Elektrische und magnetische Wechselwirkung

Teil 5
Magnetisches Feld

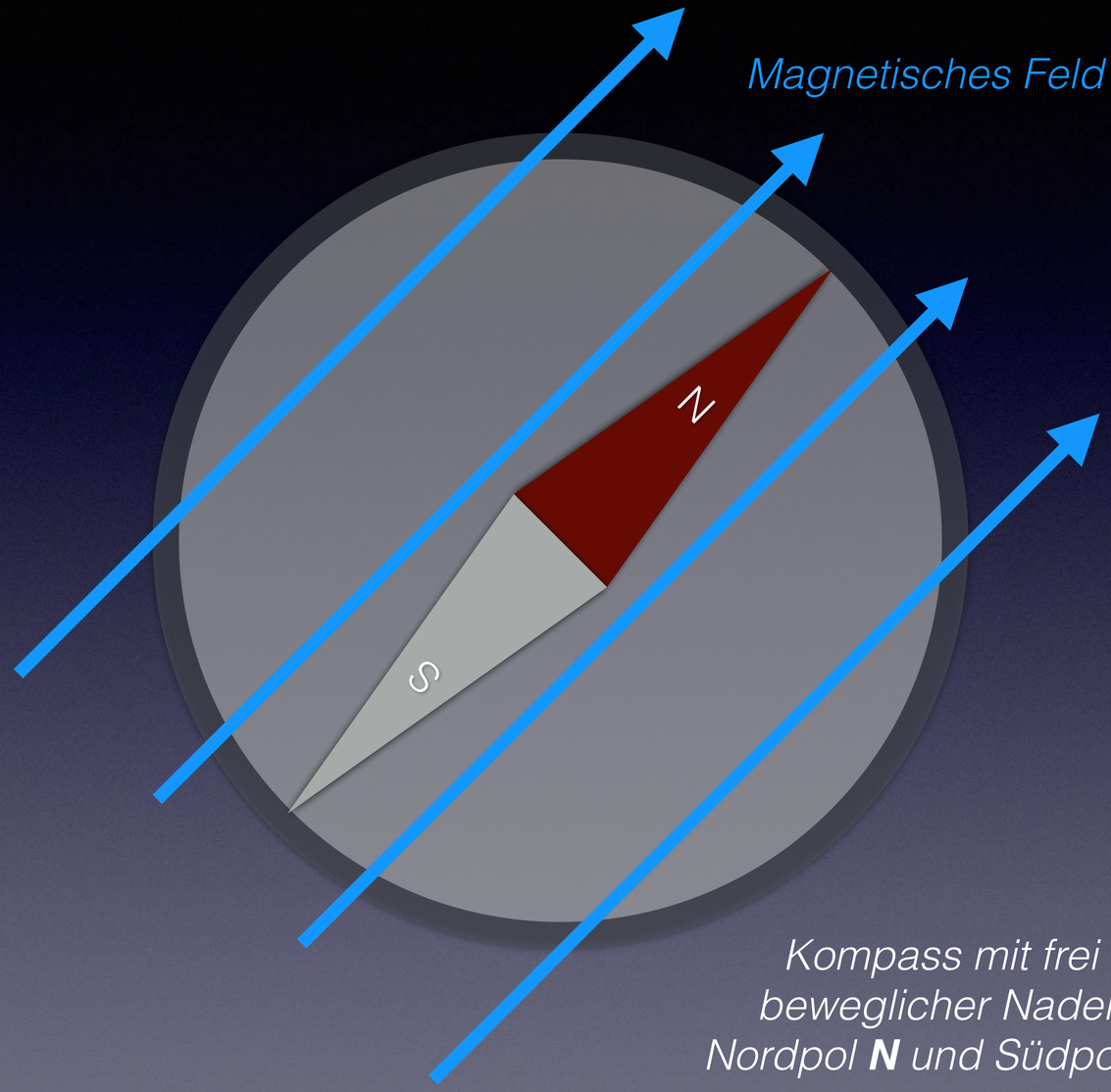
ORCID
Connecting Research
and Researchers

Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- das 3D-Magnetfeld, das auf eine einzelne bewegte Ladung oder einen elektrischen Strom zurückzuführen ist, zu berechnen;
- einen Magnetkompass zu verwenden, um Größe und Richtung des elektrischen Stroms in einem Draht zu bestimmen;
- das Magnetfeld eines Stabmagneten auf sein magnetisches Dipolmoment zurückzuführen.

Elektrische Felder sind nicht die einzige Art von Feldern, die mit geladenen Teilchen in Verbindung gebracht werden. Wenn sich eine Kompassnadel dreht und in eine bestimmte Richtung zeigt, spricht man von einem „Magnetfeld“, das in diese Richtung zeigt und die Nadel dazu zwingt, sich mit ihm auszurichten. Zunächst definieren wir das Magnetfeld einfach als das, was ein Kompass misst. Die Verdrehung einer Kompassnadel ist ein Indikator für ein Magnetfeld, so wie die Verdrehung eines aufgehängten elektrischen Dipols ein Indikator für ein elektrisches Feld ist, wie du in Kapitel 2 gesehen hast.



*Kompass mit frei beweglicher Nadel. Nordpol **N** und Südpol **S**.*

Magnetfelder werden durch bewegte Ladungen erzeugt, also müssen wir solche bewegten Ladungen „zur Hand“ haben.

Wir werden einige einfache elektrische Schaltkreise zusammenstellen, in denen Ströme stetig fließen können und die geeignete Systeme für bewegte Ladungen darstellen. In diesem Kapitel werden wir das Magnetfeld untersuchen und eine Beschreibung von Magneten auf atomarer Ebene entwickeln.

Später, in Kapitel 8, werden wir die Kräfte untersuchen, die Magnetfelder auf bewegte Ladungen ausüben.

