“, zu vereinen, die auch die Natur subatomarer Teilchen wie des Protons und des Neutrons erklärt. Damit scheint es nur noch **zwei grundlegende Kategorien von Wechselwirkungen** zu geben: diejenigen, die durch das (1) **Standardmodell** erklärt werden, und diejenigen, die durch die (2) **Gravitationswechselwirkung** erklärt werden. Der Versuch einer Vereinigung dieser beiden verbliebenen Wechselwirkungen in einer Theorie zählt zu den wichtigsten wissenschaftlichen Aufgaben der Gegenwart.

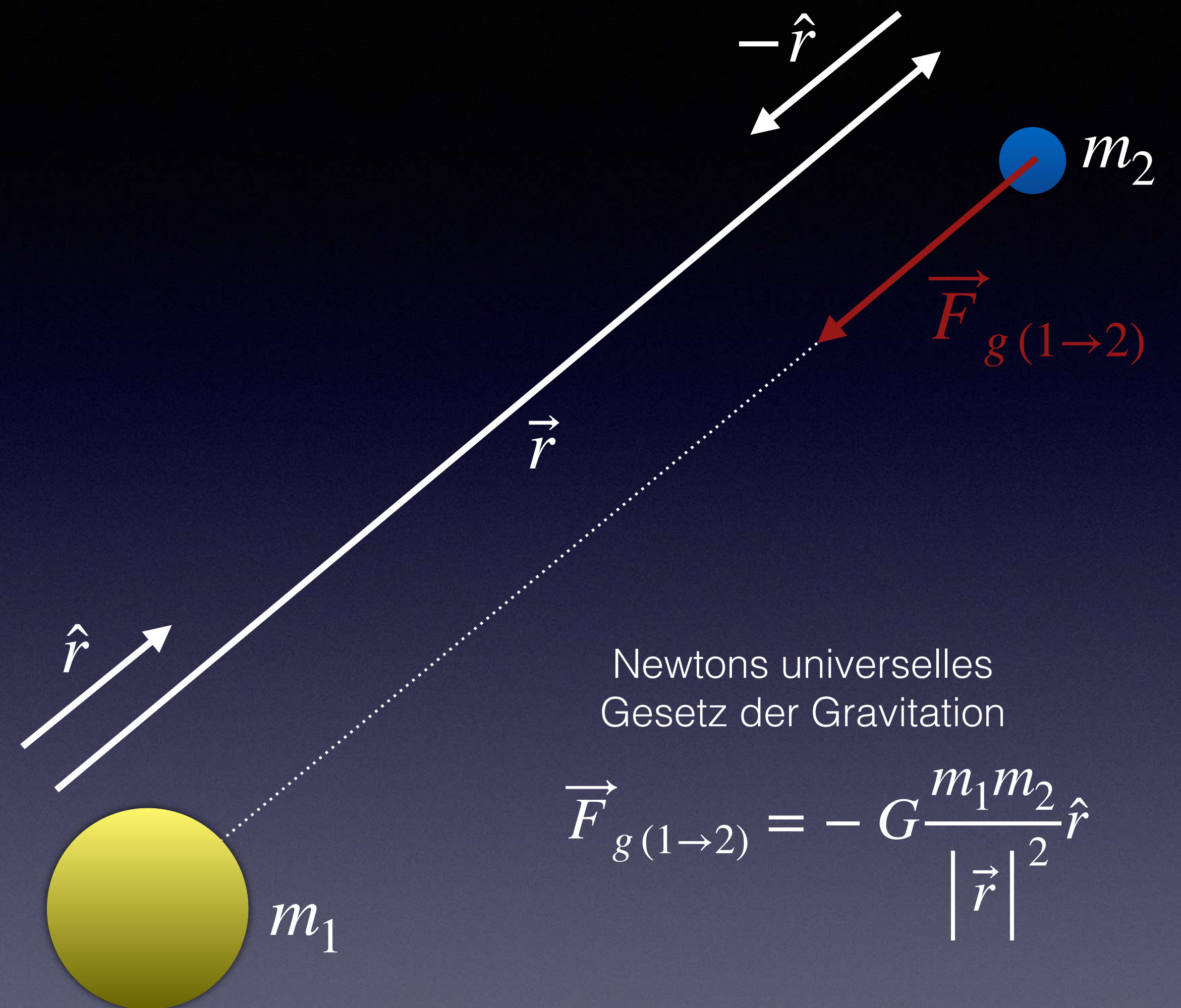
# Die Gravitationskraft



Die Bewegung von Sternen und Planeten ist in vielerlei Hinsicht einfacher als andere mechanische Phänomene, da es (praktisch) keine Reibung gibt, über die man sich Gedanken machen müsste. Diese massiven Objekte wechselwirken durch die **Gravitationskraft**, die immer eine **anziehende Kraft** ist. Die Untersuchung der Vorhersage der **Bewegung von Sternen und Planeten** ist eine der direktesten Möglichkeiten zu verstehen, wie das **Prinzip Impuls** das Verhalten von Objekten in der realen Welt bestimmt. Die grundlegenden Ideen, die zur Vorhersage der Bewegung von Sternen und Planeten verwendet werden, lassen sich darüber hinaus auf eine Vielzahl von Alltags- und atomaren Phänomenen anwenden.

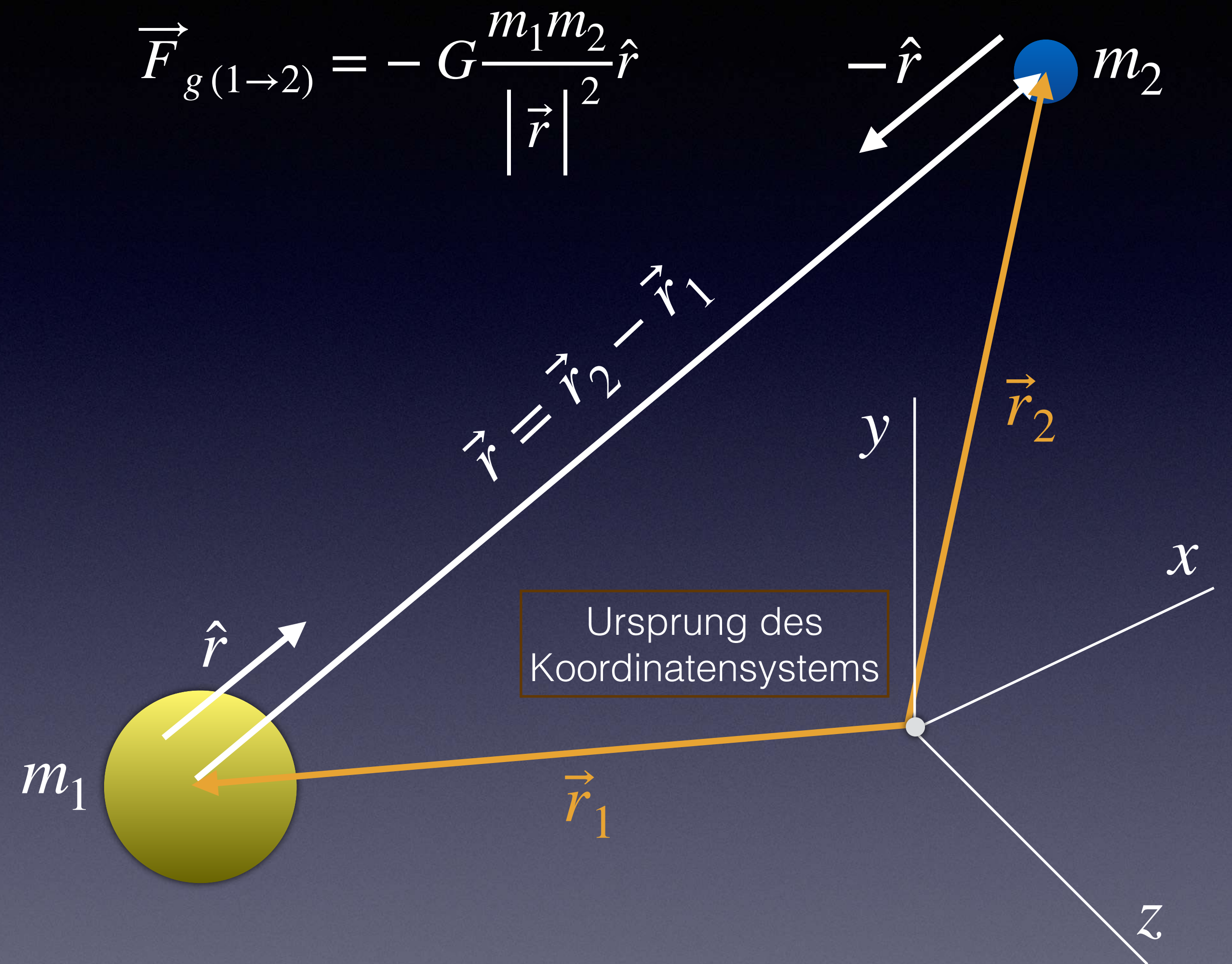
Im 17. Jahrhundert leitete Isaac Newton ab, dass es eine Anziehungskraft geben muss, die mit einer Gravitationswechselwirkung zwischen einem beliebigen Paar von massiven Objekten verbunden ist. Die **Gravitationskraft**  $\vec{F}_g$  wirkt entlang einer **Verbindungsline** zwischen den beiden Objekten, ist **proportional zur Masse** des einen Objekts und zur Masse des anderen Objekts, und **umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands** zwischen den Mittelpunkten (Schwerpunkten) der beiden Objekte (siehe hierzu die nebenstehende Grafik und Vektor-Gleichung). Die Konstante  $G$  ist gegeben durch:

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

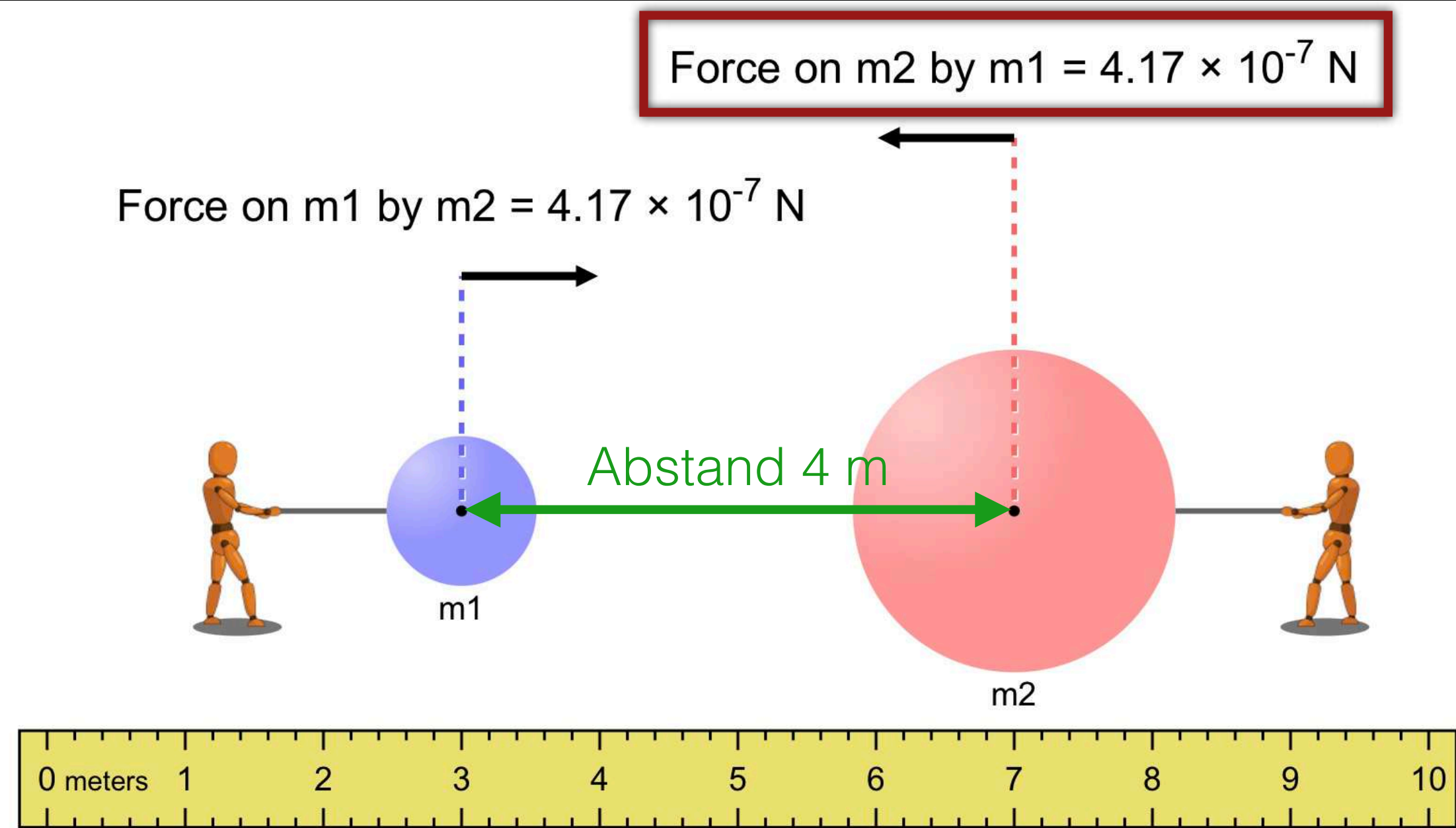


Die Gravitationskraft  $\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)}$ , die von Objekt 1 auf Objekt 2 ausgeübt wird. Relativer Positionsvektor  $\vec{r}$  und Einheitsvektoren  $\hat{r}$  und  $-\hat{r}$  wurden zur Verdeutlichung versetzt eingezeichnet.

Der **relative Positionsvektor**  $\vec{r}$  erstreckt sich **vom Zentrum des Objekts 1 zum Zentrum des Objekts 2** - siehe nebenstehende Abbildung. Dieser Vektor könnte auch als  $\vec{r}_{1 \rightarrow 2}$  geschrieben werden. Der Einheitsvektor  $\hat{r}$  zeigt in dieselbe Richtung wie  $\vec{r}$ , hat aber einen Betrag von 1. Der Betrag von  $|\vec{r}|$  ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten (Schwerpunkten) der beiden Objekte. Die **Richtung der Gravitationskraft**  $\vec{F}_g$  ist **entgegengesetzt zur Richtung des Einheitsvektors  $\hat{r}$** .

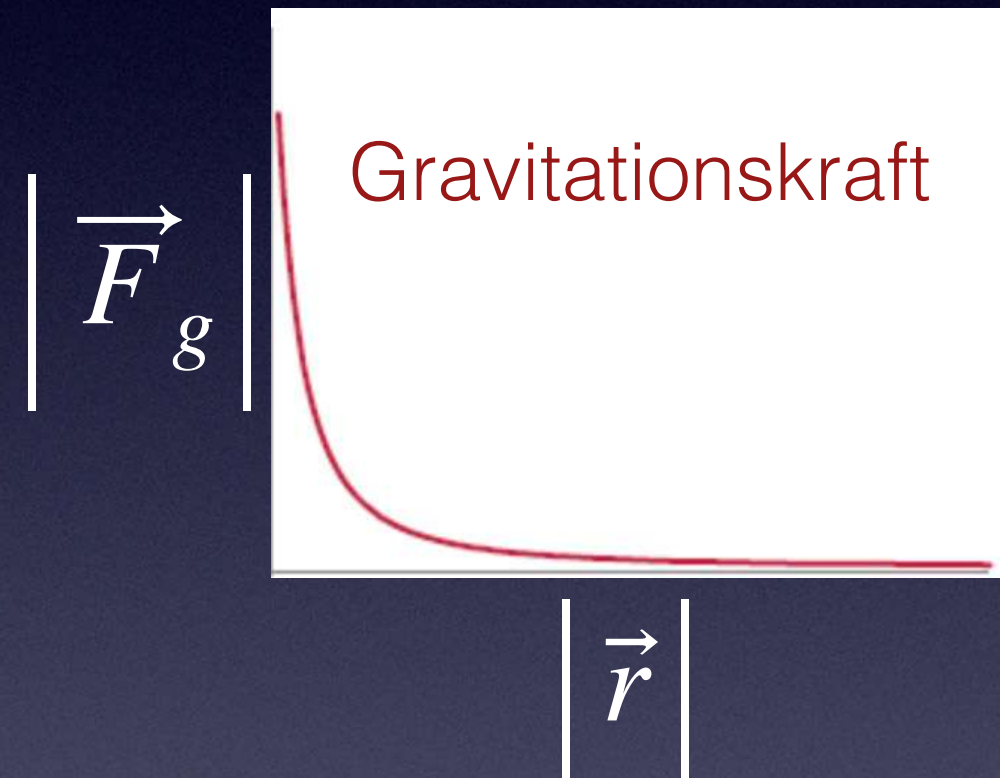
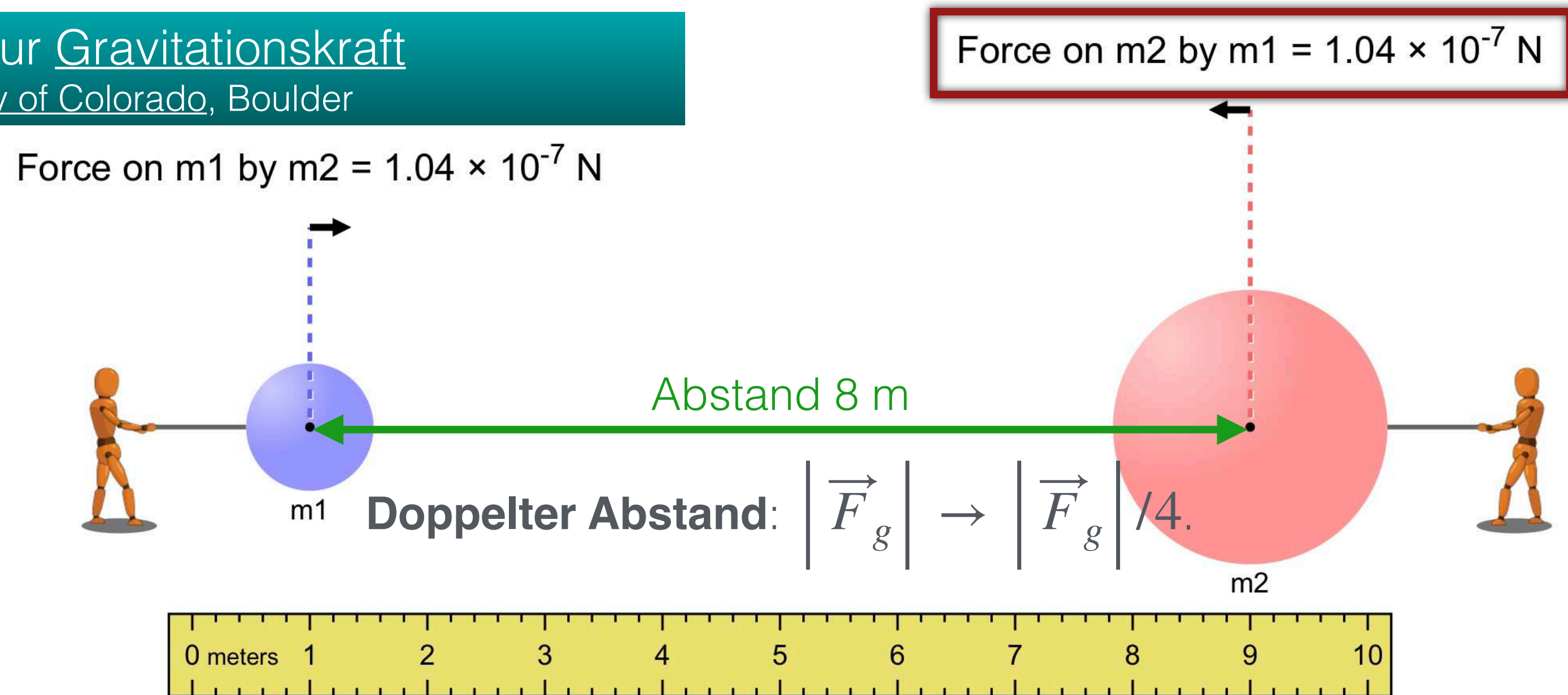


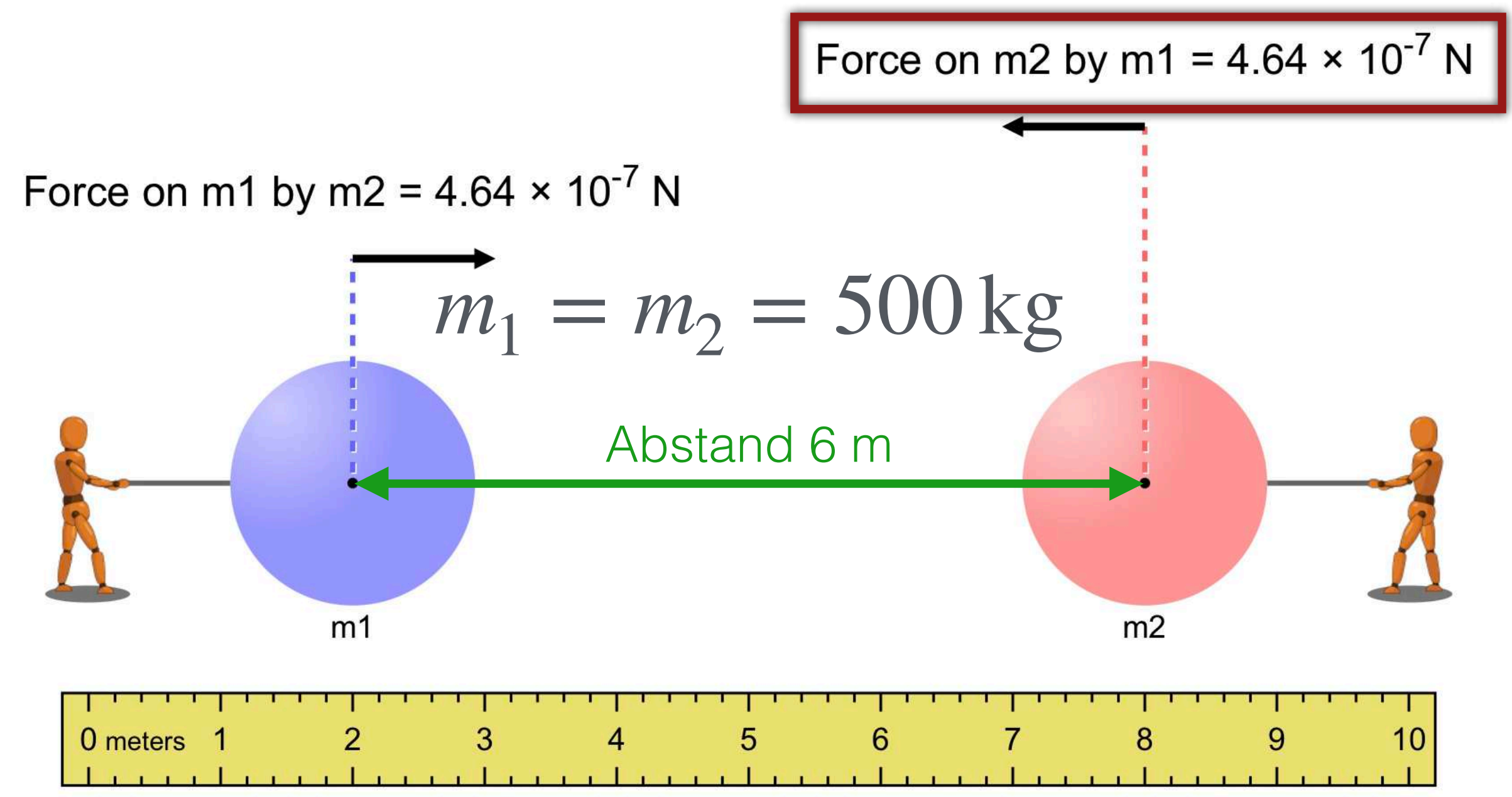
Relativer Positionsvektor  $\vec{r}$  und Positionsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ . Die Einheitsvektoren  $\hat{r}$  und  $-\hat{r}$  wurden zur Verdeutlichung versetzt eingezeichnet.