Übersicht

- Elektronenstrom
- Erkennen von Magnetfeldern
- Biot-Savart-Gesetz für eine Punktladung in Bewegung
- Relativistische Effekte
- Elektronenstrom und technischer Strom
- Biot-Savart-Gesetz für elektrische Ströme
- Das Biot-Savart-Gesetz für verteilte elektrische Ströme
- Magnetfeld eines stromdurchflossenen Rings
- Magnetisches Dipolmoment
- Das magnetische Feld eines Stabmagneten
- Die atomare Struktur von Magneten
- Abschätzung des Bahn-Drehimpulses eines Elektrons in einem Atom
- Magnetfeld (Solenoid) einer Zylinderspule
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

Elektronenstrom

Magnetische Felder sind mit bewegten Ladungen verbunden. Ein Strom in einem Draht stellt ein geeignetes System für bewegte Ladungen dar und ermöglicht es uns, mit der Erzeugung und dem Nachweis von Magnetfeldern zu experimentieren.

Im Gleichgewicht bewegt sich das „Meer“ der beweglichen Elektronen im Inneren eines Leiters nicht. In den elektrischen Schaltkreisen, die wir in diesem Kapitel konstruieren werden, können wir die Dinge so anordnen, dass sich das „Elektronenmeer“ kontinuierlich bewegt. Dieser kontinuierliche Elektronenfluss wird als „Elektronenstrom“ bezeichnet und ist ein Hinweis darauf, dass sich das System nicht im Gleichgewicht befindet.

„Der Elektronenstrom i entspricht der Anzahl an Elektronen pro Sekunde, die in einen Abschnitt eines Leiters eintreten.“

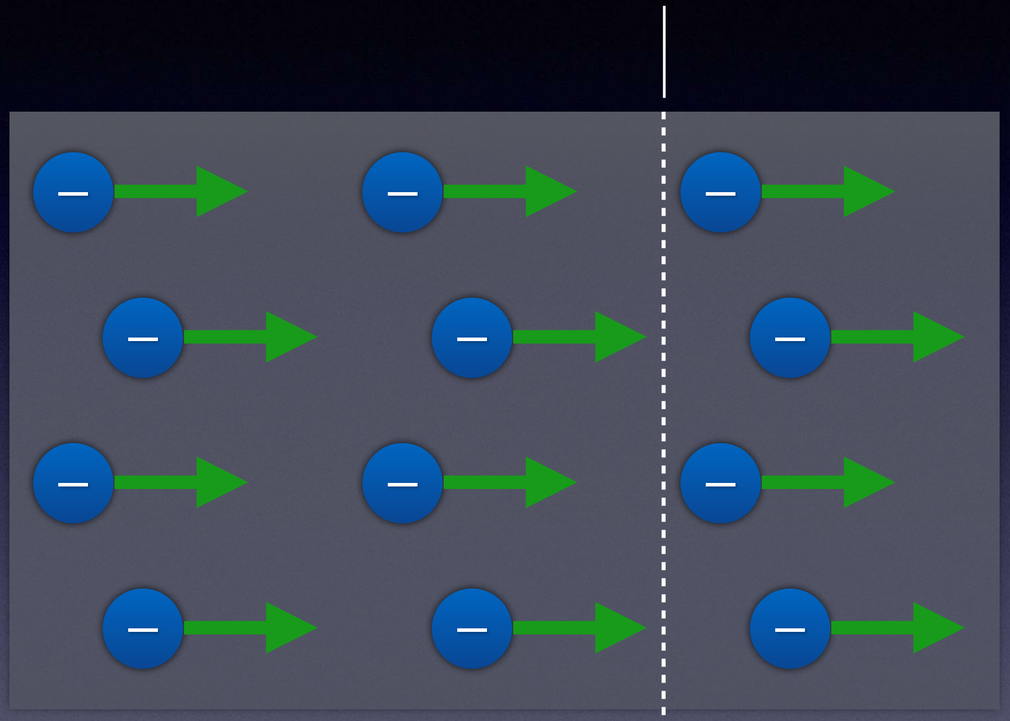
Definition Elektronenstrom

In einem Stromkreis, in dem ein gleichmäßiger Strom fließt, ist der Elektronenstrom in jedem Abschnitt eines Drahtes mit einheitlicher Dicke und Zusammensetzung gleich (im nächsten Kapitel werden wir sehen warum). Wenn wir die Anzahl der Elektronen pro Sekunde zählen könnten, die einen bestimmten Punkt in einem Stromkreis passieren, könnten wir den Elektronenstrom direkt messen. Dies ist jedoch schwierig, daher verwenden wir indirekte Messungen, um die Größe des Elektronenstroms in einem Draht zu bestimmen. Eine solche indirekte Messung beinhaltet die Messung des Magnetfeldes, das durch die sich bewegenden Elektronen erzeugt wird.

Elektronenstrom

by Web VPython

Querschnitt, durch den ein konstanter Elektronenstrom i hindurch fließt.



Metallischer Leiter mit „Elektronenmeer“ in Bewegung.

Wenn Elektronen durch einen Draht driften, stoßen sie mit den Atomkernen zusammen, und diese „Reibung“ erhitzt den Draht (siehe auch „Drude-Modell“ und „Driftgeschwindigkeit“ in Kapitel 2). Sowohl die Erwärmung als auch die magnetischen Effekte sind proportional zum Elektronenstrom, also der Anzahl der Elektronen, die pro Sekunde in den Draht eintreten.

Ein einfacher Stromkreis, der eine Batterie, einen Draht und eine Lampe umfasst, ist ein praktisches Mittel, um bewegliche Elektronen zu erzeugen. Wir werden in diesem Kapitel immer wieder auf solche Schaltungen zurückgreifen. Trotz der Einfachheit der Komponenten sind die physikalischen Fragen, die mit solchen Schaltungen untersucht werden können, von zentraler Bedeutung. Wenn du die entsprechende Ausrüstung hast, kannst du diese Experimente selbst durchführen.

Erkennen von Magnetfeldern

Wir können einen Magnetkompass als Detektor für Magnetfelder verwenden. So wie die Ablenkung eines geladenen Stücks Klebeband oder die Verdrehung eines permanenten elektrischen Dipols das Vorhandensein eines elektrischen Feldes anzeigt, deutet die Verdrehung einer Kompassnadel das Vorhandensein eines Magnetfeldes an.

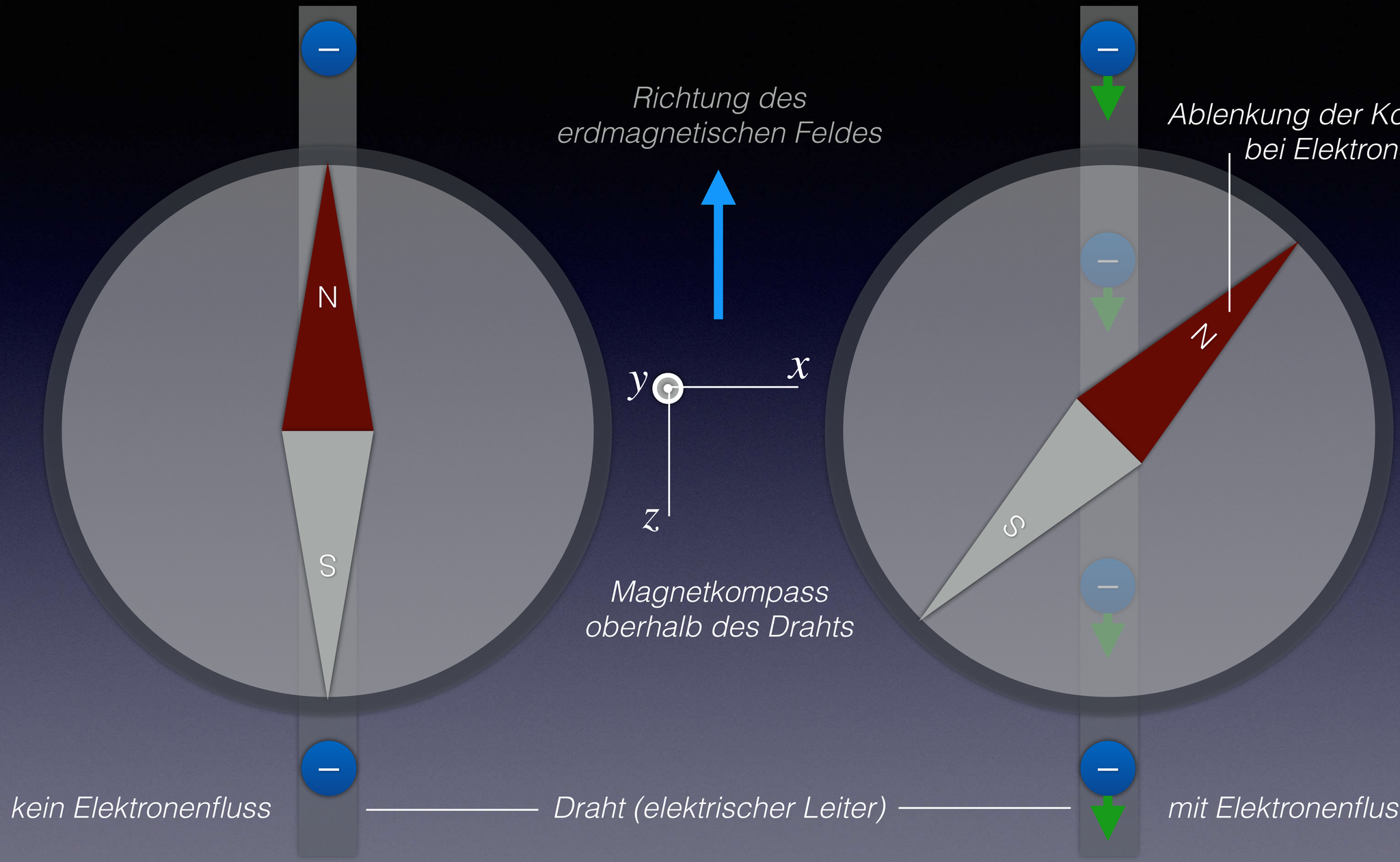
Aber wie kann man sicher sein, dass eine Kompassnadel nicht einfach nur auf elektrische Felder reagiert? (Antworten siehe nachfolgende Folie)

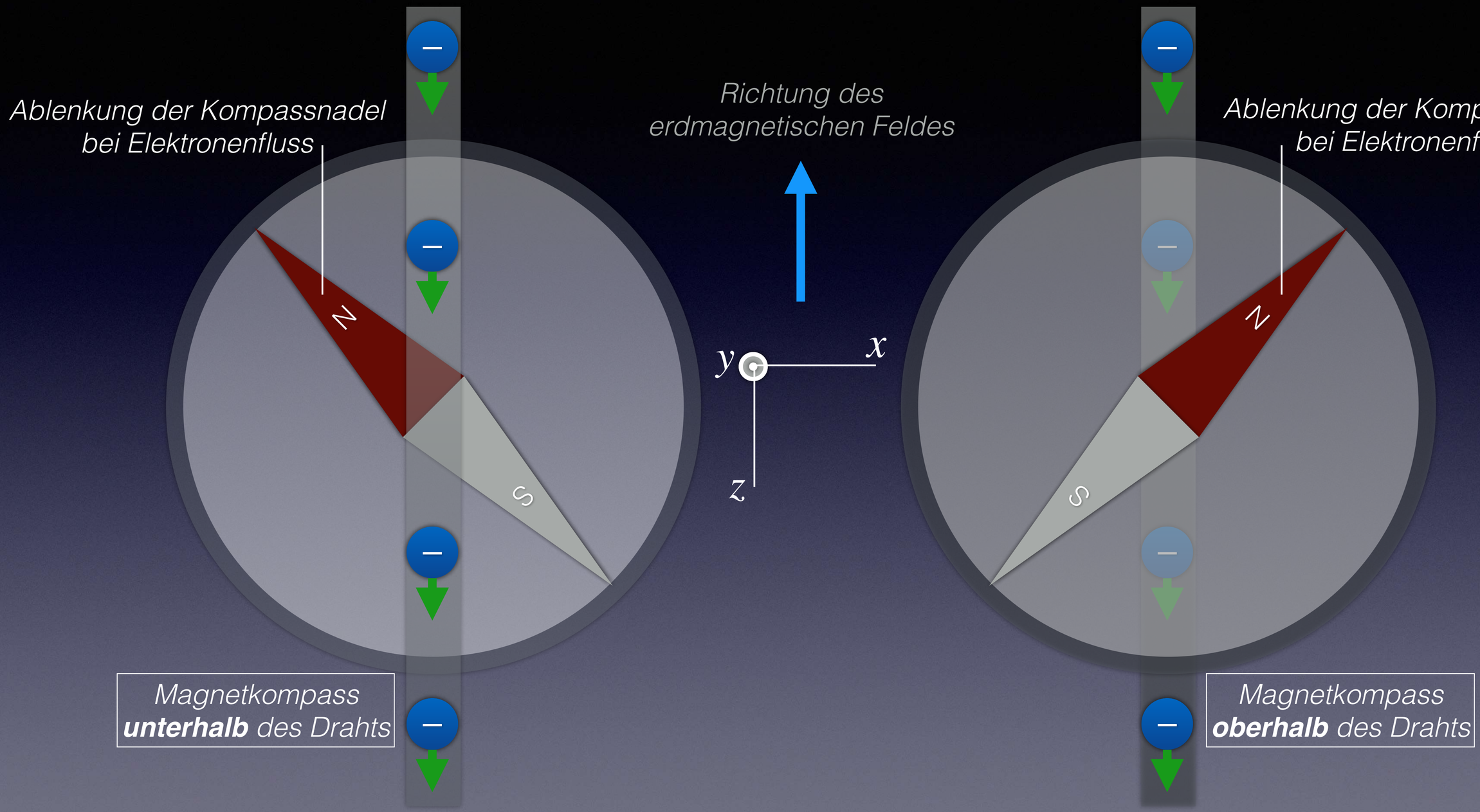
- Die Kompassnadel wird durch die Nähe von Gegenständen aus z.B. Eisen oder Stahl beeinflusst, auch wenn diese Gegenstände elektrisch neutral sind (und daher sowohl positiv als auch negativ geladene Bänder anziehen).