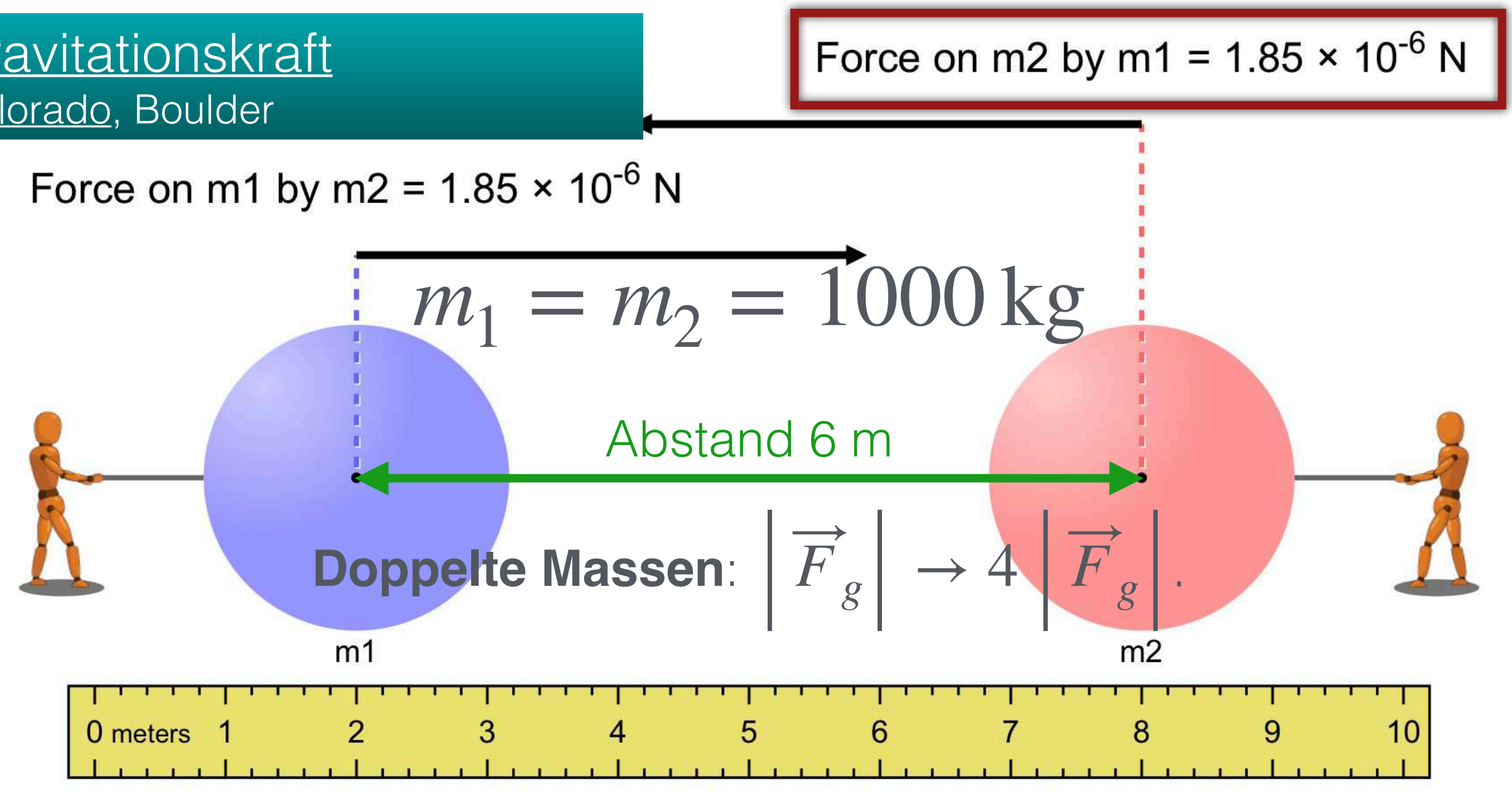
Der Betrag einer quadratisch mit dem Abstand abnehmenden Kraft ist bei kleinen Entfernungen groß und bei großen Entfernungen sehr klein.

Animation zur Gravitationskraft  
by University of Colorado, Boulder





Animation zur Gravitationskraft  
by University of Colorado, Boulder



Bezüglich der Berechnung der Gravitationskraft ist es zweckmäßig, diese in einen Skalar sowie eine Richtung zu unterteilen. Z. B. so:

$$\vec{F}_g = \left| \vec{F}_g \right| \hat{F}_g$$

Daraus resultieren folgende Berechnungsschritte:

1. Betrag:  $\left| \vec{F}_g \right| = G \frac{m_1 m_2}{\left| \vec{r} \right|^2}$ , und

2. Richtung:  $\hat{F}_g = -\hat{r} = -\frac{\vec{r}}{\left| \vec{r} \right|}$ .

# Kontrollpunkt 1

1. Ein Stern mit Masse  $4 \times 10^{30}$  kg befindet sich an der Position  $\langle 2 \times 10^{11}, 1 \times 10^{11}, 1.5 \times 10^{11} \rangle$  m, und ein Planet mit Masse  $3 \times 10^{24}$  kg bei  $\langle 3 \times 10^{11}, 3.5 \times 10^{11}, -0.5 \times 10^{11} \rangle$  m. (1) Berechne die Gravitationskraft, die der Stern auf den Planeten ausübt. (2) Berechne die Anziehungskraft, die der Planet auf den Stern ausübt.

# Die Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche



Die Größe der Gravitationskraft, welche die Erde auf ein massives Objekt mit Masse  $m$  in der Nähe der Erdoberfläche ausübt, beträgt näherungsweise

$$\left| \vec{F}_g \right| = G \frac{M_E}{(R_E + y)^2} m$$

wobei  $y$  der Abstand des Objekts über der Erdoberfläche,  $R_E$  der Radius der Erde und  $M_E$  die Masse der Erde ist. Da für eine Position nahe der Erdoberfläche  $y \ll R_E$  gilt, ist

$$\left| \vec{F}_g \right| \approx gm, \text{ mit } g = G \frac{M_E}{R_E^2}$$

für viele Fragestellungen eine gute Näherung.  $g$  ist darin die Stärke (Betrag) der Erdbeschleunigung, die im Mittel  $9.8 \text{ N/kg}$  beträgt.

Das „**Gravitationsfeld**“  $\vec{g}(\vec{r})$  an einem Ort im Raum ist definiert als die (vektorielle Gravitations-) Kraft pro Masse (in **N/kg**), so dass die Kraft auf eine Masse  $m$  durch  $m\vec{g}(\vec{r})$  gegeben ist. Für eine (Punkt-) Masse  $M$  (im Ursprung) gilt

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{|\vec{r}|^2} \hat{r}, \text{ und damit } \vec{F}_{g(M \rightarrow m)}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r})$$

Falls die Erde aus Schichten von Kugelschalen gleichmäßiger Dichte aufgebaut wäre, würde das Gravitationsfeld der Erde perfekt sphärisch symmetrisch und konstant an der Erdoberfläche sein. Allerdings wölbt sich die Erde aufgrund ihrer Drehung am Äquator aus, so dass das Schwerfeld am Äquator kleiner ist als an den Polen, da man dort weiter vom Erdmittelpunkt entfernt ist. Geologische Strukturen beeinflussen das Gravitationsfeld ebenfalls.

Wenn wir das Prinzip Impuls auf einen in einem Gravitationsfeld befindlichen, massiven Körper anwenden, so erhalten wir für Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit und Vernachlässigung des Luftwiderstands

$$m\vec{v}_f = m\vec{v}_i + \vec{F}_{\text{net}}\Delta t = m\vec{v}_i + m\vec{g}\Delta t$$

und daraus folgt durch Umformung

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{g}, \text{ und im Grenzfall } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

Der Grund dafür, dass die Masse aus der Berechnung heraus fällt ist, dass **sowohl** der **Impuls als auch die Gravitationskraft proportional zu  $m$**  sind. Dies hat den interessanten Effekt, dass ein schwerer und ein leichter Stein auf genau die gleiche Weise fallen, falls nur die Gravitationskraft wirkt.

# Kontrollpunkt 2

1. Ein annähernd kugelförmiger Asteroid hat eine Masse von  $3.1 \times 10^{20} \text{ kg}$  und einen Radius von  $270 \text{ km}$ . (1) Welchen Wert hat die Konstante  $g$  an einem Ort auf der Oberfläche des Asteroiden? (2) Wie groß wäre die Gravitationskraft, die der Asteroid auf einen Astronauten mit  $70 \text{ kg}$  ausübt, der auf der Oberfläche des Asteroiden steht? (3) Wie verhält sich dies im Vergleich zu der Gravitationskraft, die auf denselben Astronauten wirkt, wenn er auf der Erdoberfläche steht?

# Einige Eigenschaften des Gravitationsfeldes

Einige Definitionen, die im Folgenden benutzt werden:

$$\vec{\nabla} \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \text{ Nabla-Operator}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \text{ Divergenz (en: } \textit{divergence}) \text{ von } \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left\langle \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\rangle, \text{ Rotation (en: } \textit{curl}) \text{ von } \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle, \text{ Gradient (en: } \textit{gradient}) \text{ von } f$$

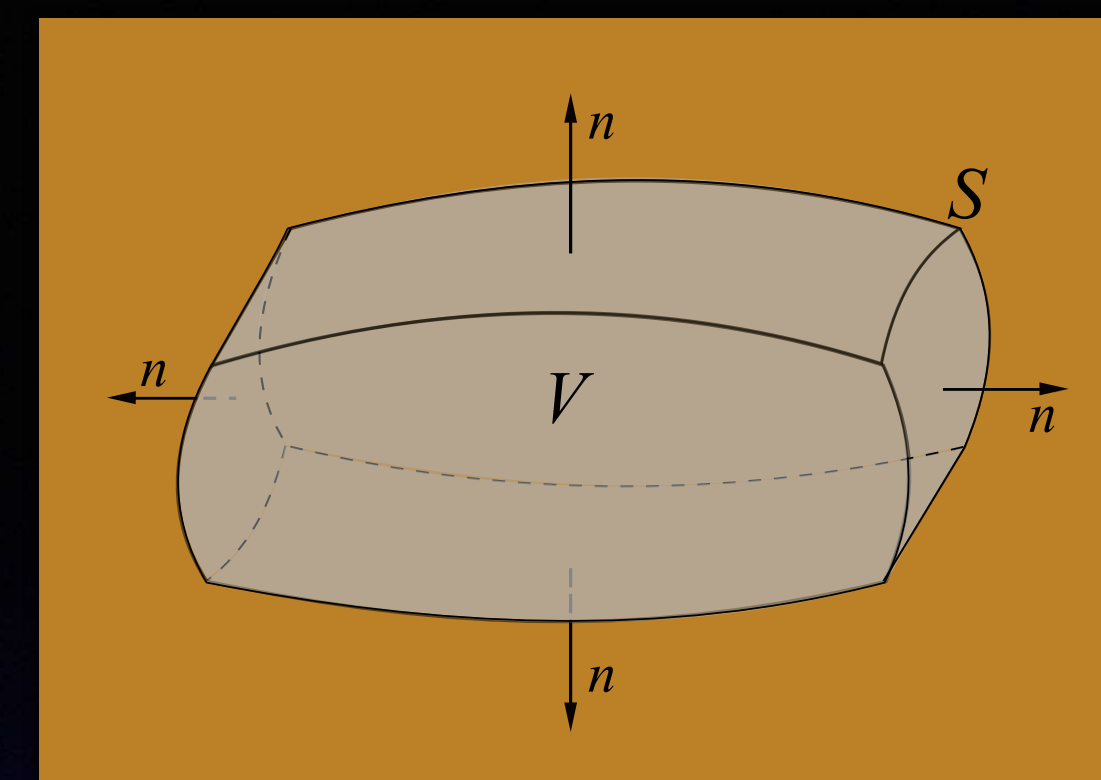
$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \text{ (Divergenz-Theorem)}$$

Interpretation: Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über einer geschlossenen Oberfläche  $S$ , das als **Fluss durch die Oberfläche** bezeichnet wird, ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz über das von der Oberfläche eingeschlossene Volumen  $V$ .

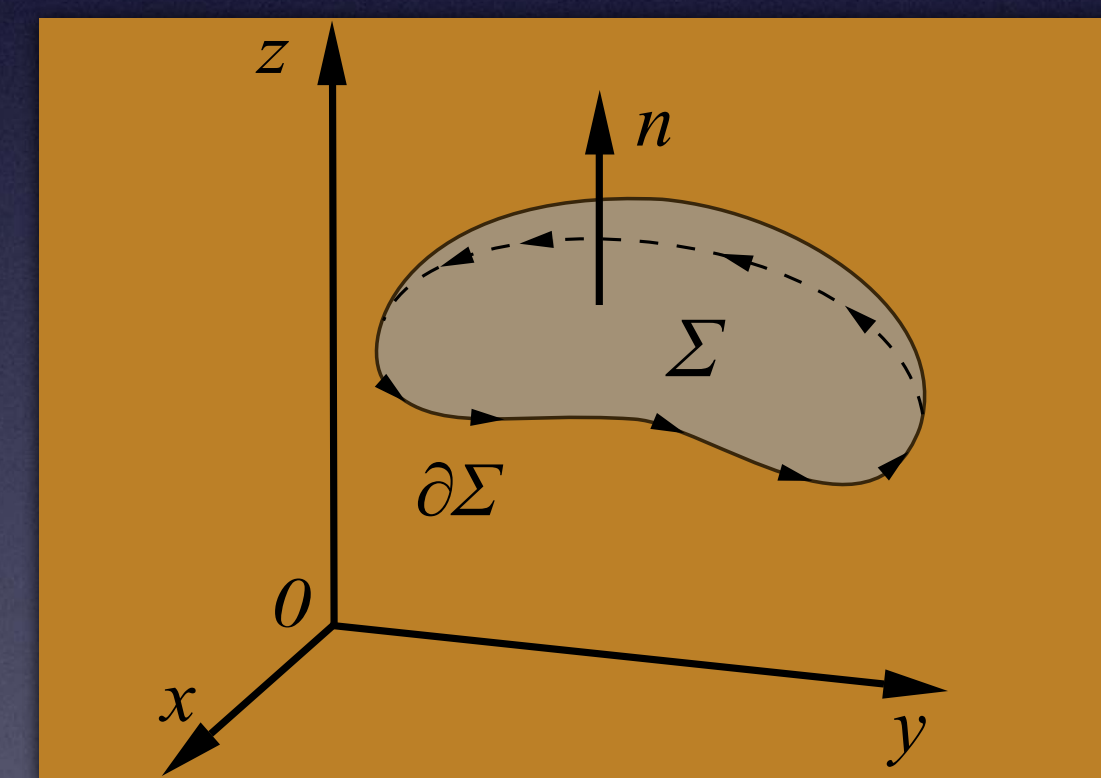
$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} \text{ (Kelvin-Stokes-Theorem)}$$

Interpretation: Das Linienintegral eines Vektorfeldes entlang eines geschlossenen Weges  $\Gamma$  ( $\partial\Sigma$  in der nebenstehenden Abbildung) ist gleich dessen **Rotation durch die eingeschlossene Fläche  $\Sigma$** .

Quelle der Grafiken auf dieser Seite: [https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem) und [https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'_theorem).



Man beachte insbesondere die Definition von  $\vec{n}$ : Der Normalenvektor weist immer nach außen.



Man beachte insbesondere die Definition von  $\vec{n}$  und der Umlaufrichtung gemäß Rechter-Hand-Regel: Daumen in Richtung  $\vec{n}$ , gekrümmte Finger legen den Umlaufsinn fest.

Betrachten wir zunächst die **Divergenz des Gravitationsfeldes**  $\vec{g}$ . Aus dem Divergenz-Theorem erhalten wir (hier ohne Beweis)

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM$$

Insofern im dem eingeschlossenen Volumen eine Masse enthalten ist, kann aus dem **Wert des Integrals** auf die **Ursache des Feldes**, dessen Quelle (Masse), zurückgeschlossen werden. Ist keine Masse eingeschlossen (quellenfrei), so ist das Ergebnis null.

Man erkennt, dass der gravitative „**Fluss**“ nur von der eingeschlossenen Masse abhängt, nicht aber von der Größe des eingeschlossenen Volumens. Dies liegt daran, dass  $|\vec{g}| \sim |\vec{r}|^{-2}$  ist, die Oberfläche einer Kugel aber  $A \sim |\vec{r}|^2$ , so dass sich beide Faktoren bei der Berechnung des Integrals gerade kompensieren.



Betrachten wir jetzt die **Rotation des Gravitationsfeldes**  $\vec{g}$ . Aus dem Kelvin-Stokes-Theorem folgt (hier ohne Beweis)

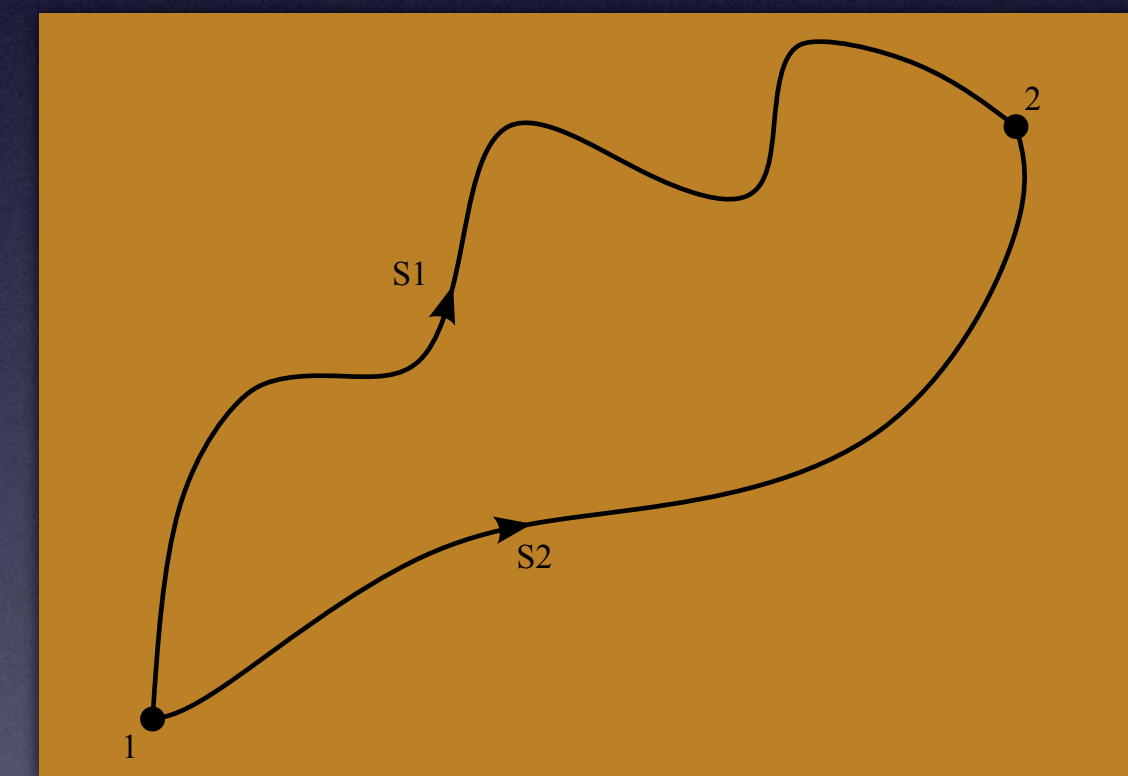
$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0} \text{ und damit } \oint_{\Gamma} \vec{g} \cdot d\vec{\Gamma} = 0$$

Das Gravitationsfeld ist **rotationsfrei**. Daraus folgt unmittelbar, dass das **Linienintegral entlang eines geschlossenen Weges Null** ist. Dies hat zur Konsequenz, dass der Wert des Linienintegrals zwischen zwei Positionen  $\vec{r}_a$  und  $\vec{r}_b$

$$\int_a^b \vec{g} \cdot d\vec{\Gamma}$$

**unabhängig vom gewählten Weg** ist.  $\vec{g}$  wird in solchen Fällen auch als **konservatives Feld (Gradientenfeld)** bezeichnet. Dieses Ergebnis wird später, bei der genaueren Betrachtung von Arbeit und Energie im Gravitationsfeld, noch wichtig werden.

Quelle der Grafik auf dieser Seite: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kurvenintegral>.



In einem konservativen Kraftfeld ist der Wert des Linienintegrals unabhängig vom Weg (S1, S2) zwischen den Positionen 1 und 2.

# Kontrollpunkt 3

1. Gegeben seien folgende Vektor-Felder:  $\vec{F}_1 = \langle -x, -y, 0 \rangle$ ,  $\vec{F}_2 = \langle 1, 2, 0 \rangle$  und  $\vec{F}_3 = \langle -y, x, 0 \rangle$ . (1) Berechne jeweils  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_i$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{F}_i$ . (2) Skizziere die Vektor-Felder (in 2D) und beschreibe in wenigen Worten den Zusammenhang zwischen den Berechnungsergebnissen und der Visualisierung des jeweiligen Feldes. Stelle dir dabei vor, dass es sich bei den  $\vec{F}_i$  jeweils um „Strömungsfelder“ handelt, die Felder also „Flüsse“ darstellen.

# Das Reziprozitätsprinzip

*(Actio gleich Reactio)*

Ein wichtiger Aspekt der Gravitationswechselwirkung ist, dass die **Kraft**, die Objekt 1 auf Objekt 2 ausübt, der Kraft, die Objekt 2 auf Objekt 1 ausübt, **gleich und entgegengesetzt** ist (siehe hierzu nebenstehende Abbildung). Dass die Größen gleich sein müssen, ergibt sich aus der algebraischen Form der Gravitationskraft, da  $m_1 m_2 = m_2 m_1$  ist. Die Richtungen der Kräfte verlaufen entlang der Verbindungslinie zwischen den Zentren und in entgegengesetzte Richtungen.

$$\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{(1 \rightarrow 2)}|^2} \hat{r}_{(1 \rightarrow 2)}$$

$$\vec{F}_{g(2 \rightarrow 1)} = -G \frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_{(2 \rightarrow 1)}|^2} \hat{r}_{(2 \rightarrow 1)}$$

Sonne (Objekt 1) und Erde (Objekt 2) üben gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte aufeinander aus.

Die Kraft, welche die Erde (Objekt 2) auf die massereiche Sonne in der Abbildung auf der vorangehenden Folie ausübt, ist genau so groß wie die Kraft, welche die Sonne (Objekt 1) auf die Erde ausübt, so dass die Impulsänderungen im gleichen Zeitintervall gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind (kurz „gleich und entgegengesetzt“):

$$\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)} = -\vec{F}_{g(2 \rightarrow 1)}$$

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{g(2 \rightarrow 1)}\Delta t \text{ und } \Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)}\Delta t = -\vec{F}_{g(2 \rightarrow 1)}\Delta t$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$$

Allerdings ist die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\vec{v}_1$  der Sonne im Vergleich zur  $\Delta\vec{v}_2$  der Erde extrem gering, da die Masse der Sonne mit  $2 \times 10^{30}$  kg im Vergleich zur Masse der Erde mit  $6 \times 10^{24}$  kg sehr viel größer ist.

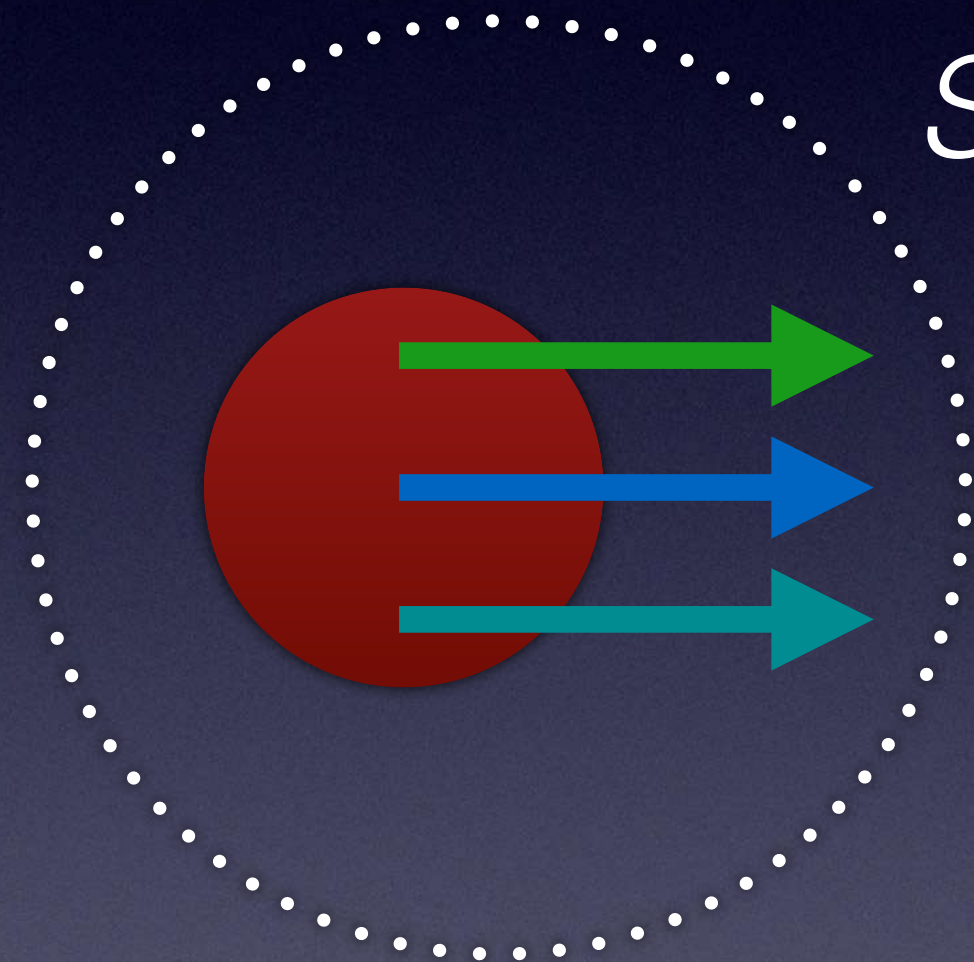
sehr großer Abstand



Veranschaulichung des Reziprozitätsprinzips der Gravitationswechselwirkung.

Objekt 1

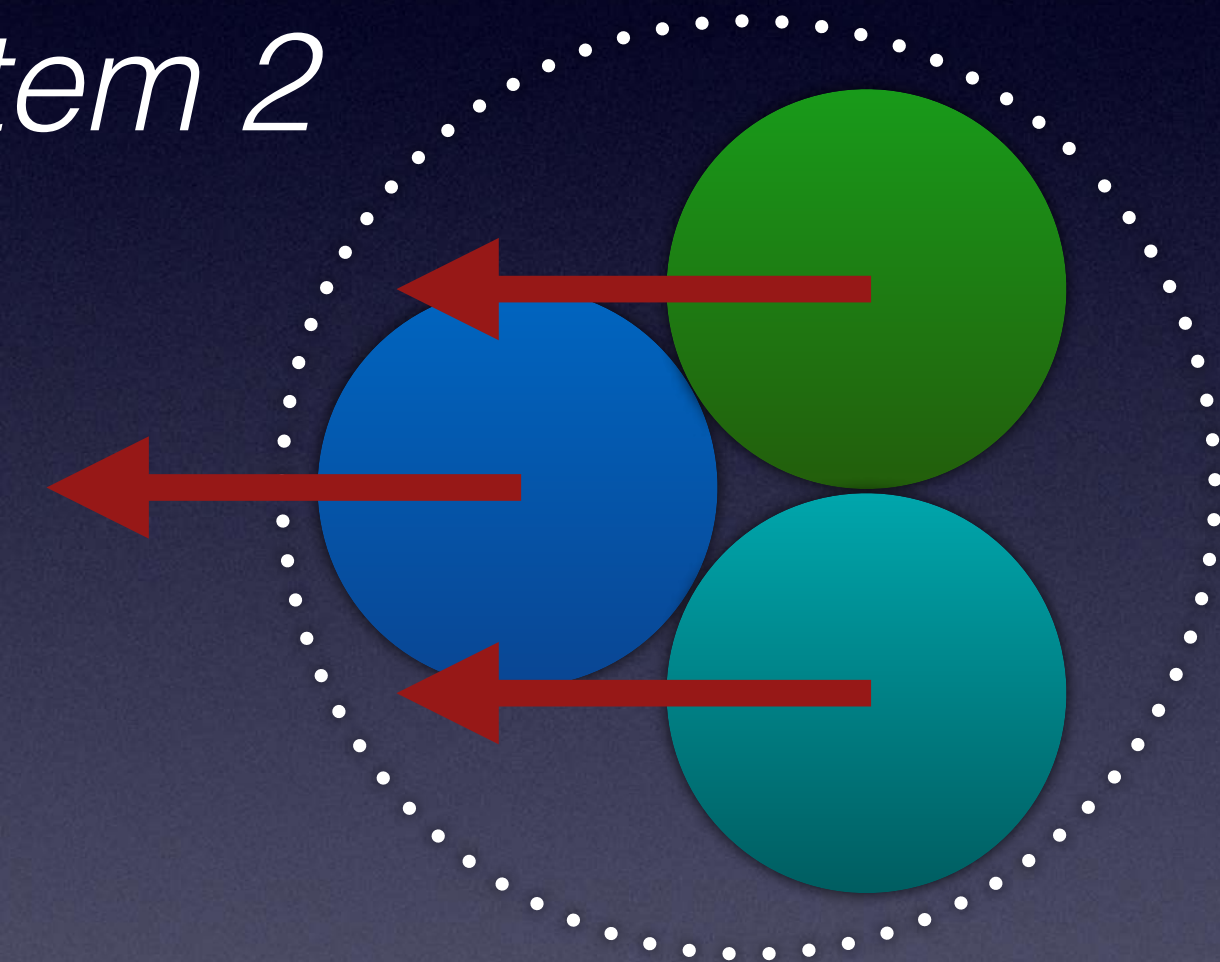
*System 1*



Jedes Objekt aus der Gruppe der „Objekte 2“ übt eine gleich große Kraft auf Objekt 1 aus.

Objekte 2

*System 2*



Objekt 1 übt auf jedes der Objekte aus der Gruppe der „Objekte 2“ eine gleich große Kraft aus. Die inneren Wechselwirkungen zwischen den Objekten dieser Gruppe heben sich gegenseitig auf.

**Magnetische Kräfte** haben **nicht die Eigenschaft der Reziprozität**. Zwei elektrisch geladene Teilchen, die sich beide bewegen, können sowohl magnetisch als auch elektrisch interagieren, und die magnetischen Kräfte, die diese beiden Teilchen aufeinander ausüben, müssen weder gleich groß noch entgegengesetzt gerichtet sein. Die **Reziprozität gilt für Gravitations- und elektrische Kräfte**, aber **nicht generell für magnetische Kräfte**, die zwischen einzelnen bewegten Ladungen wirken.

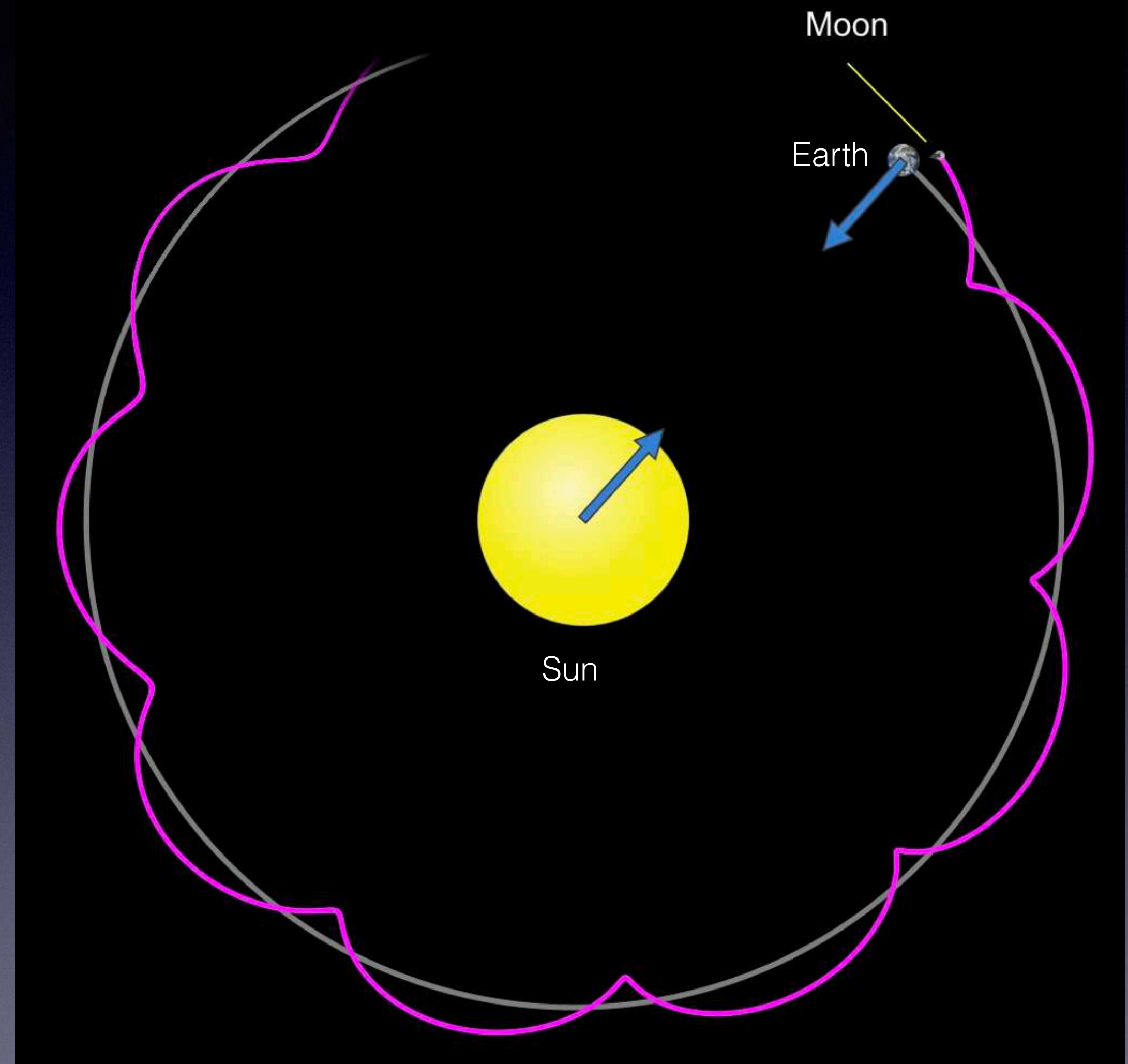
Wie wir später noch sehen werden, handelt es sich bei den Kräften, die mit dem direkten Kontakt zwischen zwei Objekten verbunden sind, eigentlich um elektrische Kräfte auf mikroskopischer Ebene. Somit haben auch die Kontaktkräfte die Eigenschaft der Reziprozität.

# Berücksichtigung der Gravitationskraft in numerischen Modellen



In den Folien zu „Das Prinzip Impuls“ haben wir gesehen, wie man eine iterative Vorhersage der Bewegung auf einem Computer für ein Masse-Feder-System strukturiert. Für die Vorhersage der Bewegung von Objekten, die durch die Schwerkraft aufeinander einwirken, kann exakt dieselbe Grundstruktur verwendet werden, aber wir müssen die Gravitationskraft anstelle einer Federkraft berechnen. Eine mögliche Abfolge der Berechnungsschritte ist auf der nächsten Folie zu sehen.

Weitere Animationen zu Gravitation und Umlaufbahnen  
by University of Colorado, Boulder



Bewegung von Mond und Erde um die Sonne. Nicht maßstabsgerechte Darstellung.

Initialisierung:  $\vec{r}_{i,0}$  und  $\vec{p}_{i,0}$ ,  $[i | i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n]$ ;  $k = 0$

$$\vec{r}_{(j \rightarrow i),k} \equiv \vec{r}_{i,k} - \vec{r}_{j,k} \text{ und } \hat{r}_{(j \rightarrow i),k} = \vec{r}_{(j \rightarrow i),k} / |\vec{r}_{(j \rightarrow i),k}| \quad \text{für alle } i \neq j$$

$$\vec{F}_{(j \rightarrow i),k} = -G \frac{m_j m_i}{|\vec{r}_{(j \rightarrow i),k}|^2} \hat{r}_{(j \rightarrow i),k} \quad \text{und} \quad \vec{F}_{(i \rightarrow j),k} = -\vec{F}_{(j \rightarrow i),k} \quad \text{für alle } i \neq j;$$

$$\vec{F}_{i,k(\text{net})} = \sum_{j, j \neq i} \vec{F}_{(j \rightarrow i),k} \quad \text{und} \quad \vec{p}_{i,k+1} = \vec{p}_{i,k} + \vec{F}_{i,k(\text{net})} \Delta t$$



Iteration  
 $k = k + 1$

$$\vec{v}_{i,k+1} = \vec{p}_{i,k+1} / m_i$$

$$\vec{r}_{i,k+1} = \vec{r}_{i,k} + \vec{v}_{i,k+1} \Delta t$$

# Die elektrische Kraft

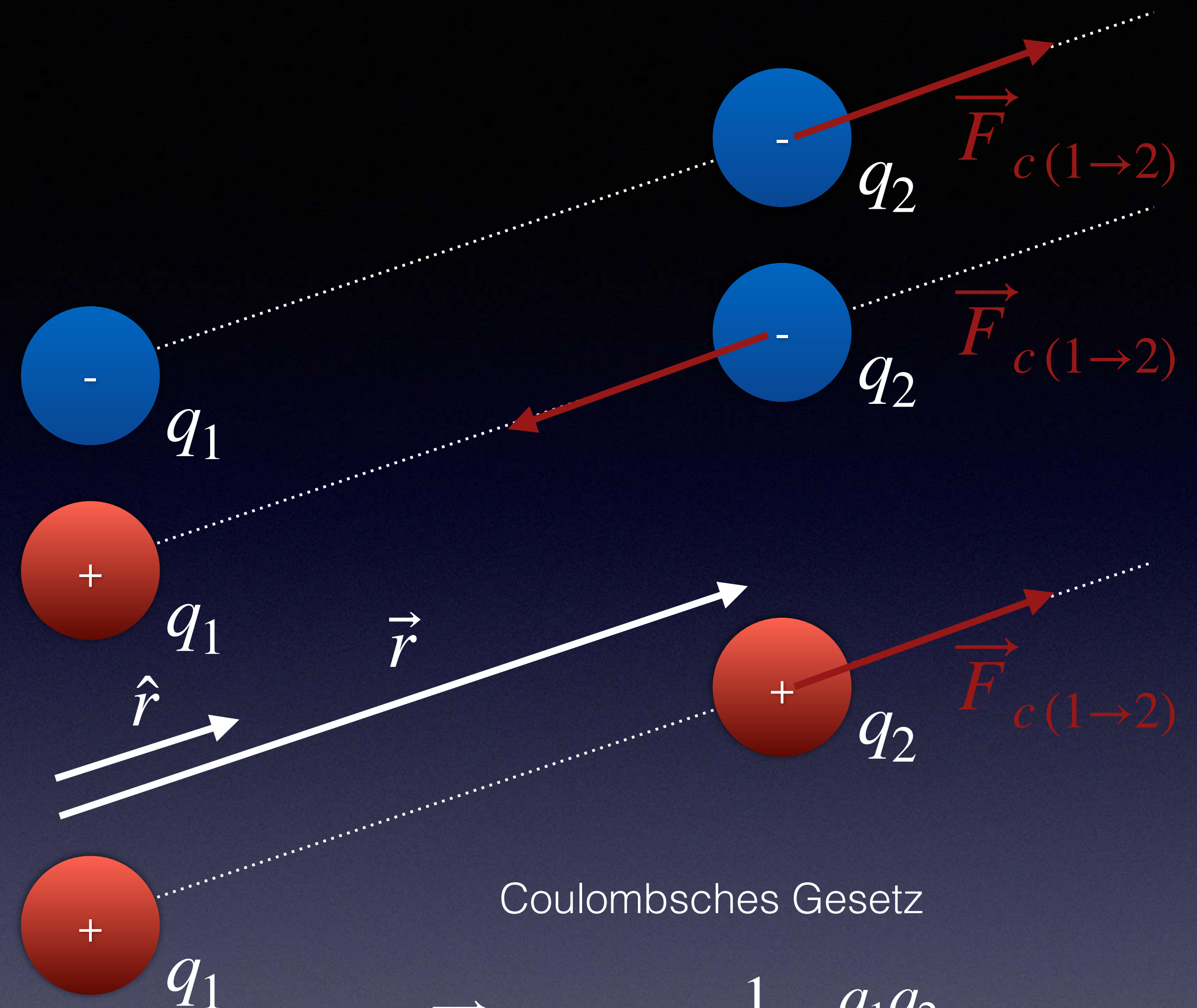
Teilchen wie die **Protonen** und **Elektronen** sind elektrisch geladen. Man beobachtet, dass zwei Protonen sich gegenseitig abstoßen, ebenso wie zwei Elektronen, während ein Proton und ein Elektron sich gegenseitig anziehen. Man sagt, dass Protonen eine „**positive elektrische Ladung**“ und Elektronen eine „**negative elektrische Ladung**“ haben. Die **Kraft**, die dieser elektrischen Wechselwirkung entspricht, ist als „**Coulombsches Gesetz**“ bekannt, zu Ehren des französischen Wissenschaftlers, der dieses Verhalten der elektrischen Kräfte Ende des 18. Jahrhunderts beschrieben hat.

## Animationen zu Coulombsches Gesetz

by University of Colorado, Boulder

Das Proton hat eine Ladung (in Coulomb) von  $+1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  und das Elektron hat eine Ladung von  $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Das Symbol  $e$  wird häufig verwendet, um die Elementar-Ladung darzustellen. Aus den Gleichungen, die die elektrischen Kräfte und die Gravitationskräfte beschreiben, wird deutlich, dass es Ähnlichkeiten zwischen diesen Kräften gibt. Die auffälligste Ähnlichkeit besteht darin, dass die Größe beider Kräfte umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen den Mittelpunkten der Objekte ist und dass die Kraft entlang der Verbindungslinie zwischen den Objekten wirkt. Im Gegensatz zu den Gravitationskräften können elektrische Kräfte anziehend oder abstoßend sein, während Gravitationskräfte immer anziehend sind. Der konstante Faktor beträgt:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$



Coulombsches Gesetz

$$\vec{F}_{c(1 \rightarrow 2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

Die Coulomb-Kraft  $\vec{F}_c$ , die von Objekt 1 auf Objekt 2 ausgeübt wird. Relativer Positionsvektor  $\vec{r}$  und Einheitsvektor  $\hat{r}$  wurden zur Verdeutlichung versetzt eingezeichnet.