- Die Kompassnadel wird von Gegenständen aus den meisten anderen Elementen, einschließlich Aluminium, Kupfer, Zink und Kohlenstoff, nicht beeinflusst, während geladene Bänder mit diesen Gegenständen interagieren.

- Fern von Gegenständen aus Eisen zeigt die Kompassnadel in Richtung der magnetischen Pole der Erde, während weder elektrisch geladene Objekte noch elektrische Dipole dies tun.

Bringt man einen stromführenden Draht in die Nähe des Kompasses, passiert etwas sehr Interessantes: Die Kompassnadel wird ausgelenkt, während Strom durch den Draht fließt, aber nicht, wenn der Draht von der Batterie getrennt ist. Diesen Effekt entdeckte der dänische Wissenschaftler Oersted (1777 bis 1851) im Jahr 1820 zufällig bei einer Demonstration in einer Physikvorlesung. (Er muss überrascht gewesen sein!) Das Phänomen wird oft als „Oersted-Effekt“ bezeichnet. Der größte Effekt tritt dann auf, wenn der Draht in Nord-Süd-Richtung zeigt. Die Ablenkungsrichtung hängt davon ab, ob der Strom nach Norden oder nach Süden fließt. Die Kompassnadel wird nicht ausgelenkt, wenn der Draht in Ost-West-Richtung zeigt.

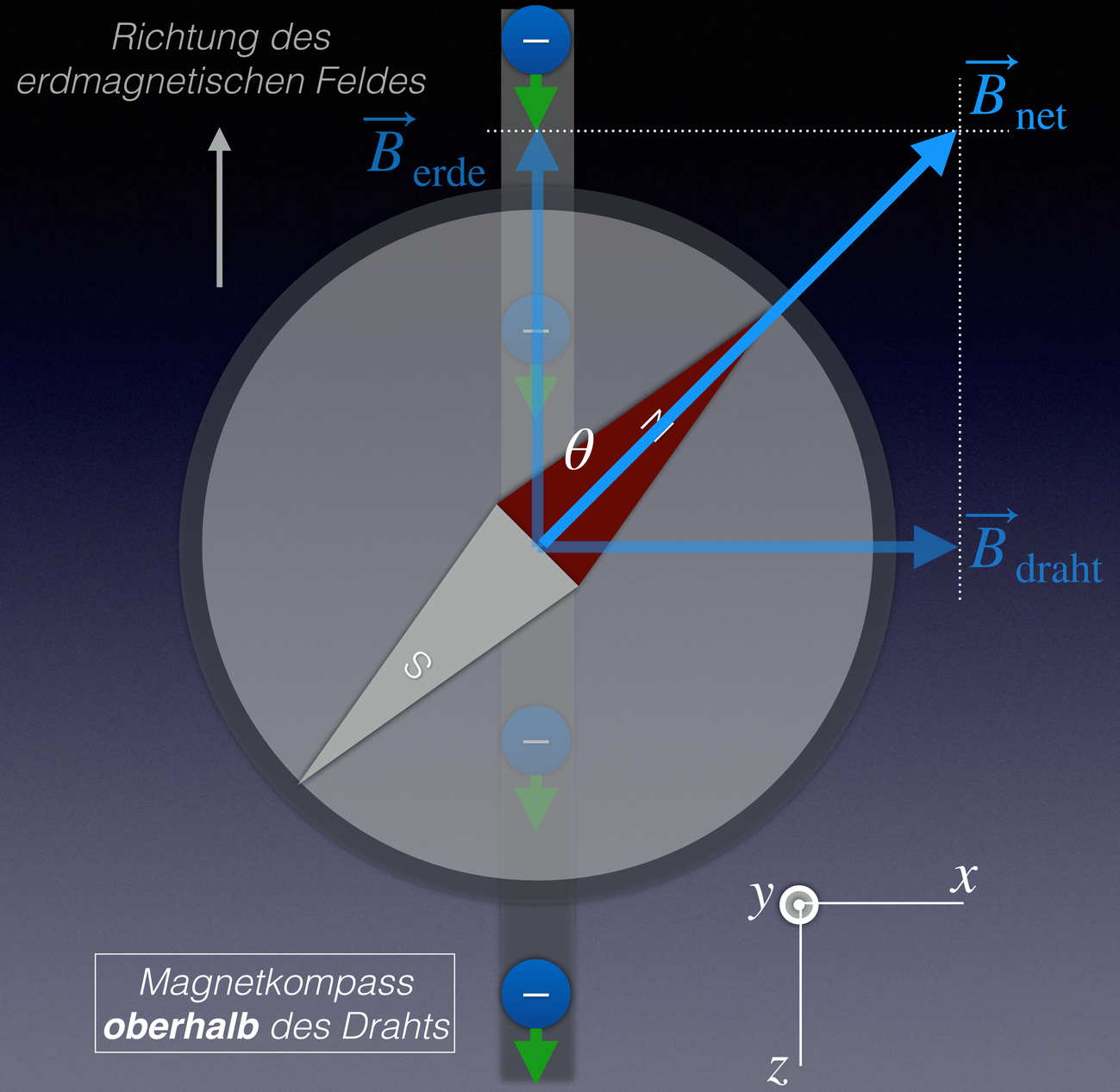

Richtung des
erdmagnetischen Feldes
Ablenkung der Kompassnadel
bei Elektronenfluss
N
S
y
x
z
Magnetkompass
oberhalb des Drahts
kein Elektronenfluss
Draht (elektrischer Leiter)
mit Elektronenfluss