Wir wollen nun für zwei voneinander im Abstand  $\vec{r}$  befindliche Protonen ermitteln, in welchem Verhältnis  $f$  die Coulomb-Kraft zur Gravitationskraft für diese beiden Objekte zueinander stehen. Hier das Ergebnis:

$$f = \frac{|\vec{F}_c|}{|\vec{F}_g|} = \frac{\left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \right|}{G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{|q_1 q_2|}{m_1 m_2} \approx 1.2 \times 10^{36}$$

Dieses Verhältnis ist außerordentlich groß. Bei der Betrachtung der Wechselwirkungen subatomarer geladener Teilchen können die gravitativen Wechselwirkungen deshalb getrost vernachlässigt werden.

# Kontrollpunkt 4

1. Wenn elektrische Wechselwirkungen von Natur aus so viel stärker sind als Gravitationswechselwirkungen, warum nehmen wir dann die Gravitationskräfte in unserem Alltag trotzdem so viel stärker wahr?
2. Ein bewegliches Elektron bewegt sich in der Nähe des Kerns eines Goldatoms, das 79 Protonen und 118 Neutronen enthält. Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich das Elektron in einem Abstand von  $3 \times 10^{-9} \text{ m}$  zum Goldkern. Die Ladung eines Elektrons beträgt  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , die eines Protons  $+e$  und das Neutron trägt keine Ladung. (1) Wie groß ist die Kraft, die der Goldkern auf das Elektron ausübt? (2) Wie groß ist die Kraft, die das Elektron auf den Goldkern ausübt?

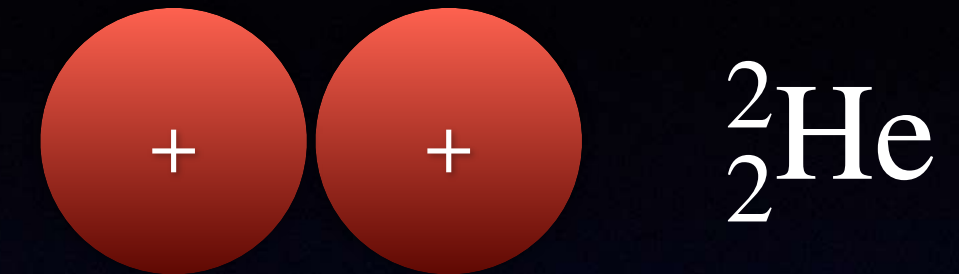
# Die starke Wechselwirkung



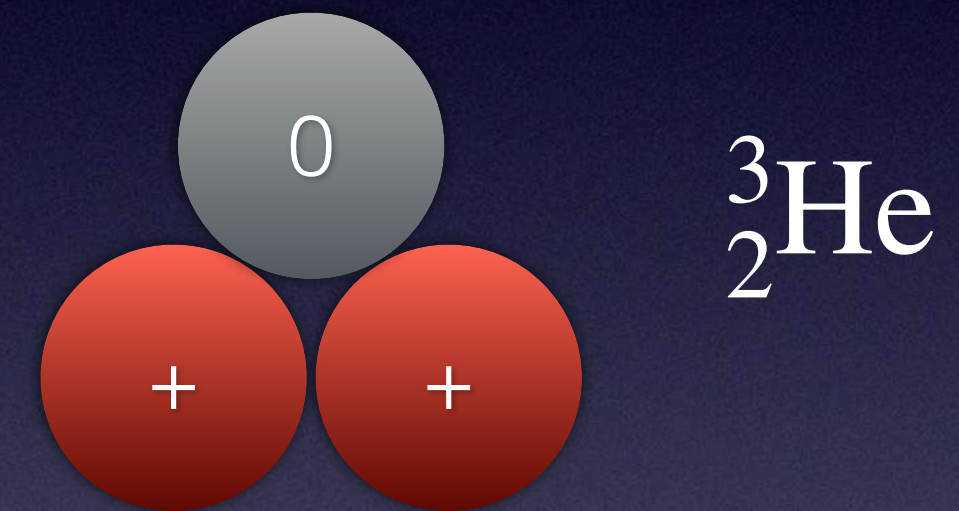
Die **starke Wechselwirkung** betrifft **Teilchen, die aus Quarks bestehen**. Leptonen, wie z. B. Elektronen, erfahren diese Kraft nicht, da sie nicht aus Quarks bestehen. Die starke Wechselwirkung **hält den Kern eines Atoms zusammen**. Im Inneren eines Atomkerns stoßen sich die Protonen elektrisch ab, doch die Protonen und Neutronen bleiben aufgrund der starken Wechselwirkung dicht beieinander. Dabei handelt es sich um eine **Wechselwirkung mit sehr kurzer Reichweite**. Die Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen ist im Wesentlichen null, es sei denn, die Teilchen berühren sich, und der **Abstand zwischen den Zentren** entspricht dann etwa dem **Durchmesser eines Protons oder Neutrons** ( $\approx 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ ) - das ist sehr viel kleiner als der Radius eines Atoms mit  $\approx 1 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Bei diesen sehr geringen Abständen ist zwar die elektrische Kraft extrem groß, da sie umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands ist, aber die starke Kraft in stabilen Kernen ist dann noch größer.

Es besteht ein **empfindliches Gleichgewicht** zwischen der **elektrischen Abstoßung** und der **starken Kernkraft**, das darüber entscheidet, ob ein Kern überhaupt existieren kann. Ein Kern, der nur aus zwei Protonen und keinen Neutronen besteht, kommt in der Natur nicht vor, weil die starke Kernkraft zwischen den beiden Protonen geringer ist als die abstoßende elektrostatische Kraft. **In stabilen Helium-Isotopen** gehen die Protonen sowohl mit den Neutronen als auch mit dem anderen Proton starke Wechselwirkungen ein, die ausreichen, um die elektrische Abstoßung zwischen den beiden Protonen zu überwinden.

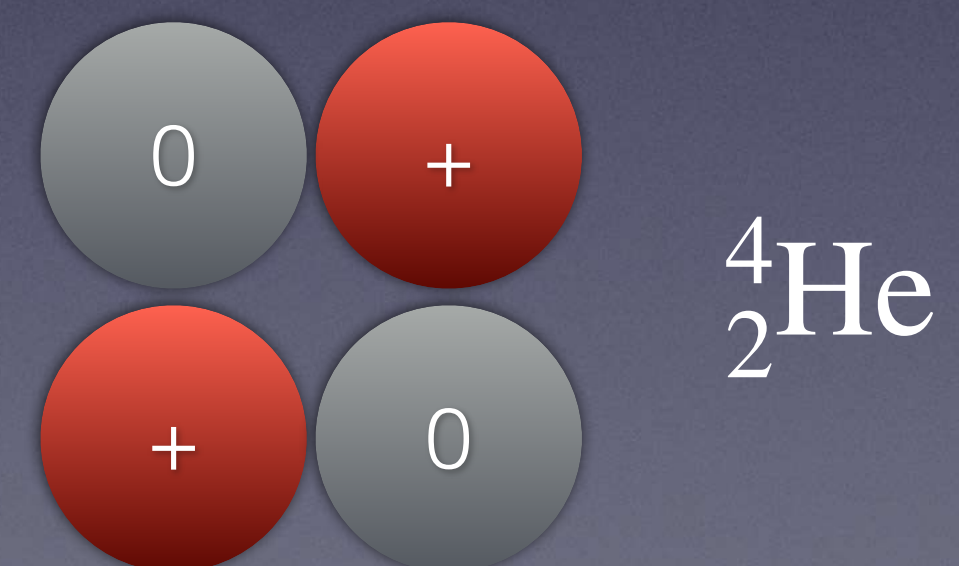
Helium-2, Kern instabil



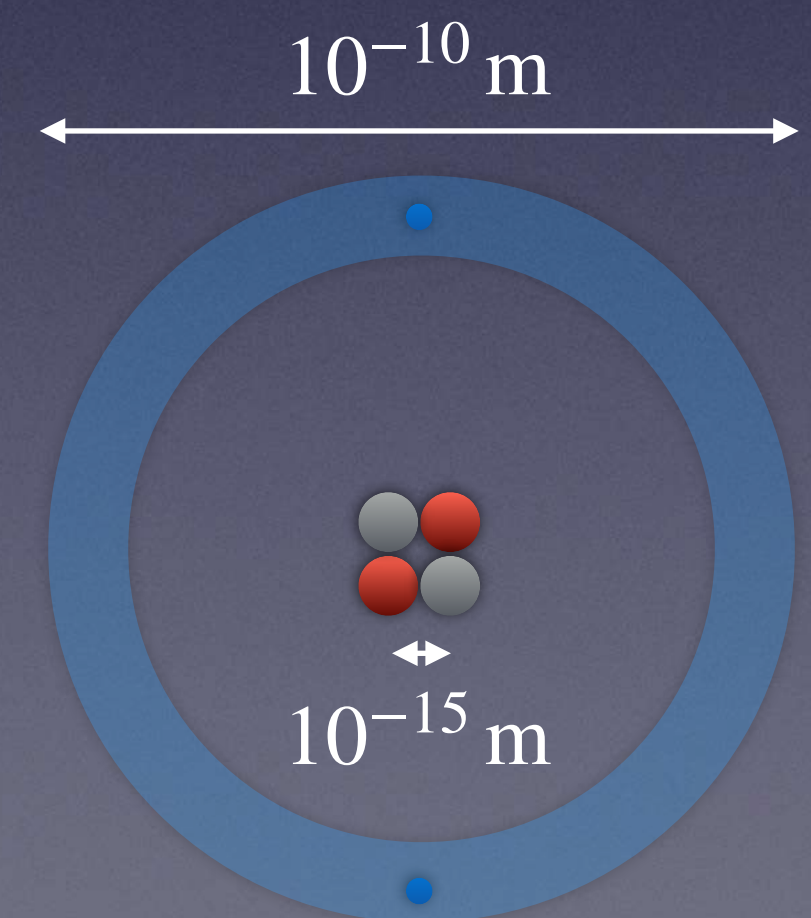
Helium-3, Kern stabil



Helium-4, Kern stabil



Helium-4, Kern und Elektronenhülle (nicht maßstabsgerecht)

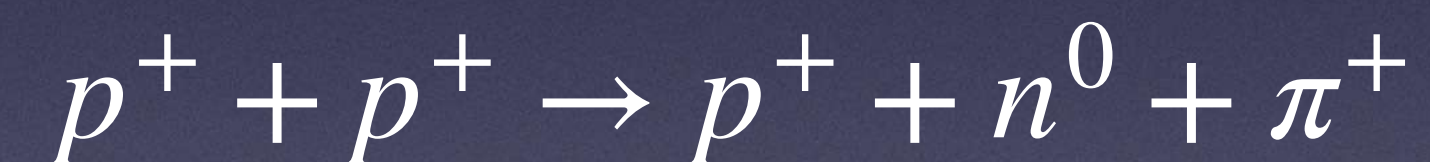
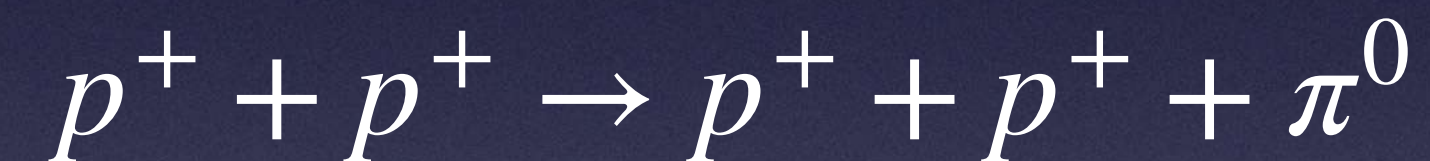


Am Anfang des Periodensystems finden sich in den Atomkernen etwa gleich viele Neutronen wie Protonen, wie bei He-4. Auch das häufigste Isotop des Sauerstoffs hat zum Beispiel 8 Protonen und 8 Neutronen (O-16). **Je weiter man im Periodensystem voranschreitet, desto mehr Neutronen werden benötigt, um die abstoßenden Kräfte zwischen Protonen auszugleichen.** Das häufigste Isotop des Urans hat 92 Protonen, aber viel mehr Neutronen, nämlich 146 in U-238. Im Uran gibt es nicht nur mehr Neutronen, mit denen die Protonen wechselwirken können, sondern die vielen Neutronen „verdünnen“ auch die Protonenkonzentration, so dass die Protonen im Durchschnitt weiter voneinander entfernt sind, was die elektrische Abstoßung verringert. Während es für die Gravitationskraft und die elektrostatische Kraft (relativ) einfache Gleichungen gibt, ist es sehr schwierig, eine Gleichung für ein „Kraftgesetz“ für die starke Wechselwirkung zu formulieren. Deshalb wird die starke Wechselwirkung in diesen Folien nicht quantitativ betrachtet.



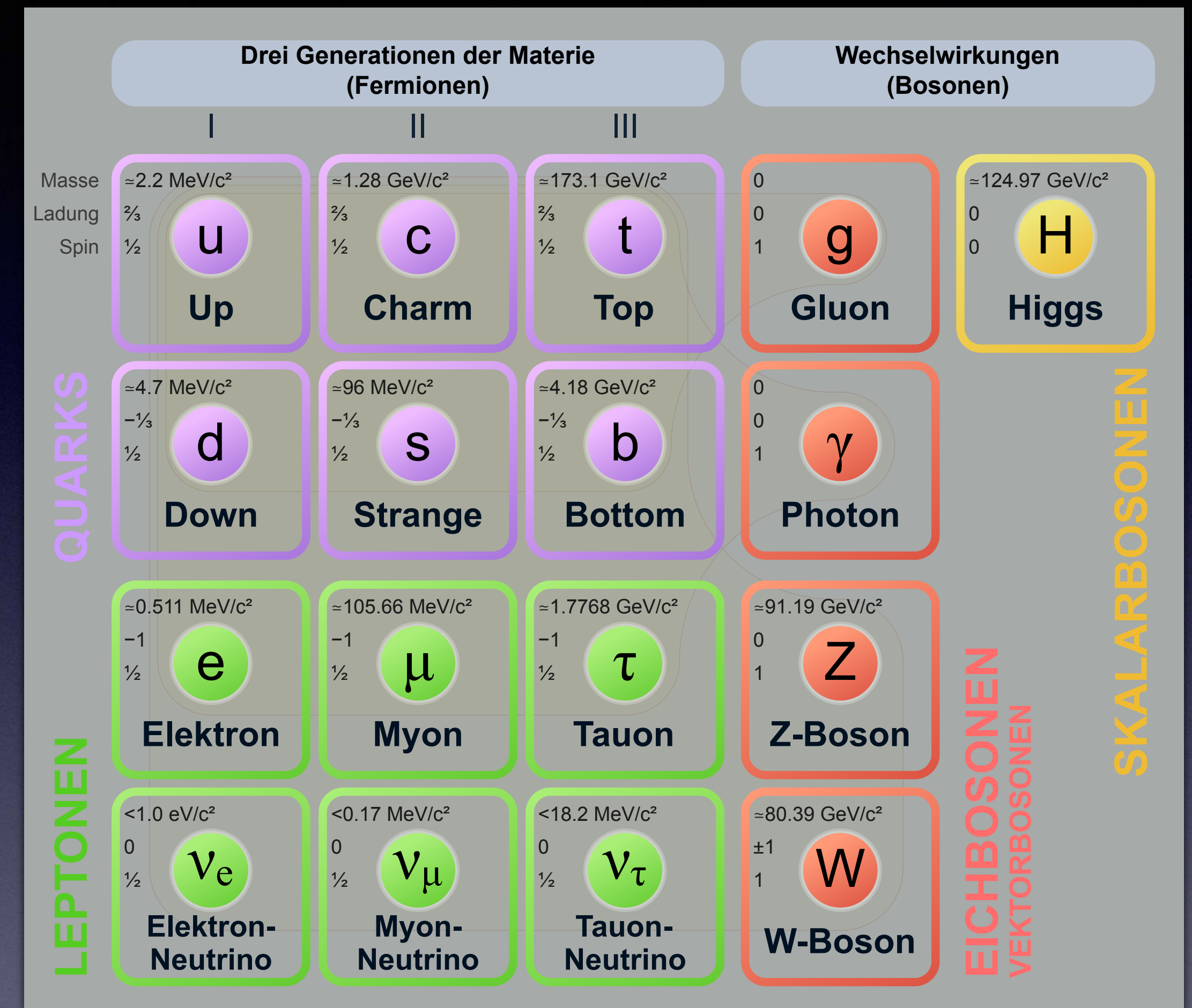
Für jedes Elementarteilchen gibt es ein „**Antiteilchen**“, das die **gleiche Masse** hat, dessen **andere Eigenschaften** (z. B. Ladung) jedoch **entgegengesetzt** sind. Diese Teilchen werden als „**Antimaterie**“ bezeichnet. Ein Antiproton zum Beispiel hat die gleiche Masse wie ein Proton, ist aber negativ geladen. Wenn ein Teilchen auf sein eigenes Antiteilchen trifft, vernichten sich die beiden Teilchen gegenseitig und es entstehen verschiedene andere Teilchen. Ein Teilchen wie ein **Proton** (zu den **Hadronen** gehörend) besteht aus **Quarks** und **Gluonen**, welche die Kräfte vermitteln, während ein **Antiproton** aus **Antiquarks** zusammengesetzt ist. Es gibt jedoch auch Teilchen, so genannte „**Mesonen**“, die aus einem Quark und einer anderen Art von Antiquark zusammengesetzt sind. Ein Beispiel für ein Meson ist das **Pion**, das mit dem griechischen Buchstaben  $\pi$  dargestellt wird. Antiteilchen und Mesonen können zusammen mit normalen Teilchen in Kernreaktionen erzeugt werden.

Eine Situation, in der wir die **starke Wechselwirkung beobachten** können, ist die Reaktion, bei der ein schnelles Proton ein stationäres Proton (das ein Proton in einem Kern sein kann) so hart trifft, dass ein zusätzliches Teilchen, ein Pion, erzeugt wird. Das Pion hat eine Masse von etwa 15% der Masse eines Protons. Je nachdem, welche Quarks und Antiquarks beteiligt sind, kann ein Pion eine elektrische Ladung von  $-e$ ,  $0$ , oder  $+e$  haben. Hier sind Beispiele für solche Reaktionen, bei denen ein Proton, ein Neutron und ein Pion beteiligt sind (die „Exponenten“ bezeichnen die Ladungsmenge):



Viele grundlegende Ideen in der Physik lassen sich als „**Erhaltungsprinzipien**“ formulieren. Bei den oben genannten Kernreaktionen bleibt z. B. die Ladung „erhalten“: Das Universum hat vor und nach der Wechselwirkung die gleiche **Gesamtladung**.

**Elementarteilchen** sind unteilbare subatomare Teilchen und die **kleinsten bekannten Bausteine der Materie**. Aus der Sicht der theoretischen Physik sind sie die geringsten Anregungsstufen bestimmter Felder (nach dem heutigen durch Experimente gesicherten Wissen, das im **Standardmodell** der Elementarteilchenphysik zusammengefasst ist). Die Materie und die Kraft- und Strahlungsfelder der starken, der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung bestehen aus diesen Teilchen in verschiedenen Zusammensetzungen und Zuständen. Beim Gravitationsfeld und den Gravitationswellen sind die zugrundeliegenden Teilchen – die Gravitonen – bislang hypothetisch, bei der Dunklen Materie sind sie noch völlig unbekannt.



Elementarteilchen des Standard-Modells. Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarteilchen>.

# Kontrollpunkt 5

1. Sieh dir das Periodensystem auf einer der vorangehenden Folien an. Wie üblich gibt jeder Eintrag die „Ordnungszahl“ (die Anzahl der Protonen im Kern; 8 für Sauerstoff, 92 für Uran) und das „Atomgewicht“ in Gramm pro Mol an, die der Anzahl der Protonen plus Neutronen in einem Kern entspricht, gemittelt über die verschiedenen Isotope für dieses Element, die eine unterschiedliche Anzahl von Neutronen enthalten. (1) Wie viele Protonen und Neutronen enthält ein typischer Siliziumkern (Si)? (2) In einem Zinn-Kern (Sn)? (3) In einem Goldkern (Au)? (4) In einem Thoriumkern (Th)? (5) Erkennst Du eine Tendenz?



# Die schwache Wechselwirkung

Die vierte fundamentale Wechselwirkung wird als „**schwache Wechselwirkung**“ bezeichnet, weil sie **Kernwechselwirkungen** beinhaltet, die **viel schwächer** sind **als die starke Wechselwirkung** oder die elektromagnetische Wechselwirkung. Eine Besonderheit vieler schwacher Wechselwirkungen ist die **Erzeugung von Neutrinos**, geisterhaften Teilchen, die so schwach mit gewöhnlicher Materie wechselwirken, dass fast alle Neutrinos, die bei Fusionsreaktionen in der Sonne ausgesandt werden, die Erde durchdringen, als wäre sie völlig transparent. Obwohl etwa 100 Billionen Sonnenneutrinos pro Sekunde durch deinen Körper gehen, wird im Durchschnitt nur eines der Neutrinos während deines gesamten Lebens eine schwache Wechselwirkung mit deinem Körper „veranstalten“! Ein Neutrino wird mit dem griechischen Kleinbuchstaben  $\nu$  dargestellt.

Die schwache Wechselwirkung ist für die **Instabilität** eines „**freien Neutrons**“ verantwortlich, also eines Neutrons, das sich außerhalb eines Kerns befindet. Mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von etwa 15 Minuten zerfällt ein freies Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino (der Balken über dem Symbol bezeichnet ein Antiteilchen):



Derselbe Prozess findet in einigen radioaktiven Kernen statt, in denen sich ein Neutron unter Aussendung eines Elektrons und eines Antineutrinos in ein Proton verwandelt, wobei das neue Proton im Kern gebunden bleibt. Dies bedeutet, dass sich der Kern in den eines anderen Elements verwandelt hat, mit einem Proton mehr als zuvor. Eine solche **Kernumwandlung** wird als „**Betazerfall**“ bezeichnet - die dabei emittierten Elektronen nannte man früher „**Betastrahlen**“. Betazerfall tritt **in schweren Elementen** auf, die einen **Neutronenüberschuss** haben.

In der Sonne führen **Fusionsreaktionen** zur **Emission von Neutrinos**. **Sonnenneutrinos** wurden auf der Erde nachgewiesen, obwohl die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung zwischen einem Neutrino und einem gewöhnlichen Objekt äußerst gering ist. Zu diesem Zweck baute der amerikanische Physiker Raymond Davis in den späten 1960er Jahren tief in der Homestake-Mine in Lead, South Dakota, einen riesigen Behälter mit der flüssigen Reinigungschemikalie Perchlorethylen. Sonnenneutrinos wechselwirkten dort gelegentlich mit einem Chlorkern  ${}_{17}^{35}\text{Cl}$ , um ein Neutron in ein Proton zu verwandeln, wodurch sich der Kern in einen Argonkern  ${}_{18}^{35}\text{Ar}$  verwandelte:



Davis sammelte das in dem Behälter erzeugte Argon als Indikator dafür, wie viele Neutrinos mit den Chlorkernen interagiert hatten.

# Die Impulserhaltung

*(en: conservation of (linear) momentum)*

Nachdem wir nun die Reziprozität von Gravitations- und elektrischen Kräften verstanden haben, können wir den **Grundsatz der Impulserhaltung** verstehen, der eine sehr allgemeine Aussage des Prinzips Impuls ist. Das Impulsprinzip  $\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\text{net}}\Delta t$  sagt voraus, wie sich der **Impuls eines Systems** aufgrund von Kräften verändert, die von Objekten in der Umgebung dieses Systems auf das System ausgeübt werden. **Was aber geschieht mit dem Impuls von Objekten in der Umgebung?** Bei allen vier Arten von Wechselwirkungen, der Gravitation, der elektrischen (elektromagnetischen), der starken und der schwachen Wechselwirkung, wird beobachtet, dass **ein vom System gewonnener Impuls der Umgebung verloren geht**. Wir sagen dann, dass der **Impuls „konserviert“** (erhalten) wird. Das heißt, man kann **keinen Impuls erzeugen oder zerstören**, man kann ihn **nur von einem Objekt/System auf ein anderes übertragen**.

$$\Delta \vec{p}_{\text{sys}} + \Delta \vec{p}_{\text{umg}} = \vec{0}$$

„In einem geschlossenen System (das keine Materie mit seiner Umgebung austauscht und auf das keine äußeren Kräfte einwirken) bleibt der Gesamtimpuls konstant. Diese Tatsache ist als Impulserhaltungssatz bekannt: Der Impuls des Universums ist konstant.“

**Erhaltung des (Gesamt-) Impulses**

In unseren Anwendungen des Prinzips Impuls haben wir oft ein einzelnes Objekt als System von Interesse gewählt. Wir haben jedoch gesehen, dass es in manchen Situationen sehr nützlich sein kann, ein System zu wählen, das aus zwei oder mehr interagierenden Objekten besteht. (Wir können jedes beliebige Objekt oder jede beliebige Menge von Objekten als System wählen. Manchmal ist die eine Wahl nützlicher als die andere, aber jede Wahl ist gültig.) Wir nennen **Kräfte „extern“**, wenn sie **auf Objekte im System durch Objekte in der Umgebung** ausgeübt werden. Wir nennen **Kräfte „intern“**, wenn es sich um Kräfte handelt, die **zwischen zum System gehörenden Objekten ausgeübt** werden.

$$\Delta \vec{p}_{\text{sys}} = \vec{p}_{f,\text{sys}} - \vec{p}_{i,\text{sys}} = \vec{F}_{\text{net}} \Delta t, \text{ mit } \vec{p}_{\text{sys}} = \sum_k \vec{p}_k \text{ und } \vec{F}_{\text{net}} = \sum_l \vec{F}_l$$

Daraus folgt, dass wir, wenn wir die äußeren Kräfte kennen, Rückschlüsse auf die Impulsänderung des Systems in einem bestimmten Zeitintervall ziehen können, ohne uns um die Einzelheiten der Wechselwirkungen der Objekte innerhalb des Systems untereinander kümmern zu müssen.



$$\Delta \vec{p}_1 = \left( \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} \right) \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \left( \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} + \vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} \right) \Delta t$$

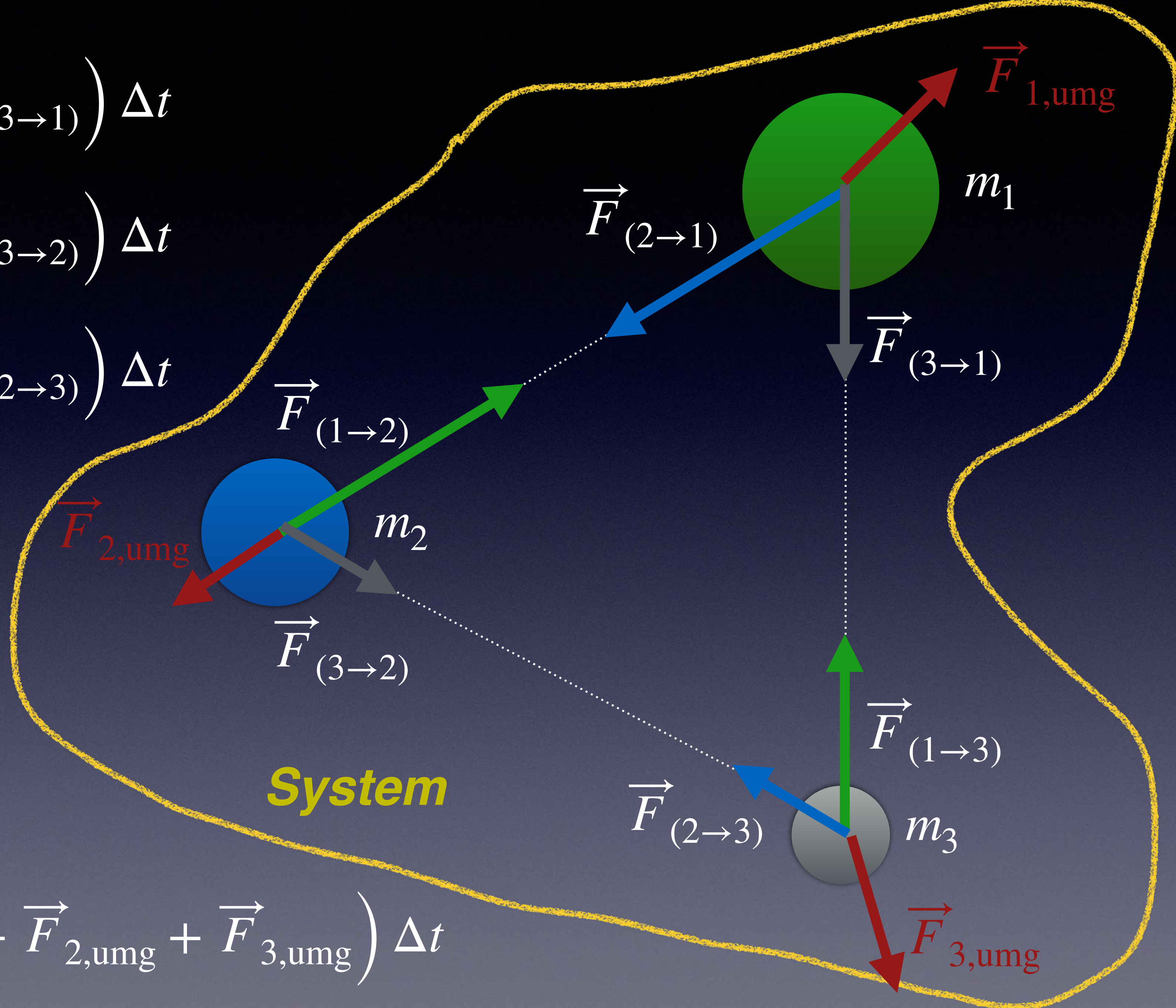
$$\Delta \vec{p}_3 = \left( \vec{F}_{3,\text{umg}} + \vec{F}_{(1 \rightarrow 3)} + \vec{F}_{(2 \rightarrow 3)} \right) \Delta t$$

$$\vec{F}_{(2 \rightarrow 1)} = - \vec{F}_{(1 \rightarrow 2)}$$

$$\vec{F}_{(3 \rightarrow 1)} = - \vec{F}_{(1 \rightarrow 3)}$$

$$\vec{F}_{(3 \rightarrow 2)} = - \vec{F}_{(2 \rightarrow 3)}$$

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 + \Delta \vec{p}_3 = \left( \vec{F}_{1,\text{umg}} + \vec{F}_{2,\text{umg}} + \vec{F}_{3,\text{umg}} \right) \Delta t$$



Die Bedeutung der letzten Gleichung auf der vorangehenden Folie liegt darin, dass durch die **Reziprozität** alle inneren Kräfte (die Kräfte, die die verschiedenen Objekte im System aufeinander ausüben) eliminiert wurden; **innere Kräfte können die Bewegung des Systems als Ganzes nicht beeinflussen**. Alles, was bei der Bestimmung der Änderung des (Gesamt-) Impulses zählt, ist die externe Nettokraft  $\sum_k \vec{F}_{k,\text{umg}}$ . Die Gleichung hat damit die gleiche Form wie das Impulsprinzip für ein einzelnes Objekt.

Es sei hier allerdings noch einmal darauf hingewiesen, dass unter bestimmten Umständen bewegte geladene Teilchen Kräfte aufeinander ausüben können, die nicht reziprok, also in entgegengesetzter Richtung wirken. In solchen Fällen bleibt dennoch der kombinierte Impuls der Teilchen und des elektromagnetischen Feldes erhalten.

Der Impuls eines aus mehreren Objekten aufgebauten Systems kann durch die Geschwindigkeit  $\vec{v}_M$  des „Massenschwerpunkts“ sowie dessen gesamter Masse  $M = \sum m_k$  ausgedrückt werden. Der Massenschwerpunkt ist wie folgt definiert:

$$\vec{r}_M = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k}$$

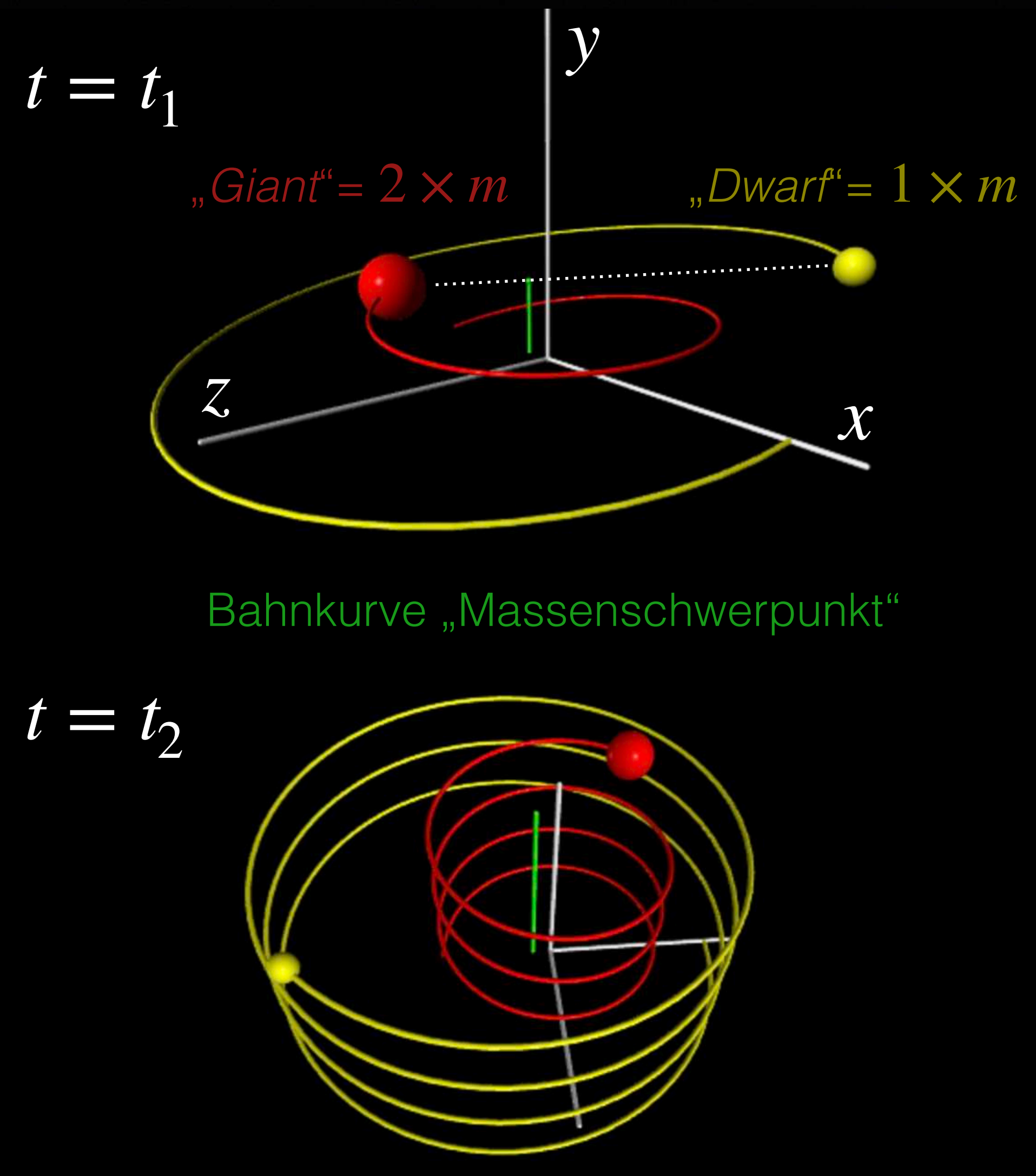
Daraus folgt unter der Annahme zeitlich konstanter Massen:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M = \frac{\sum_k m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}}{\sum_k m_k} = \frac{\sum_k m_k \vec{v}_k}{M}$$

Für Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ( $\gamma \approx 1$ ) folgt daraus

$$\vec{p}_{\text{sys}} \approx M \vec{v}_M$$

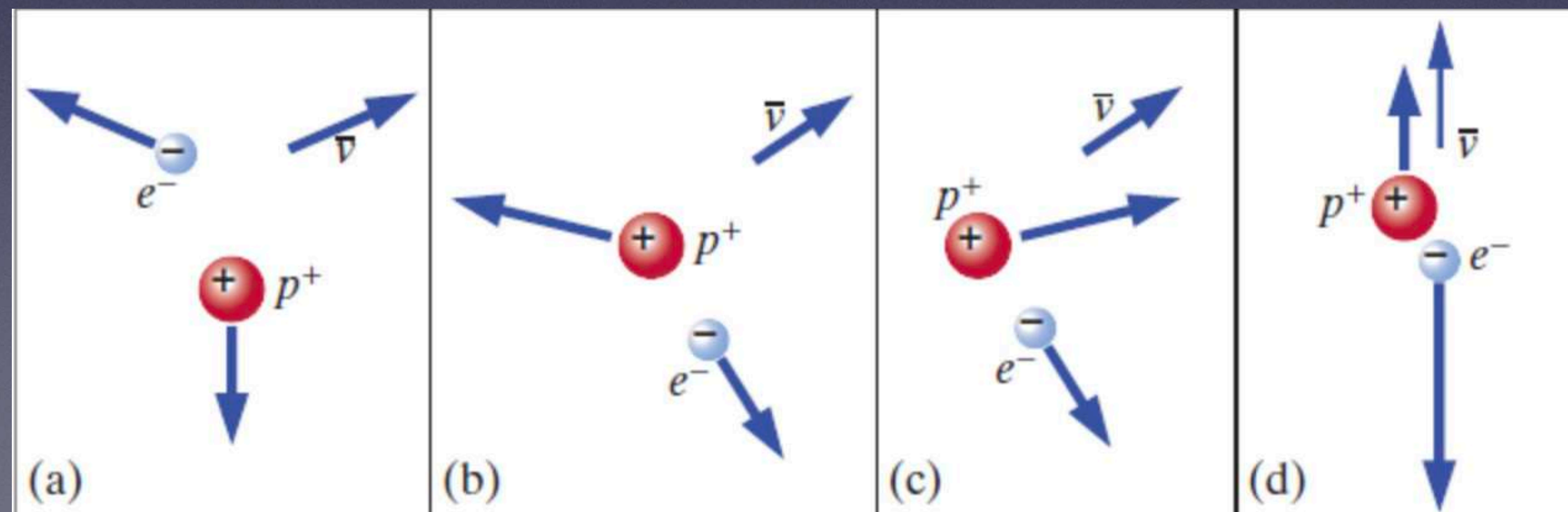
Wenn die Wechselwirkungen mit der Umgebung eines Doppelsterns vernachlässigbar sind, ändert sich die Geschwindigkeit des Massenschwerpunkts nicht, sondern bleibt konstant, während der Doppelstern durch den Raum driftet (oder ist null, wenn der Gesamtimpuls des Doppelsterns null ist). Die nebenstehende Abbildung zeigt die Bewegung eines solchen Systems mit konstanter Drift. Die beiden Sterne bewegen sich auf einer Schraubenlinie um den (gemeinsamen) Massenschwerpunkt, der näher am massereichen Stern liegt.



Bahnkurven der Objekte eines Doppelsternsystems unter dem Einfluss der Gravitation. Konstante Drift der beiden Himmelskörper in +y-Richtung.

# Kontrollpunkt 6

1. Ein System besteht aus einem Block der Masse  $m_1 = 2 \text{ kg}$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1 = \langle -3, 4, 0 \rangle \text{ m/s}$  bewegt, und einem zweiten Block mit  $m_2 = 5 \text{ kg}$  Masse, der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_2 = \langle 2, 6, 0 \rangle \text{ m/s}$  bewegt. Berechne die Geschwindigkeit  $\vec{v}_M$  des Massenschwerpunkts des Systems, unter der Annahme  $\vec{p}_{\text{sys}} = M\vec{v}_M$ .
2. Welche der folgenden Zerfalls-Reaktionen eines ruhenden Neutrons sind nicht möglich? Die Pfeile stehen für den Impuls.

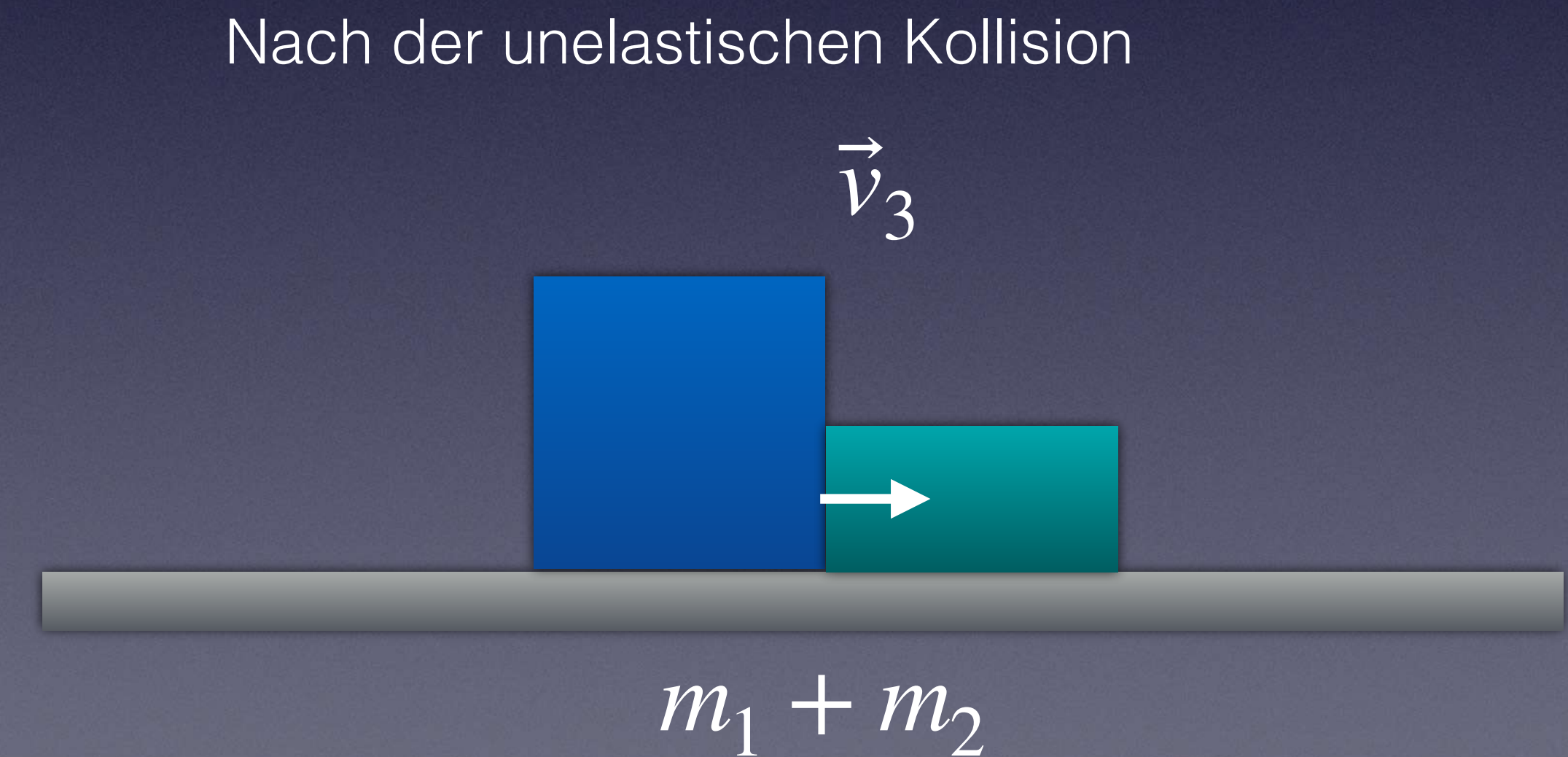
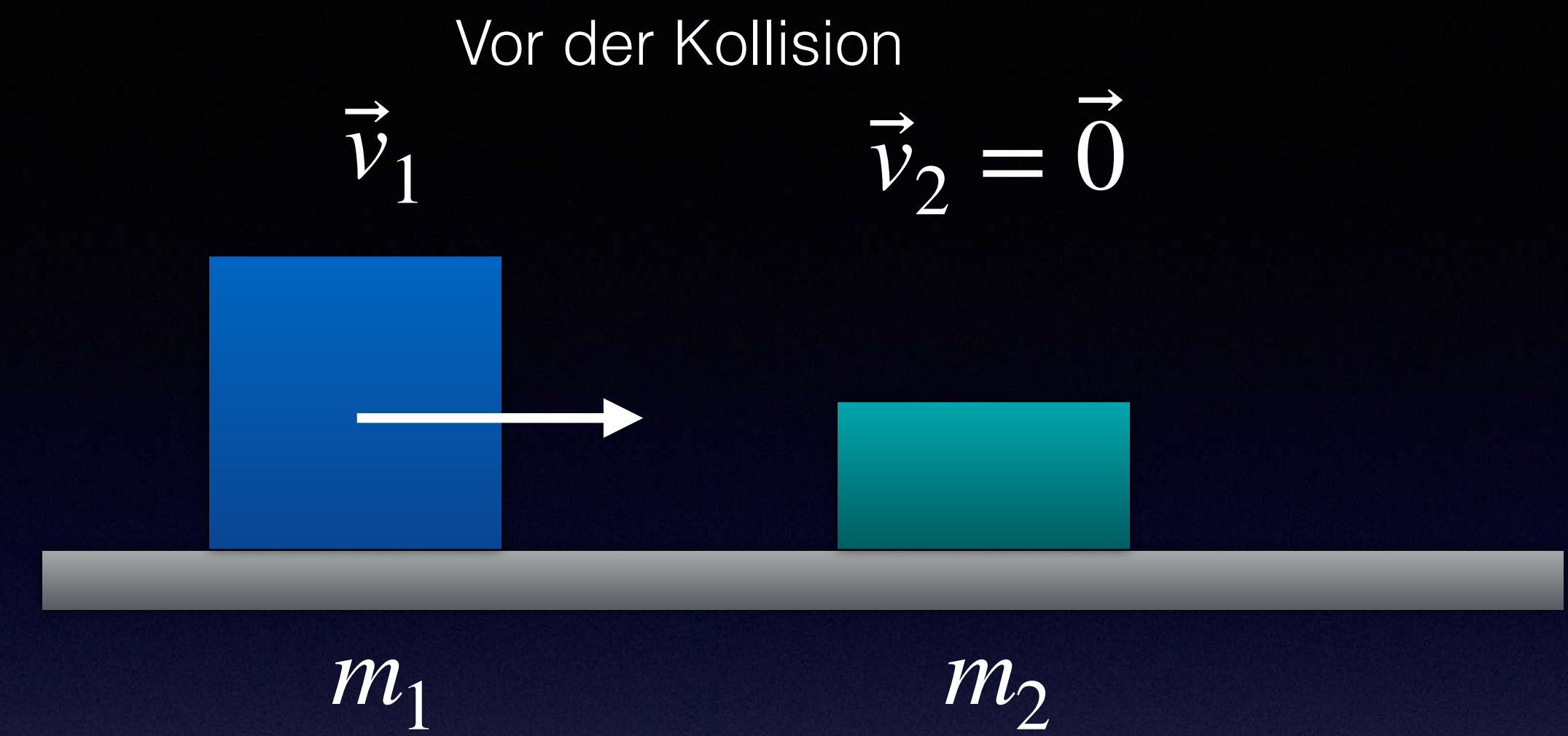