Ablenkung der Kompassnadel bei Elektronenfluss
N
S
Magnetkompass **unterhalb** des Drahts
Richtung des erdmagnetischen Feldes
y
x
z
Ablenkung der Kompassnadel bei Elektronenfluss
N
S
Magnetkompass **oberhalb** des Drahts

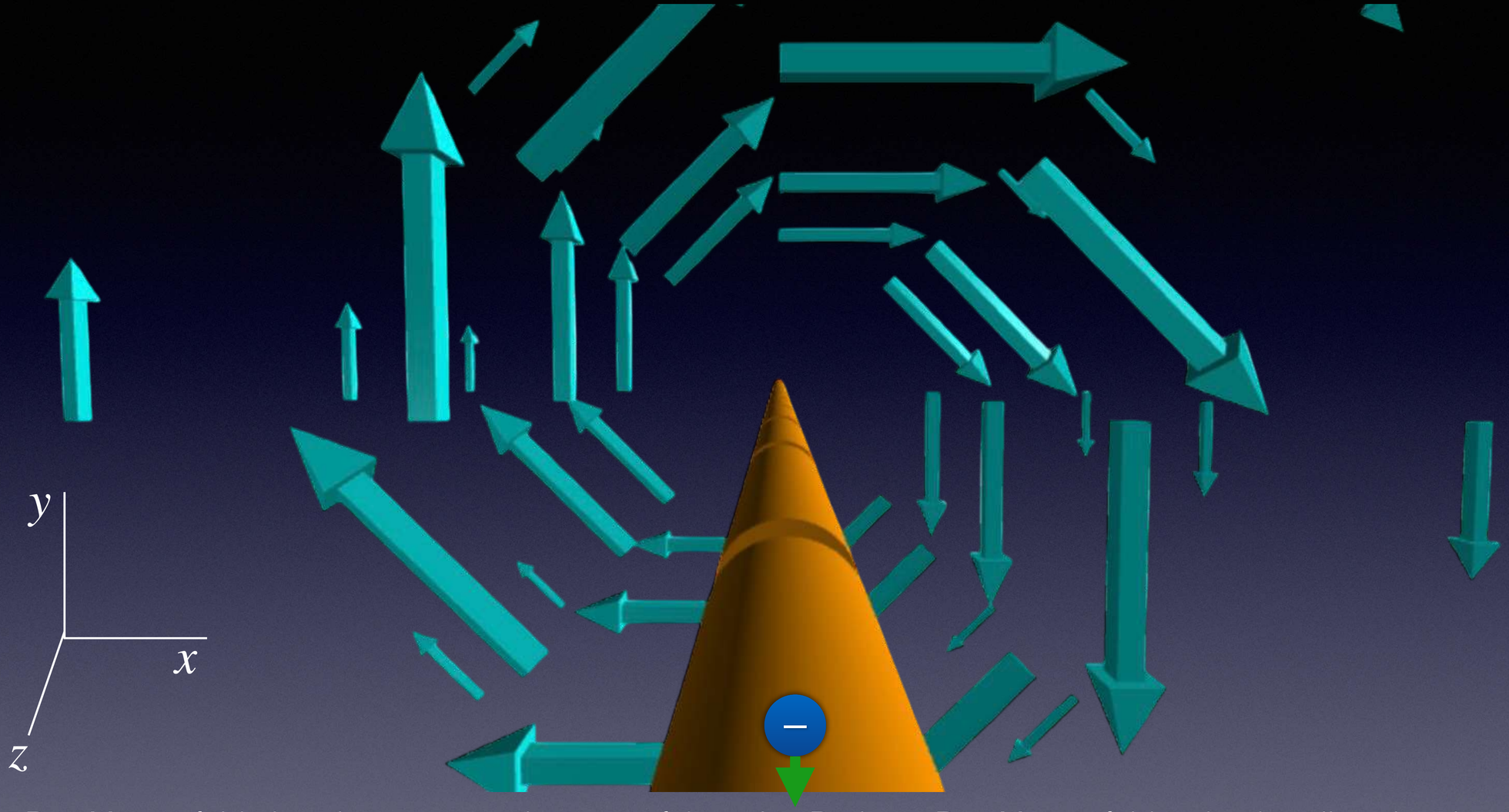
Aus solchen Experimenten kann man die folgenden Schlüsse ziehen:

- Die Größe des Magnetfeldes, das durch einen Strom von bewegten Elektronen erzeugt wird, hängt von der Stärke des Elektronenstroms ab;
- Ein Draht, in dem kein Strom fließt, erzeugt kein Magnetfeld;
- Das durch den Strom verursachte Magnetfeld scheint senkrecht zur Stromrichtung zu verlaufen;
- Die Richtung des durch Strom hervorgerufenen Magnetfelds ist unter dem Draht der Richtung des Magnetfelds oberhalb des Drahts entgegengesetzt.

Die sich bewegenden Elektronen in einem Draht erzeugen an verschiedenen Stellen im Raum ein Magnetfeld, so auch an der Stelle des Kompasses. Die Vektorsumme aus dem Magnetfeld der Erde $\vec{B}_{\text{erde}}$ plus dem Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes $\vec{B}_{\text{draht}}$ ergibt ein Nettomagnetfeld $\vec{B}_{\text{net}}$. Da eine Kompassnadel in die Richtung des Nettomagnetfelds an ihrem Standort zeigt, dreht sich die Nadel von ihrer ursprünglichen Nord-Süd-Richtung weg, um sich dem Nettomagnetfeld anzupassen. Hinweis: magnetische Flussdichte $\vec{B}$.



Magnetkompass ***oberhalb*** *des Drahts*



Das Magnetfeld eines langen, geraden, stromführenden Drahtes. Das Magnetfeld steht überall senkrecht zur Richtung des Drahts, insofern keine anderen Magnetfelder vorhanden sind. In diesem Beispiel bewegen sich die Elektronen auf uns zu.

Es gibt kaum eine beobachtbare elektrische Wechselwirkung des stromführenden Drahtes mit benachbarten Materialien, da die Drähte keine Nettoladung haben. (Tatsächlich werden wir später sehen, dass es winzige Mengen überschüssiger Ladung auf der Oberfläche gibt, die aber zu gering sind, um sie leicht zu beobachten).

Die Stärke des magnetischen Feldes (genauer: magnetische Flussdichte $\overrightarrow{B}$) wird in Tesla T angegeben:

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^2}\,.$$

Eine Ladung von 1 Coulomb, die sich senkrecht zu einem Magnetfeld von 1 Tesla mit einer Geschwindigkeit von 1 Meter pro Sekunde bewegt, wird mit einer Kraft von 1 Newton abgelenkt.

Kontrollpunkt 1

1. Ein stromdurchflossener Draht, der in Nord-Süd-Richtung über einen Kompass gelegt wird, lenkt den Kompass um 15° nach Osten ab. (1) Wie groß sind Stärke und Richtung des durch den Strom erzeugten Magnetfelds? Hinweis: Die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes $\overrightarrow{B}_{\text{erde}}$ beträgt ca. $2 \times 10^{-5}\,\text{T}$.

Biot-Savart-Gesetz
für eine Punktladung in Bewegung

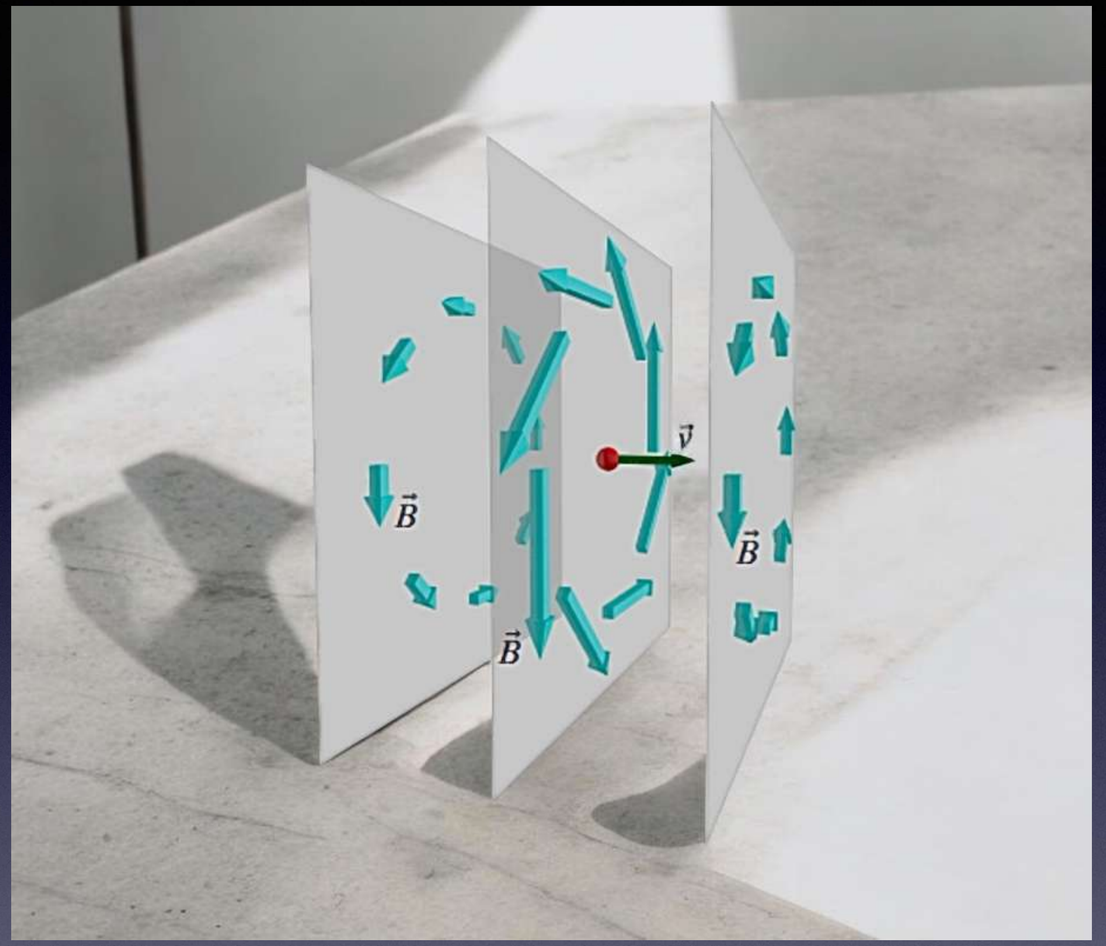
In Zusammenhang mit Magnetfeldern haben wir es üblicherweise mit folgenden Größen zu tun: der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$, der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ sowie der Magnetisierung $\vec{M}$ von Materialien. Die Größen hängen über die magnetische Feldkonstante μ_0 wie folgt zusammen:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) .$$

Im Vakuum (und in Luft) ist $\vec{M} = \vec{0}$ und daher $\vec{B} \propto \vec{H}$. Anschaulich gesprochen ist $\vec{H}$ der Beitrag zu $\vec{B}$, der durch elektrische Ströme erzeugt wird.

Sorgfältig durchgeführte Experimente haben gezeigt, dass eine stationäre Punktladung ein elektrisches Feld erzeugt, das durch das Coulombsche Gesetz beschrieben werden kann.

In ähnlicher Weise zeigen Experimente, dass eine bewegte Punktladung nicht nur ein elektrisches, sondern auch ein magnetisches Feld erzeugt, das sich um die bewegte Ladung „windet“. Dieses Muster ist charakteristisch für Magnetfelder. Das Magnetfeld (magnetische Flussdichte) wird in Tesla T gemessen, und seine Größe und Richtung werden durch das Biot-Savart-Gesetz bestimmt (siehe nächste Folie).