# Kollisionen: Vernachlässigbare externe Kräfte

Ein Ereignis wird als „**Kollision**“ bezeichnet, wenn es sich um eine **Wechselwirkung** handelt, die in einer relativ **kurzen Zeit** stattfindet und eine **große Auswirkung auf die Impulse der Objekte** hat, verglichen mit den Auswirkungen anderer Wechselwirkungen während dieser kurzen Zeit. Bei einer Kollision kommt es nicht unbedingt zu einem tatsächlichen physischen Kontakt zwischen den Objekten, die über weitreichende Kräfte wie die Gravitationskraft oder die elektrische Kraft in Wechselwirkung treten können. Ein **Beispiel**: Ein Raumschiff wird auf seinem Weg zum Saturn in der Nähe des Jupiters abgelenkt, und der Jupiter übt für eine relativ kurze Zeit eine große Anziehungskraft aus (en: ***Swing-by, slingshot, gravity-assist***). Während dieser kurzen Zeit sind die Auswirkungen der anderen Planeten vernachlässigbar.

Später werden wir noch sehen, dass neben dem **Impuls** auch **Energie** und **Drehimpuls Erhaltungsgrößen** sind. Die meisten Größen, einschließlich der Geschwindigkeit, zählen jedoch nicht zu den Erhaltungsgrößen. Betrachten wir einen Zusammenstoß zwischen zwei Blöcken auf Eis (mit geringer Reibung). Ein Block befindet sich zunächst in Ruhe ( $\vec{v}_2 = \vec{0}$ ) und der andere bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$ . Nach der Kollision bewegen sie sich gemeinsam mit der Endgeschwindigkeit  $\vec{v}_3$  weiter. Für  $\gamma \approx 1$  erhalten wir:

$$\vec{v}_3 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$



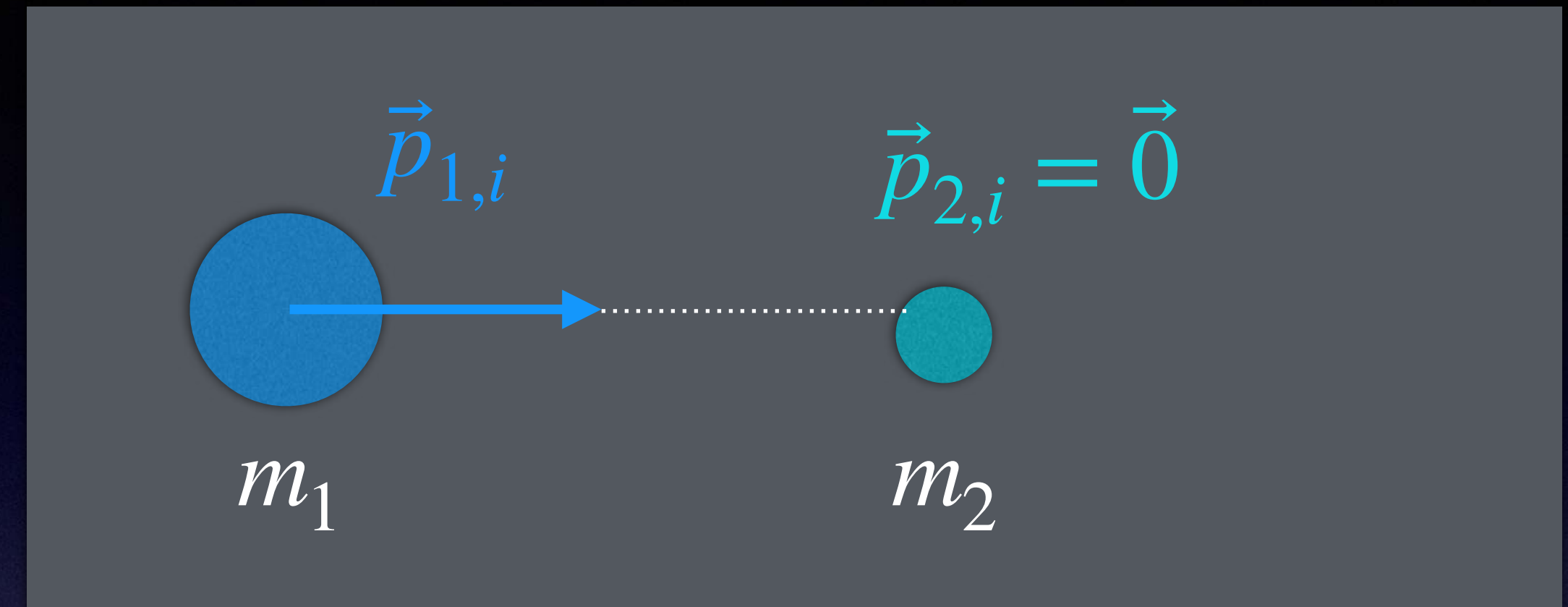


Da die beiden Blöcke im Beispiel auf der vorangehenden Folie sich im Anschluss an die Kollision gemeinsam weiter bewegten, hatten wir genügend Informationen, um die Endgeschwindigkeit zu bestimmen: wir hatten eine Gleichung mit nur einer unbekanntem (Vektor-) Größe. In komplexeren Situationen werden wir feststellen, dass wir manchmal nicht genug Informationen haben, um alle unbekanntem Größen zu bestimmen, indem wir *nur* das Impulsprinzip anwenden.

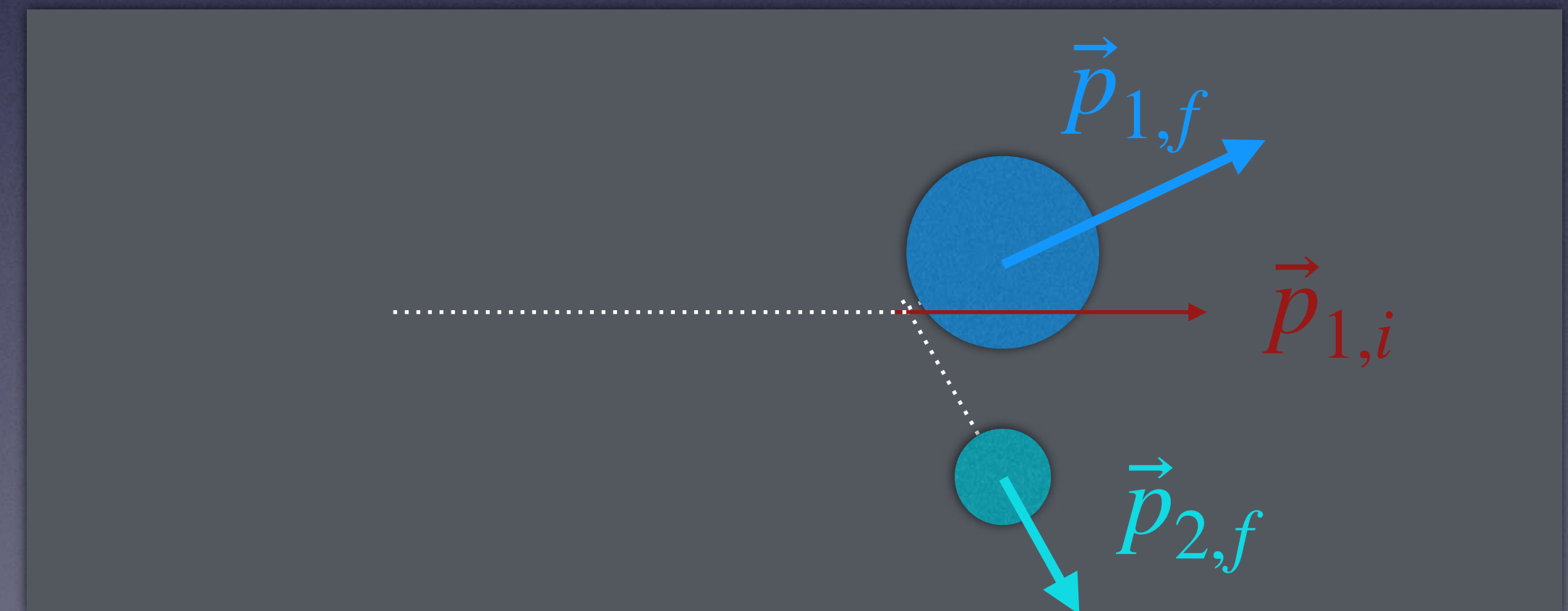
$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

In diesem Beispiel können wir die beiden rechts stehenden (Vektor-) Größen nur mit Hilfe einer weiteren Annahme bestimmen.

Vor der Kollision



Nach der Kollision



# Kontrollpunkt 7

1. Du und dein Freund halten jeweils einen Klumpen nassen Ton in der Hand. Jeder der Klumpen hat eine Masse von  $20\text{ g}$ . Ihr werft jeweils euren Klumpen Ton in die Luft, wo die Klumpen zusammenstoßen und zusammenkleben. Unmittelbar vor dem Aufprall war die Geschwindigkeit des einen Klumpens  $\langle 5,2, -3 \rangle\text{ m/s}$ , und die Geschwindigkeit des anderen Klumpens war  $\langle -3,0, -2 \rangle\text{ m/s}$ . (1) Wie groß war der Gesamtimpuls der Klumpen unmittelbar vor dem Aufprall? (2) Wie groß ist der Impuls des zusammengeklebten Klumpens unmittelbar nach dem Aufprall? (3) Wie hoch ist seine Geschwindigkeit?

# Newton und Einstein

**Newton** erkannte die **Gravitationskraft** und stellte sie algebraisch dar, konnte aber keine Erklärung für sie liefern. Er begnügte sich damit zu zeigen, dass sie die **Bewegung der Planeten** korrekt vorhersagte, und das war ein großer Fortschritt, der eigentliche Beginn der modernen Wissenschaft.

**Einstein** machte einen weiteren großen Schritt, indem er im Rahmen seiner Allgemeinen Relativitätstheorie eine tiefer gehende Erklärung für die Schwerkraft lieferte. Er erkannte, dass es möglich war, sich die Wirkung der Sonne so vorzustellen, dass sie Raum und Zeit (!) so krümmt, dass sich die Planeten so bewegen, wie sie es tun. Die **Gleichungen** in Einsteins **Allgemeiner Relativitätstheorie** ermöglichen es, die **Krümmung von Raum und Zeit durch massive Objekte zu berechnen** und vorherzusagen, wie sich andere Objekte in diesem veränderten Raum und in dieser veränderten Zeit bewegen werden.

Darüber hinaus sagt Einsteins **Allgemeine Relativitätstheorie** einige winzige **Effekte** genau voraus, die die Newtonsche Gravitationskraft nicht erfasst, wie z. B. die leichte **Ablenkung des Lichts durch Gravitation** bei einer Passage nahe der Sonnenoberfläche. Sie erklärt auch einige bizarre großräumige **Phänomene** wie **schwarze Löcher** und die beobachtete **Ausdehnung des Raums** zwischen den Galaxien.

Die zuvor von Einstein formulierte **Spezielle Relativitätstheorie** zeigte, dass sich Licht oder Informationen maximal nur mit **Lichtgeschwindigkeit** (des Vakuums) bewegen kann. Das Newtonsche Gravitationsgesetz hängt aber nur von der Entfernung zwischen den Objekten, nicht aber von der Zeit ab. Würde also ein Objekt plötzlich weggezogen, so sollte auch seine Kraft auf ein anderes Objekt augenblicklich verschwinden. Ein Widerspruch, der erst mit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie aufgelöst wurde.

Da die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sehr schwierig zu handhaben sind und die Newtonsche Gravitationskraft für die meisten Zwecke sehr gut geeignet ist, werden wir in diesen Folien den Newtonschen Ansatz für die Gravitation verwenden. Du solltest dir jedoch darüber im Klaren sein, dass man für die genauesten Berechnungen die Allgemeine Relativitätstheorie verwenden muss!

So müssen beispielsweise die hochpräzisen **Atomuhren** in den Satelliten, aus denen das **Global Positioning System** (GPS) besteht, ständig anhand von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie korrigiert werden. Andernfalls würden die GPS-Positionen nach nur einem Tag Betrieb um mehrere Kilometer falsch sein!

# Vorhersage der Zukunft komplexer Systeme

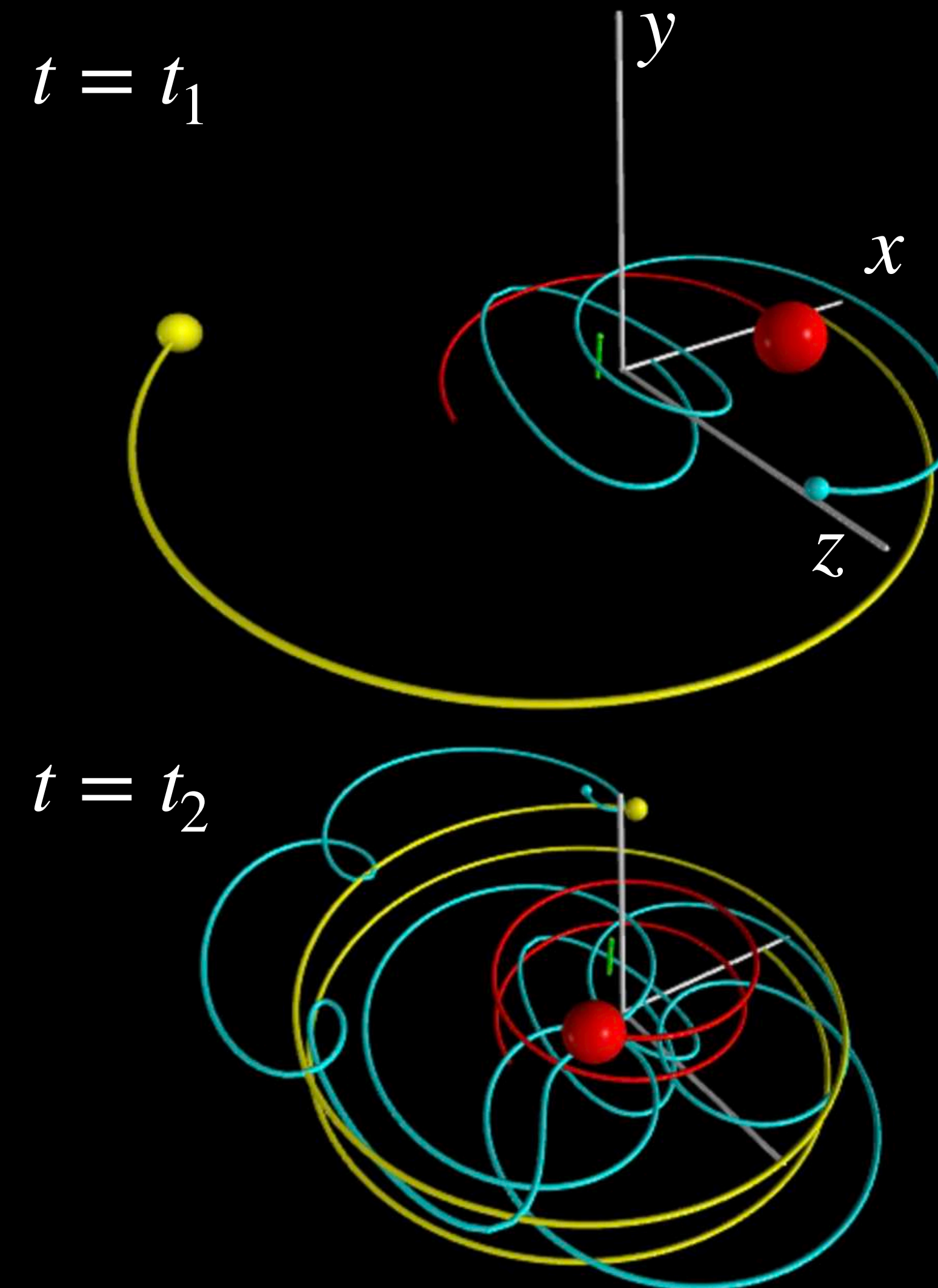
Mit Hilfe der Newtonschen Gesetze und der numerischen Integration können wir versuchen, die **Zukunft einer Gruppe von Objekten** vorherzusagen, die hauptsächlich durch die Schwerkraft miteinander interagieren, wie z. B. das Sonnensystem, das aus der Sonne, den Planeten, Monden, Asteroiden, Kometen und so weiter besteht. Es gibt aber auch andere Wechselwirkungen, die nicht auf der Gravitation beruhen. Der Strahlungsdruck des Sonnenlichts bewirkt, dass sich der Schweif eines Kometen von der Sonne wegbewegt. Ströme geladener Teilchen (der „Sonnenwind“) von der Sonne treffen auf die Erde und erzeugen z. B. die Polarlichter. Unser **Sonnensystem als Gruppe** kreist um das Zentrum unserer Milchstraße (Galaxie) und diese, „unsere“ Galaxie steht wieder in gravitativer **Wechselwirkung mit anderen Galaxien** in einem lokalen Galaxienhaufen. Aber Änderungen dieser Geschwindigkeiten, Richtungen und Entfernungen finden im Vergleich zu denen innerhalb des Sonnensystems sehr langsam statt. In sehr guter Näherung können wir diese Wechselwirkungen vernachlässigen, wenn wir das Innenleben des Sonnensystems über kurze Zeiträume studieren.



Wir haben die Bewegung von Planeten und Sternen mit Hilfe des Prinzips Impuls und der Gravitationskraft modelliert. Wir können den gleichen Ansatz verwenden, um die Gravitationswechselwirkungen komplexerer Systeme zu modellieren, an denen drei, vier oder beliebig viele Objekte beteiligt sind, die durch ihre Gravitation miteinander in Wechselwirkung stehen.

Im Prinzip könnten wir diese Techniken nutzen, um die **Zukunft** unseres gesamten Sonnensystems vorherzusagen. Natürlich wäre unsere **Vorhersage nur ein Näherungswert**, da wir endliche Zeitschritte verwenden, die numerische Fehler mit sich bringen, und wir **vernachlässigen verschiedene kleine Wechselwirkungen**. Wir müssten untersuchen, ob die **Vorhersage unseres Modells** eine **vernünftige Annäherung an die tatsächliche Bewegung** unseres realen Sonnensystems ist.

Angenommen, es gibt drei Objekte, die über Gravitation wechselwirken. Während es für die Bewegung von zwei Objekten eine analytische Lösung (nicht numerische) gibt, existiert eine solche für drei Objekte nur bei einigen sehr speziellen Fällen. Eine numerische Integration ist jedoch in gewohnter Weise problemlos möglich. Für ein einzelnes Objekt, das ein sehr massives stationäres Objekt umkreist, oder für zwei Objekte, die sich gegenseitig umkreisen (mit einem Gesamtimpuls von Null), sind die möglichen Bahnkurven nur ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel oder eine Gerade. Die Bewegung eines Dreikörpersystems kann sehr viel komplexer und vielfältiger sein. Indem man also nur ein weiteres Objekt hinzufügt, eröffnet sich eine große Bandbreite an komplexen Verhaltensweisen.