Das Magnetfeld $\overrightarrow{B}$ (magnetische Flussdichte) einer bewegten positiven Ladung, dargestellt in drei Ebenen senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$.

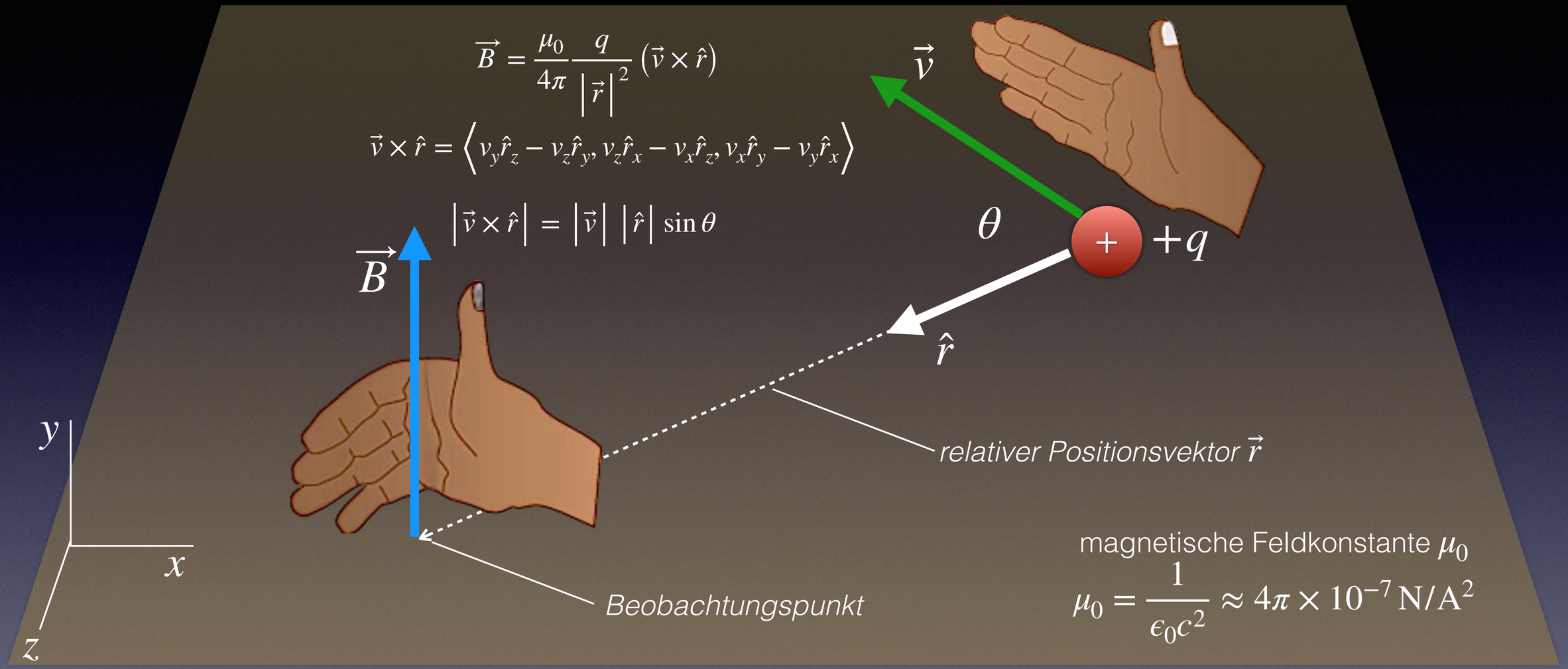
Biot-Savart-Gesetz für eine sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegende Punktladung q:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right) .$$

Der Vektor $\vec{r}$ bezeichnet darin den relativen Positionsvektor zwischen dem Ort der Punktladung und dem Ort der Beobachtung. Benannt wurde dieses Gesetz nach den beiden französischen Mathematikern Jean-Baptiste Biot (1774 bis 1862) und Félix Savart (1791 bis 1841), die es 1820 formuliert hatten.