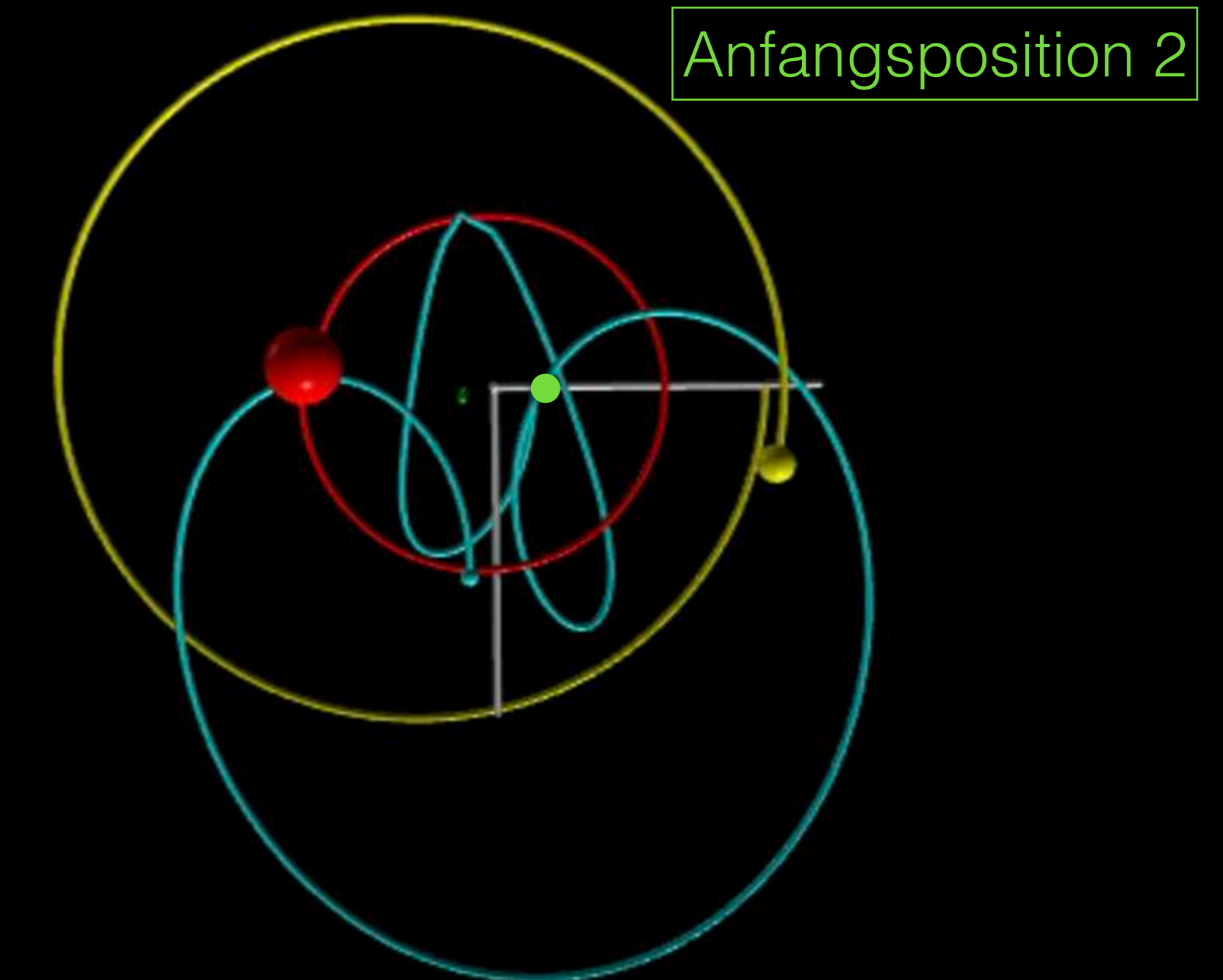
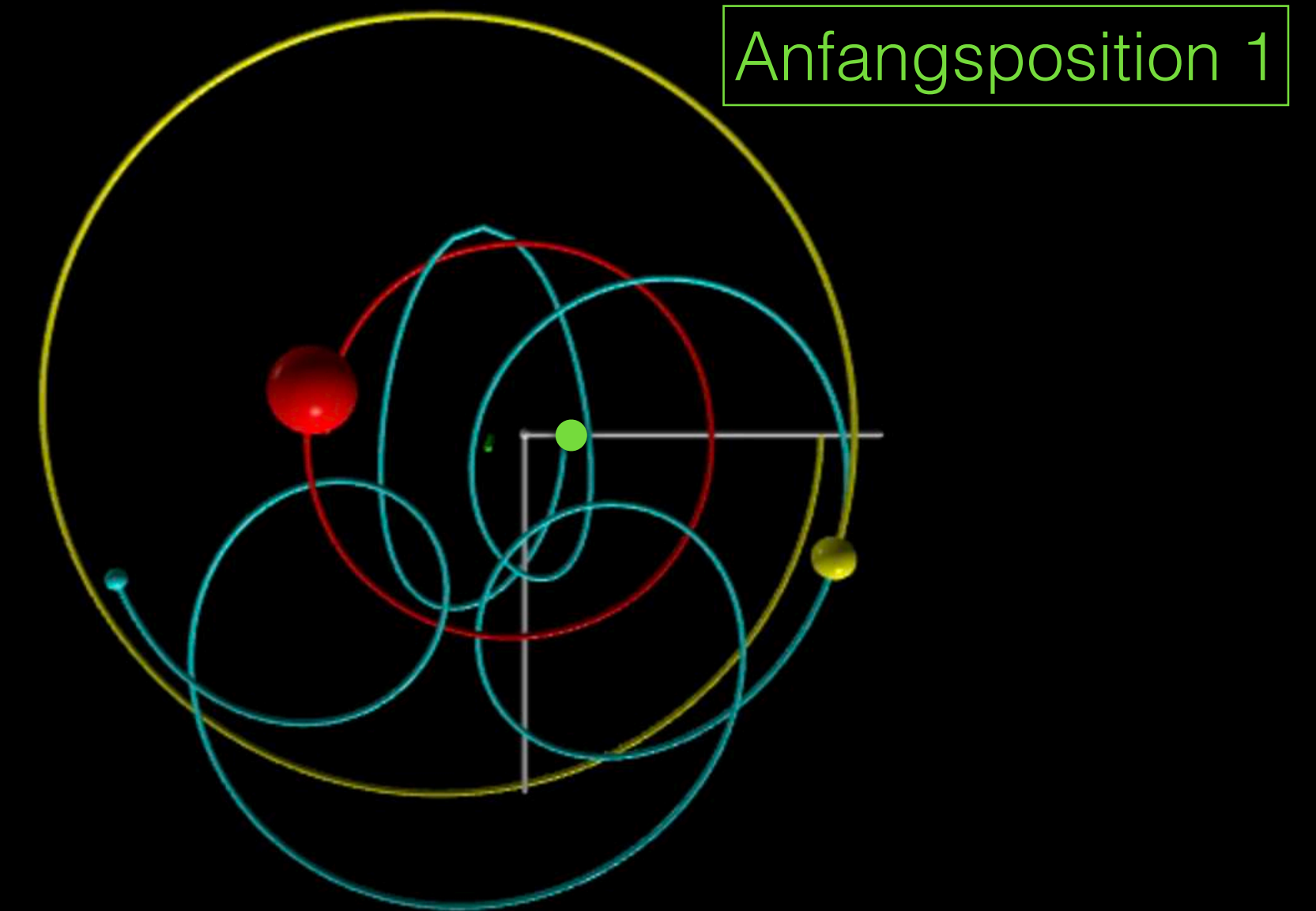


Bahnkurven der Objekte eines Doppelsternsystems und eines leichteren dritten Objekts (cyan) unter dem Einfluss der Gravitation.

# Kontrollpunkt 8

1. Angenommen, du musst ein Problem behandeln, in dem vier Sterne mit gegebenen Anfangsbedingungen (Positionen und Impuls) eine Rolle spielen. Die Nettokraft auf jeden Stern ist die vektorielle Summe der von den jeweils anderen Objekten ausgeübten Gravitationskräfte. (1) Wie viele Kräfte treten insgesamt auf? (2) Wie viele Kräfte müsstest du in jedem Schritt vollständig berechnen, und (3) wie viele Kräfte könntest du einfach durch Umkehrung der Richtung bereits berechneter Kräfte erhalten?

Bei einem **System aus zwei Objekten** führen geringfügige Änderungen der **Anfangsbedingungen** nur zu **geringfügigen Änderungen der Bahnkurven**, z. B. die Umwandlung eines Kreises in eine Ellipse oder einer Ellipse in eine leicht veränderte Ellipse, aber man erhält nie etwas anderes als eine **einfache Bahnkurve**. Nehmen wir ein **massearmes drittes Objekt** hinzu, das sich im Einflussbereich zweier massereicher Objekte befindet, so wird alles deutlich komplexer. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Bahnkurven für zwei leicht voneinander **abweichende Anfangspositionen** des dritten Objekts. Die dargestellten **Bahnkurven** des dritten Objekts (cyan) verlaufen schon nach kurzer Zeit **sehr unterschiedlich**! Diese **Empfindlichkeit** gegenüber den Anfangsbedingungen wird im Allgemeinen umso **extremer**, je **mehr Objekte** man hinzufügt.



# Determinismus

Wenn man die äußere (Netto-) Kraft  $\vec{F}_{\text{net}}$  auf ein Objekt als Funktion seiner Position und seines Impulses (oder seiner Geschwindigkeit) kennt, kann man die zukünftige Bewegung des Objekts durch einfache schrittweise Berechnungen auf der Grundlage des Impulsprinzips vorhersagen. Somit könnte man annehmen, dass das **Universum** ein riesiges Uhrwerk ist (mechanistisches Weltbild), dessen **Zukunft vollständig** durch die gegenwärtigen Positionen und Impulse aller makroskopischen und mikroskopischen Objekte darin **bestimmt** wird. Diese Sichtweise, die als „**Determinismus**“ bezeichnet wird, wurde seit der Antike von Philosophen wie Heraklit, Demokrit oder Mark Aurel und später von Naturwissenschaftlern wie Pierre-Simon Laplace („Laplacescher Dämon“) entwickelt. Die wissenschaftlichen und technologischen Fortschritte des 20. Jahrhunderts haben uns jedoch erkennen lassen, dass der Newtonsche Ansatz zwar zur Vorhersage der langfristigen Zukunft eines einfachen Systems oder der kurzfristigen Zukunft eines komplizierten Systems verwendet werden kann, dass es aber **sowohl praktische als auch theoretische Grenzen für Vorhersagen in den meisten Systemen** gibt.

Ein Grund dafür, dass wir nicht in der Lage sind, die langfristige Zukunft selbst eines einfachen Systems vorherzusagen, liegt in der praktischen Einschränkung unserer Fähigkeit, seine **Anfangsbedingungen** mit ausreichender **Genauigkeit** zu messen. Eine weitere praktische Einschränkung besteht darin, dass wir nicht in der Lage sind, **alle Wechselwirkungen** in unserem Modell zu **berücksichtigen**: Jedes Objekt im Universum steht in Wechselwirkung mit jedem anderen Objekt. Bei der Konstruktion unserer **vereinfachten Modelle ignorieren wir Wechselwirkungen**, deren Ausmaß in jedem Augenblick extrem klein sein kann. Über **längere Zeiträume** hinweg können jedoch selbst sehr **kleine Wechselwirkungen** zu **erheblichen Auswirkungen** führen. Z. B. hat es sich gezeigt, dass die Auswirkungen des Sonnenlichts die Bewegung eines Asteroiden über einen langen Zeitraum spürbar beeinflussen können. Auch wenn wir mit größeren und schnelleren Computern immer mehr Wechselwirkungen in unsere Modelle mit einbeziehen können, werden unsere Modelle die Komplexität der realen Welt niemals vollständig widerspiegeln.

Eine zweite Art von Einschränkung tritt bei Systemen auf, die **extrem empfindlich auf die Anfangsbedingungen reagieren**, wie z. B. für ein System aus drei Objekten mit Gravitations-Wechselwirkung auf einer der vorangehenden Folien gezeigt wurde. In den letzten Jahren haben Wissenschaftler Systeme entdeckt, bei denen jede noch so kleine (infinitesimale) Änderung der Ausgangsbedingungen zum vollständigen Verlust der Vorhersagbarkeit führen kann: Der **Unterschied zwischen den möglichen zukünftigen Bewegungen des Systems divergiert exponentiell mit der Zeit**. Solche Systeme werden als „**chaotisch**“ bezeichnet. So gehen wir z. B. aktuell davon aus, dass das Wetter über einen langen Zeitraum hinweg in diesem Sinne buchstäblich „**unberechenbar**“ ist. Ein populärwissenschaftliches Buch über dieses (relativ) neue Forschungsgebiet ist „Chaos: Making a New Science“, von James Gleick (Penguin Verlag, 1988).



Ferner gibt es verschiedene **Situationen**, die von großem Interesse sind, in denen wir die **Newtonschen Bewegungsgesetze nicht sinnvoll** anwenden können, weil diese klassischen Gesetze das Verhalten physikalischer Systeme nicht angemessen beschreiben. Um Systeme zu modellieren, die aus sehr kleinen Teilchen wie Protonen und Elektronen, Quarks (den Bestandteilen von Protonen und Neutronen) und Photonen aufgebaut sind, muss man die Gesetze der **Quantenmechanik** anwenden. Um die **Gravitationswechselwirkungen** zwischen sehr massiven Objekten **im Detail** zu modellieren, muss man die Grundsätze der **Allgemeinen Relativitätstheorie** anwenden. Angesichts der Kenntnis der Quantenmechanik und der Allgemeinen Relativitätstheorie könnte man annehmen, dass es möglich wäre, ein ähnliches Verfahren wie in diesen Folien anzuwenden und die Zukunft dieser Systeme im Detail vorhersagen. Aber **es scheint jedoch grundlegendere Beschränkungen dafür zu geben, was wir über die Zukunft wissen können.**

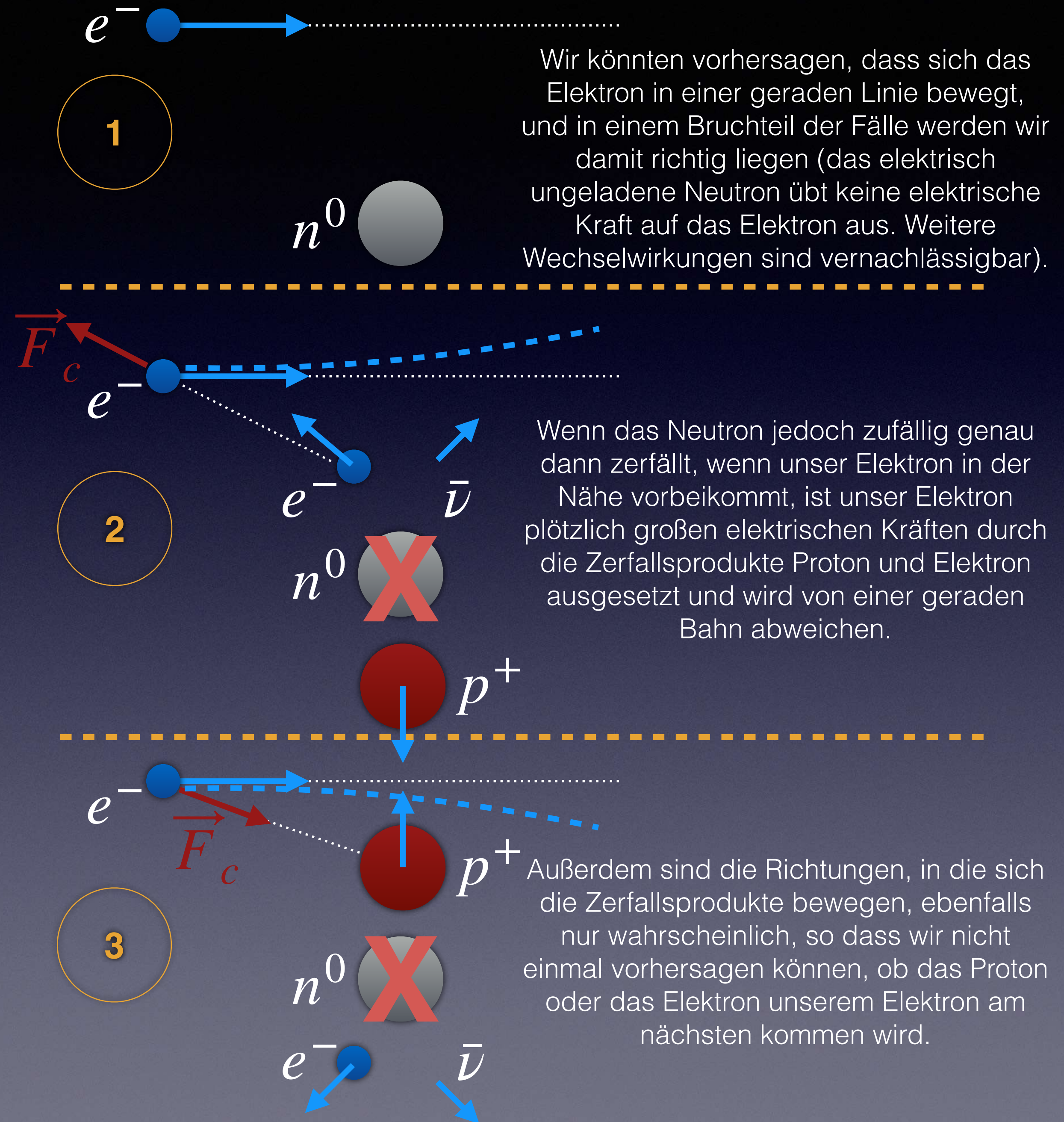
Unser Verständnis der atomaren Welt der Quantenmechanik deutet darauf hin, dass unserer Fähigkeit, die Zukunft vorherzusagen, grundlegende Grenzen gesetzt sind, denn **auf atomarer und subatomarer Ebene ist das Universum selbst nicht deterministisch**. Wir können nicht genau wissen, was zu einem bestimmten Zeitpunkt passieren wird, sondern nur die **Wahrscheinlichkeit**, dass bestimmte Ereignisse innerhalb eines bestimmten Zeitrahmens eintreten werden. Ein einfaches Beispiel mag dies verdeutlichen: Ein freies Neutron (das nicht in einem Kern gebunden ist) ist instabil und zerfällt schließlich in ein positiv geladenes Proton, ein negativ geladenes Elektron und ein elektrisch neutrales Antineutrino:



Die durchschnittliche Lebensdauer eines freien Neutrons beträgt etwa 15 Minuten. Einige Neutronen überleben länger, andere kürzer. Es ist daher bislang **unmöglich, vorherzusagen, wann ein bestimmtes Neutron zerfällt. Es gibt nur eine (bekannte) Wahrscheinlichkeit**, dass das Neutron in der nächsten Mikrosekunde oder in der nächsten oder in der nächsten ... zerfallen wird.

Wenn das Universum wirklich so funktioniert, wie zahlreiche Nachweise zeigen, dann gibt es einen nicht weiter reduzierbaren **Mangel an Vorhersagbarkeit und Determinismus** im Universum selbst. Was unsere eigenen Vorhersagen mit Hilfe des Prinzips Impuls betrifft, so betrachten wir das folgende einfache Szenario: Ein Elektron bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit durch den fast leeren Raum, aber in der Nähe befindet sich ein freies Neutron.

Die nebenstehende Abbildung zeigt drei Möglichkeiten: (1) Das Neutron zerfällt nicht. (2) Das Neutron zerfällt, und das dabei entstehende Elektron verändert die Bahn „unseres“ Elektrons. (3) Das Neutron zerfällt, und das dabei entstehende Proton verändert die Bahn „unseres“ Elektrons.



Die **Heisenbergsche Unschärferelation** besagt, dass es für unsere Kenntnis über den Zustand physikalischer Systeme tatsächliche theoretische Grenzen gibt. Eine quantitative Formulierung bringt zum Ausdruck, dass die Position und der Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig exakt gemessen werden können:

$$\Delta p_x \Delta x \geq h$$

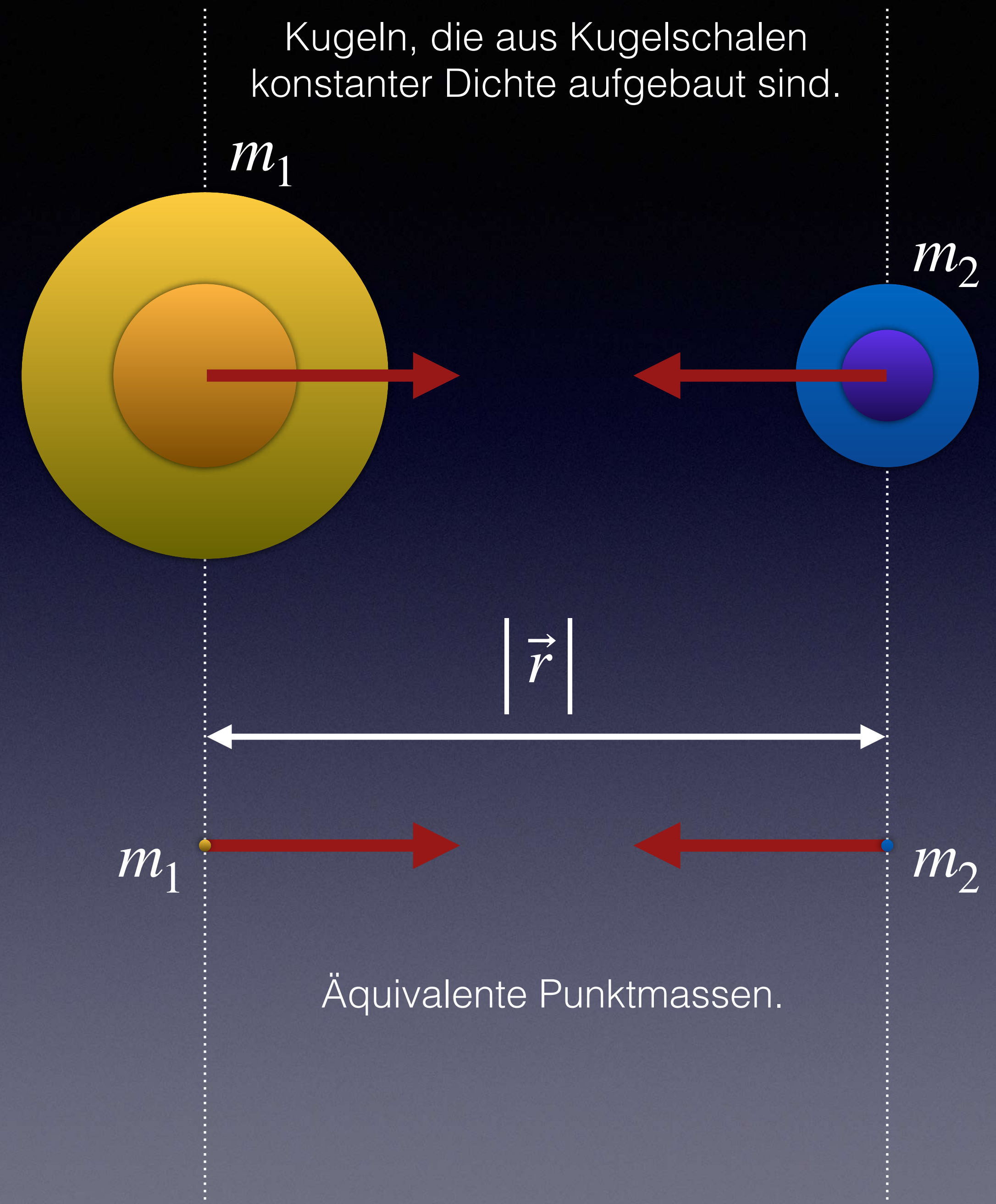
Diese Beziehung besagt, dass das **Produkt** aus der **Unschärfe der Position** und der **Unschärfe des Impulses** größer oder gleich einer Konstanten ist, der so genannten **Planckschen Konstante**  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . Da die Planck-Konstante sehr klein ist, macht sich diese **Einschränkung bei makroskopischen Systemen nicht bemerkbar**, aber bei Objekten, die klein genug sind, um eine **quantenmechanische Beschreibung** zu erfordern, setzt die Unschärferelation **fundamentale Grenzen**.

# Punkte und Kugeln

Der Ausdruck für die Gravitationskraft gilt für Objekte, die „punktförmig“ sind (sehr klein im Vergleich zum Abstand zwischen den Objekten). In späteren Abschnitten werden wir zeigen können, dass **jede hohle Kugelschale mit gleichmäßiger Dichte** so auf äußere Objekte **wirkt, als ob die gesamte Masse der Schale in ihrem Zentrum konzentriert wäre**.

Die **Dichte der Erde** ist nicht einheitlich, da der zentrale Eisenkern eine höhere Dichte hat als die äußeren Schichten. Betrachtet man die Erde jedoch als Schichten hohler Kugelschalen, wie eine Zwiebel, wobei jede Schale eine nahezu gleichmäßige Dichte aufweist, so ergibt sich, dass die Erde für die meisten Zwecke als eine Punktmasse modelliert werden kann, die sich im Zentrum der Erde befindet (für sehr genaue Berechnungen muss man kleine Unregelmäßigkeiten in der Dichte der Erde von Ort zu Ort berücksichtigen).

Dieses Ergebnis ist nicht direkt offensichtlich. Es handelt sich um eine ganz besondere Eigenschaft von  $1/|\vec{r}|^2$ -Kräften, sowohl von Gravitations- als auch von elektrischen Kräften.



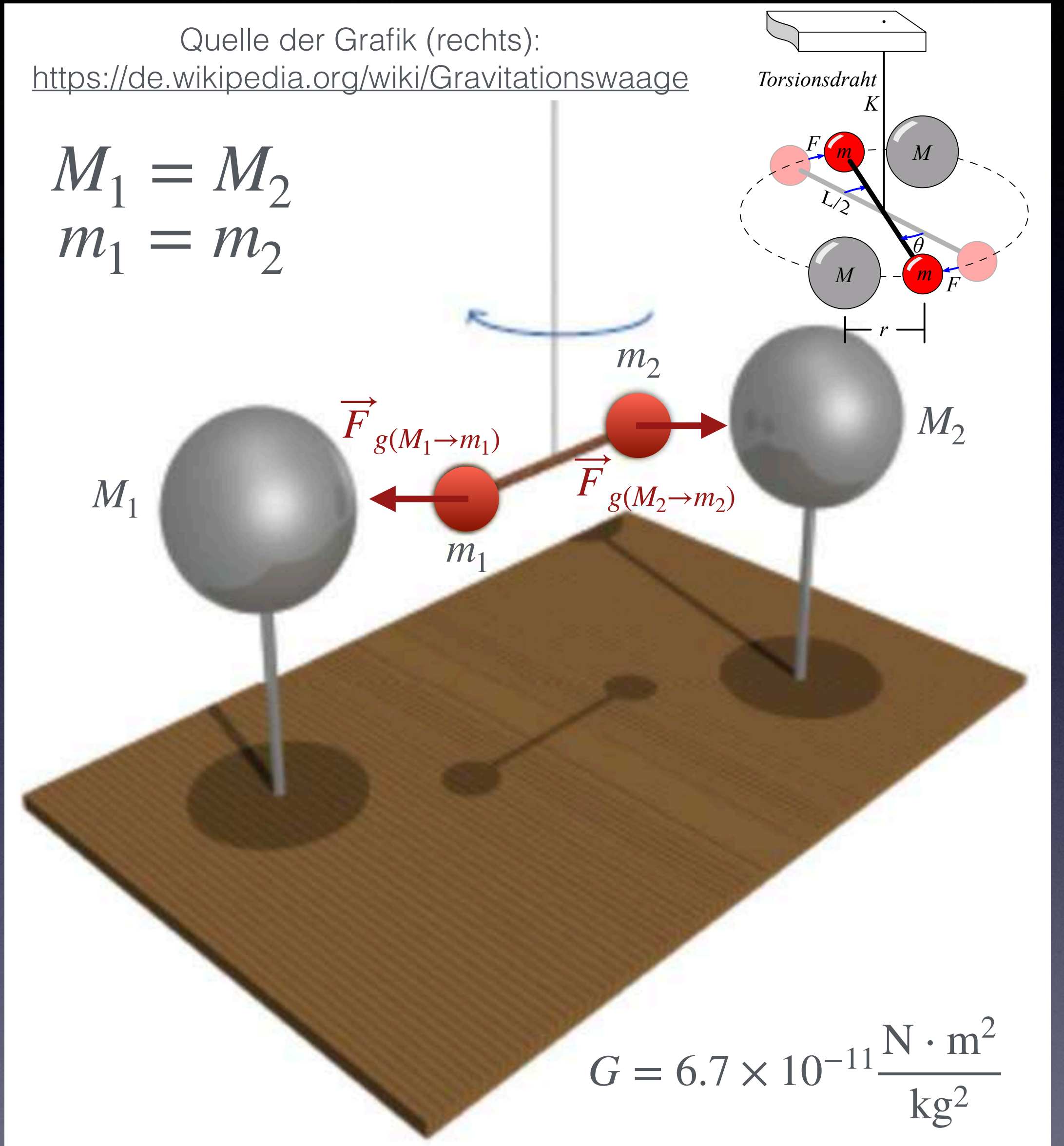
# Messung der Gravitationskonstanten

Für quantitative Vorhersagen und Analysen physikalischer Phänomene, bei denen es zu Wechselwirkungen mit der Schwerkraft kommt, ist die **Kenntnis der universellen Gravitationskonstante  $G$**  erforderlich. In den Jahren 1797-1798 führte **Henry Cavendish** das erste Experiment durch, um einen genauen Wert für die Gravitationskonstante zu bestimmen (siehe nebenstehende Abbildung). Bei dieser Art von Experiment wird ein Stab mit Metallkugeln an beiden Enden an einem dünnen Quarzdraht aufgehängt, der eine „Drehwaage“ darstellt. Aus anderen Messungen ist bekannt, wie groß die in Newton gemessene tangentielle Kraft sein muss, die erforderlich ist, um den Draht um einen bestimmten Winkel zu verdrillen. Große Kugeln werden in die Nähe der aufgehängten Kugeln gebracht, und man misst, wie stark sich der Draht aufgrund der Gravitationswechselwirkungen zwischen den großen Kugeln und den kleinen Kugeln verdreht.

Quelle der Grafik (rechts):  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswaage>

$$M_1 = M_2$$

$$m_1 = m_2$$

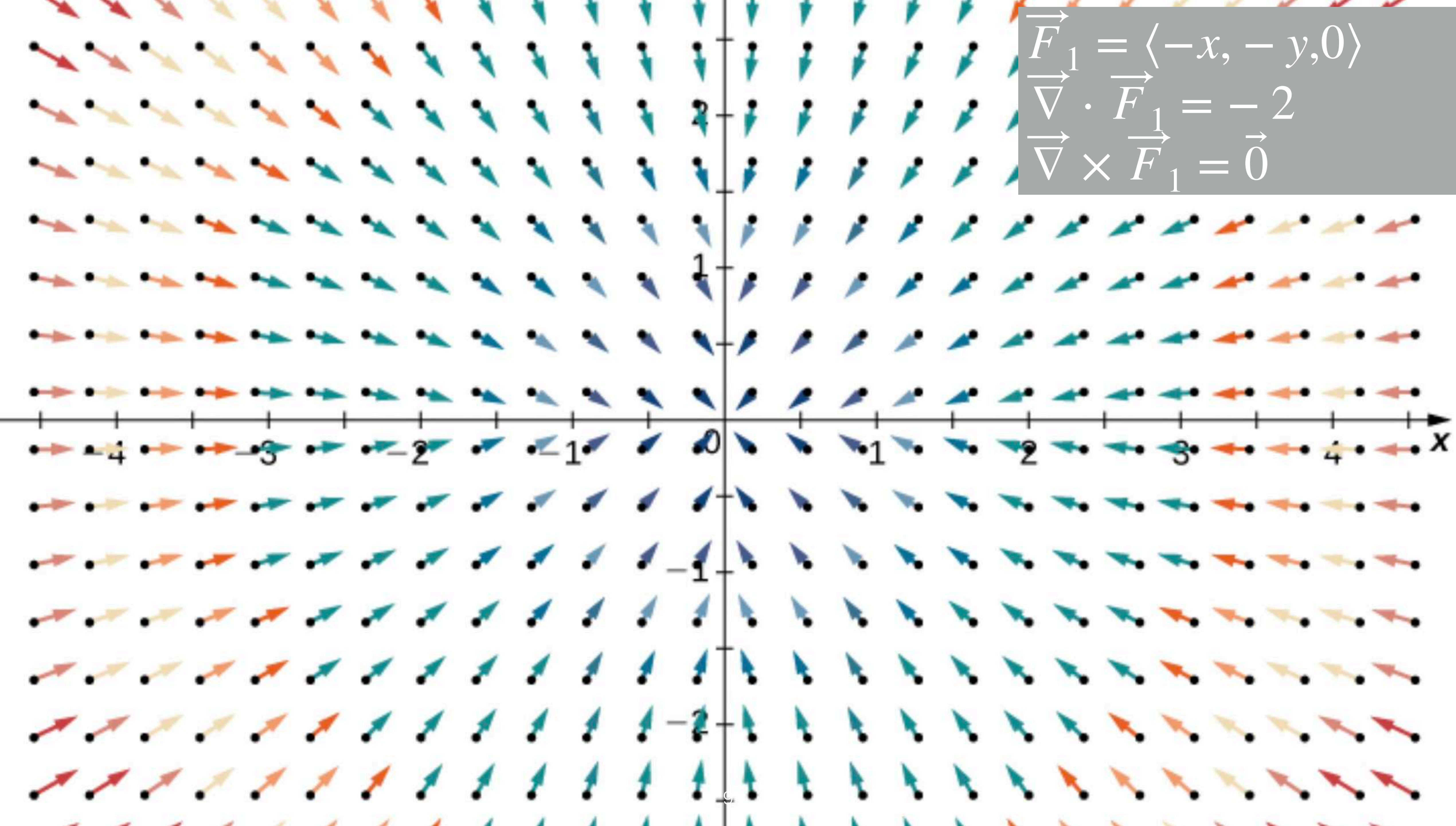


Aufbau des Cavendish-Experiments.

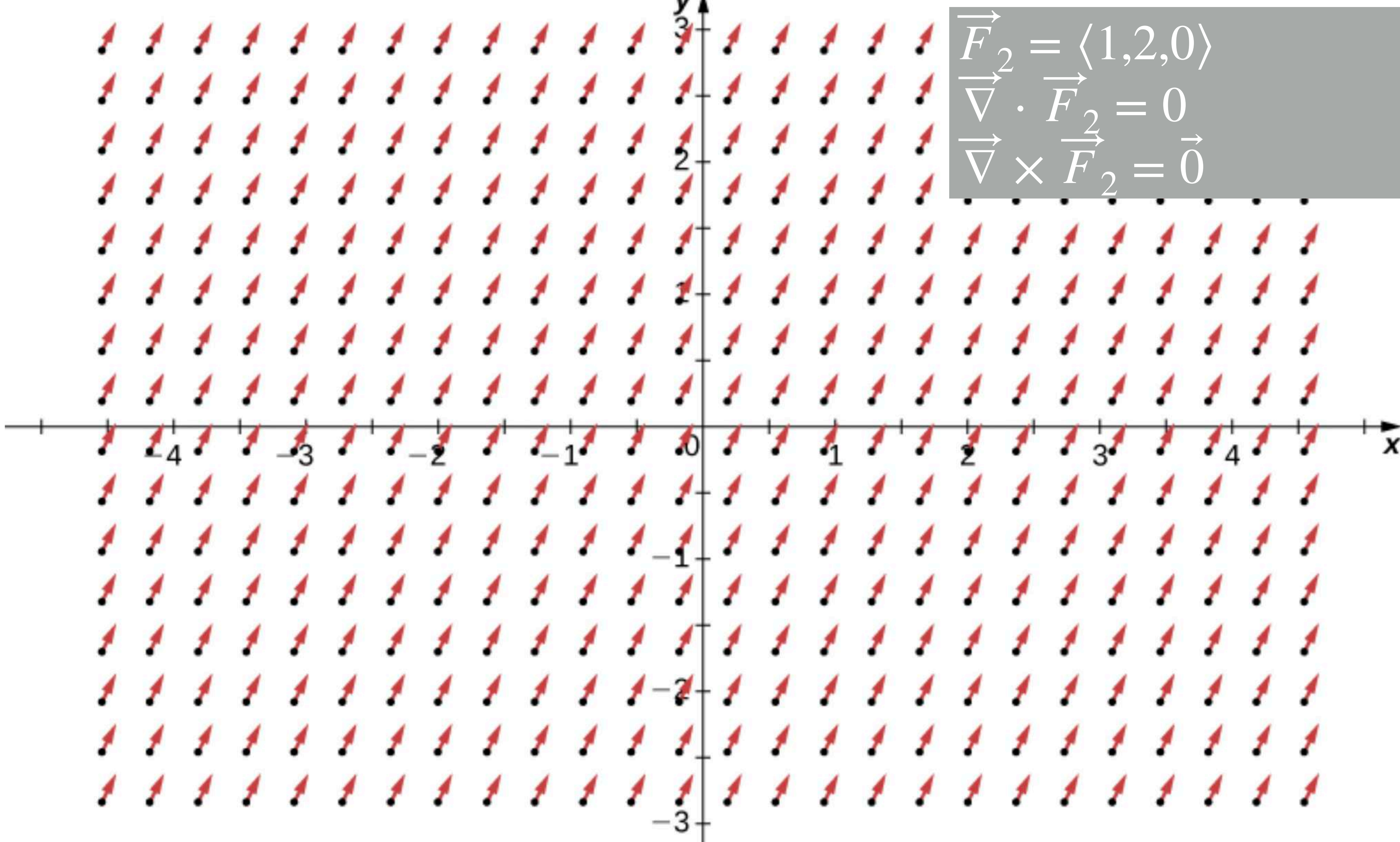


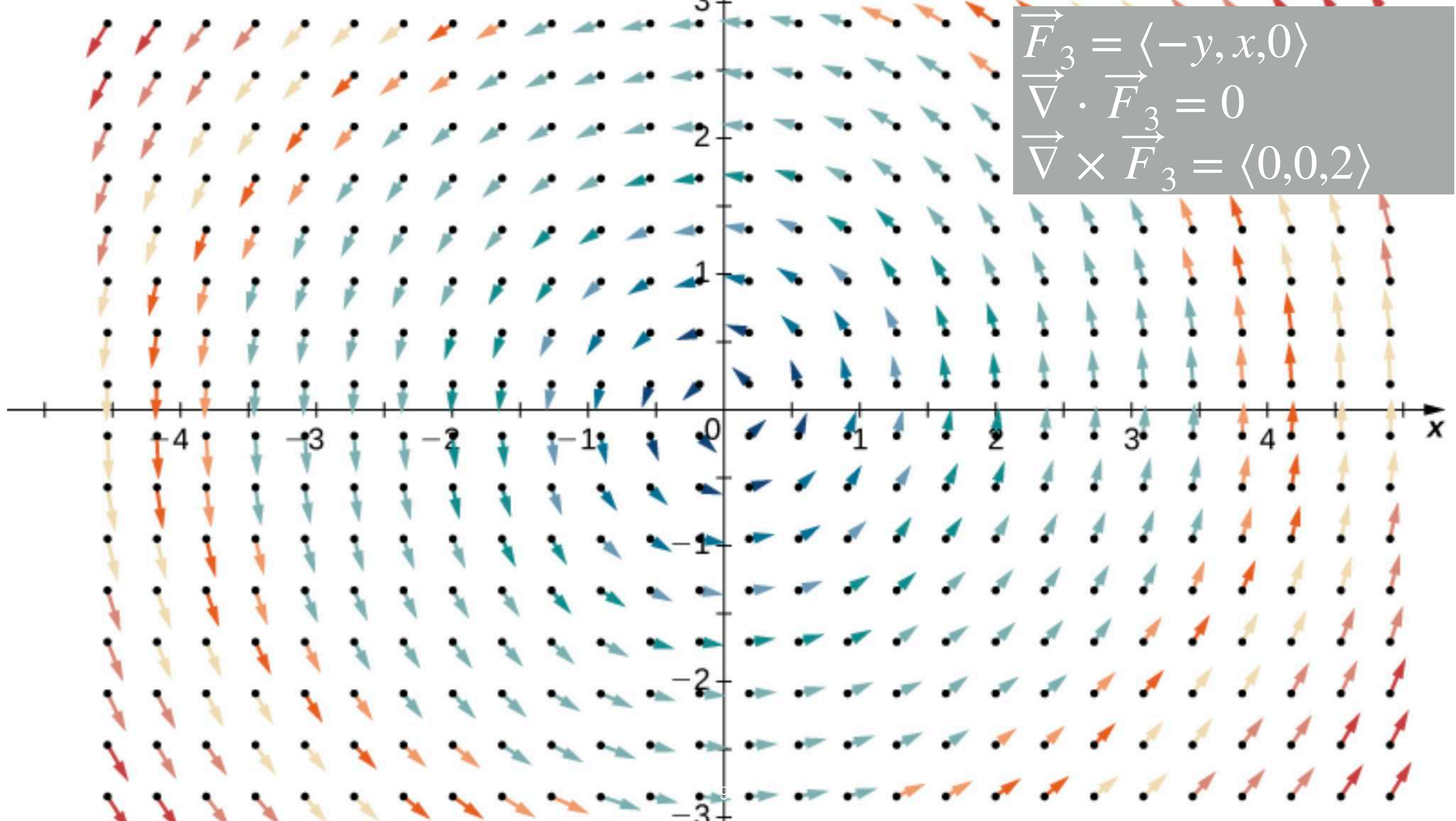
Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

- K1.1: (1)  $\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)} \approx - (7.15 \times 10^{21} \text{ N}) \langle 0.298, 0.745, -0.596 \rangle$ ,  
oder  $\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)} \approx \langle -2.13, -5.32, 4.26 \rangle \times 10^{21} \text{ N}$ . (2)  
 $\vec{F}_{g(2 \rightarrow 1)} = - \vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)}$ .
- K2.1: (1)  $g \approx 0.285 \text{ N/kg}$ . (2)  $\left| \vec{F}_g \right| \approx 19.95 \text{ N}$ . (3) Das Verhältnis zur Gravitationskraft an der Erdoberfläche beträgt  $\approx 0.029$ , also ungefähr 3 %. Der Astronaut wird sich somit „federleicht“ fühlen.
- K3.1: Siehe die nächsten Folien. Das Feld wird jeweils nur in der  $xy$ -Ebene visualisiert.



$$\vec{F}_2 = \langle 1, 2, 0 \rangle$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$





- K4.1: Die meisten Objekte, denen wir im Alltag begegnen sind neutral, weisen also weder einen positiven oder negativen Ladungsüberschuss auf. Aus diesem Grund sind die elektrischen Kräfte ebenfalls sehr klein. Da unser Körper immer von der gesamten Erde angezogen wird, dominiert die Gravitationskraft in unserem Alltag.
- K4.2: (1)  $\left| \vec{F}_c \right| \approx 2.02 \times 10^{-9} \text{ N}$ . (2) Gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.
- K5.1: (1) **Si**: 14 p und 14 n. (2) **Sn**: 50 p und 69 n. (3) **Au**: 79 p und 118 n. (4) **Th**: 90 p und 142 n. (5) Je weiter man im Periodensystem geht, desto mehr „überschüssige“ Neutronen mit ihren starken Wechselwirkungen werden benötigt, um die abstoßenden Kräfte zwischen Protonen auszugleichen.

- K6.1:  $\vec{v}_M \approx \langle 0.57, 5.43, 0 \rangle$  m/s.
- K6.2: Der Impuls der ruhenden Neutrons war  $\vec{0}$ . Nach dem Zerfall muss deshalb der Gesamtimpuls ebenfalls wieder  $\vec{0}$  sein. Aus diesem Grund ist Option (c) auszuschließen.
- K7.1: (1)  $\vec{p}_i = \langle 0.04, 0.04, -0.1 \rangle$  kg · m/s. (2)  $\vec{p}_f = \vec{p}_i$ . (3)  $\vec{v}_f = \langle 1, 1, -2.5 \rangle$  m/s.
- K8.1: (1)  $4 \times 3 = 12$ . (2) 6. (3) 6, wegen Reziprozität.

# Nachwort



Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 4 - Kontakt-Wechselwirkungen