Rechte-Hand-Regel

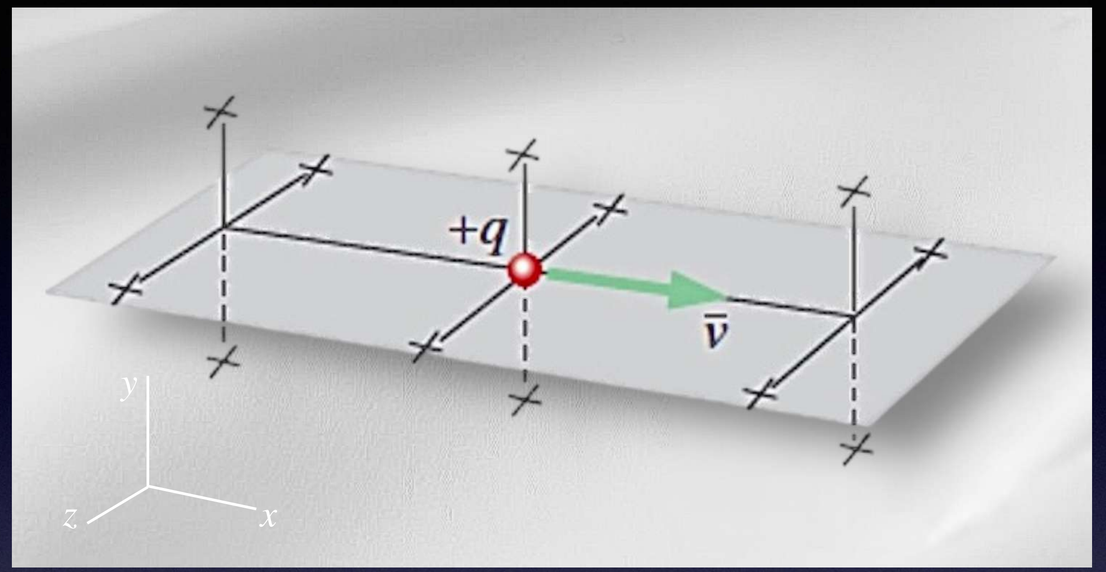
by Web VPython

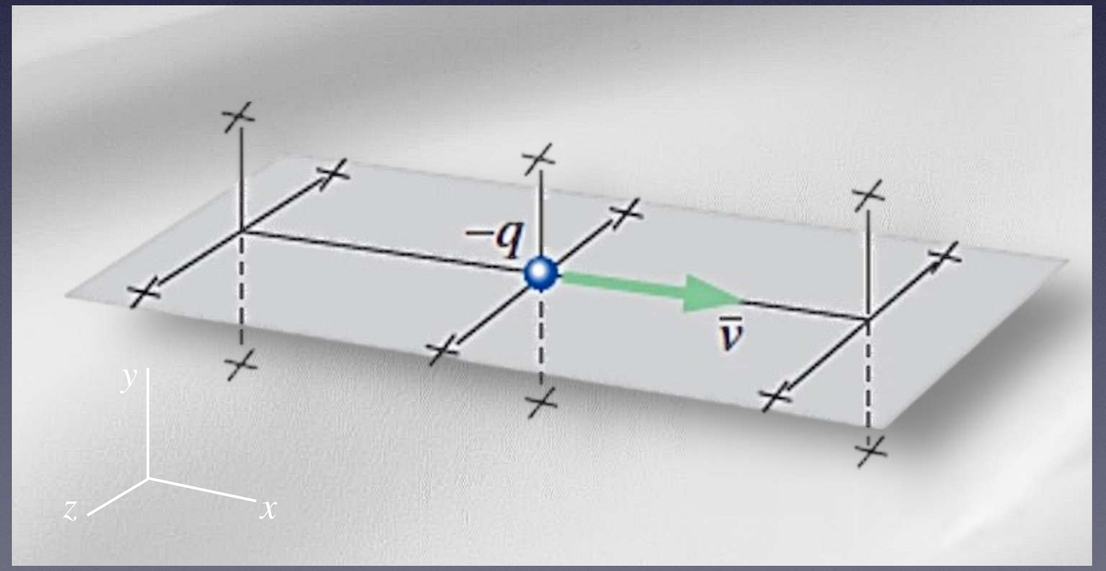


Das Biot-Savart-Gesetz beinhaltet ein Kreuzprodukt $\vec{v} \times \hat{r}$ zur Berechnung von $\vec{B}$. Richte die Finger der (geraden) rechten Hand in die Richtung von $q\vec{v}$ und verdrehe sie dann in Richtung von $\hat{r}$. Dann zeigt der Daumen in Richtung von $\vec{B}$. Möglicherweise musst du deine Hand umdrehen, um dies tun zu können.

Kontrollpunkt 2

Bestimme an den in mit × gekennzeichneten Stellen die Richtung der Magnetfeldvektoren, die von einer positiven Ladung $+q$ verursacht werden, die sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in $+x$-Richtung bewegt. (1) Zeichne für jeden Beobachtungsort den Einheitsvektor $\hat{r}$ von der Ladung zu diesem Ort und betrachte dann das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \hat{r}$. Achte dabei nicht nur auf die Richtungen des Magnetfeldes $\vec{B}$, sondern auch auf die relativen Größen der Vektoren. (2) Wenn die Ladung negativ ist, wie verändert sich dann das Muster des Magnetfeldes?

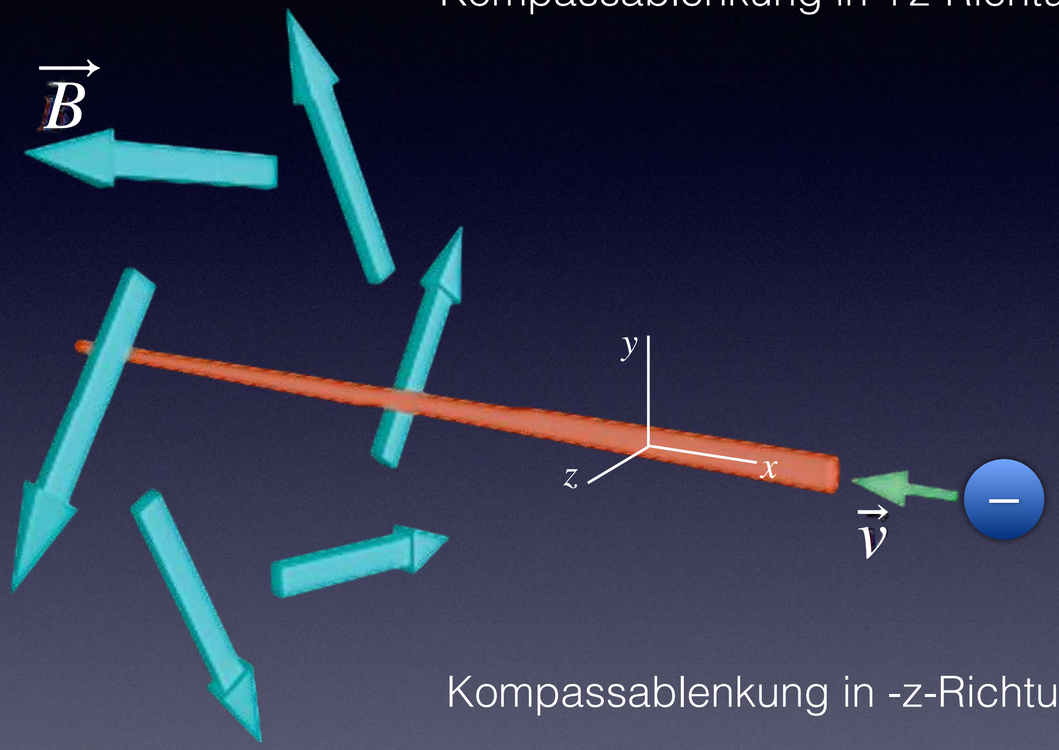




Angenommen, die sich bewegenden geladenen Teilchen in einem stromdurchflossenen Draht sind negativ geladen und bewegen sich in der nebenstehend angegebenen Richtung.

Überzeuge dich sich selbst davon, dass $q\vec{v} \times \hat{r}$ die Richtung und das Muster des Magnetfeldes in der Nähe eines Drahtes korrekt wiedergibt; beachte dabei das negative Vorzeichen von q. Anhand dieses Musters für das Magnetfeld kannst du erkennen, dass die Richtung der Kompassablenkung unterschiedlich ist, wenn sich der Draht oberhalb oder unterhalb des Kompasses befindet.

Kompassablenkung in +z-Richtung

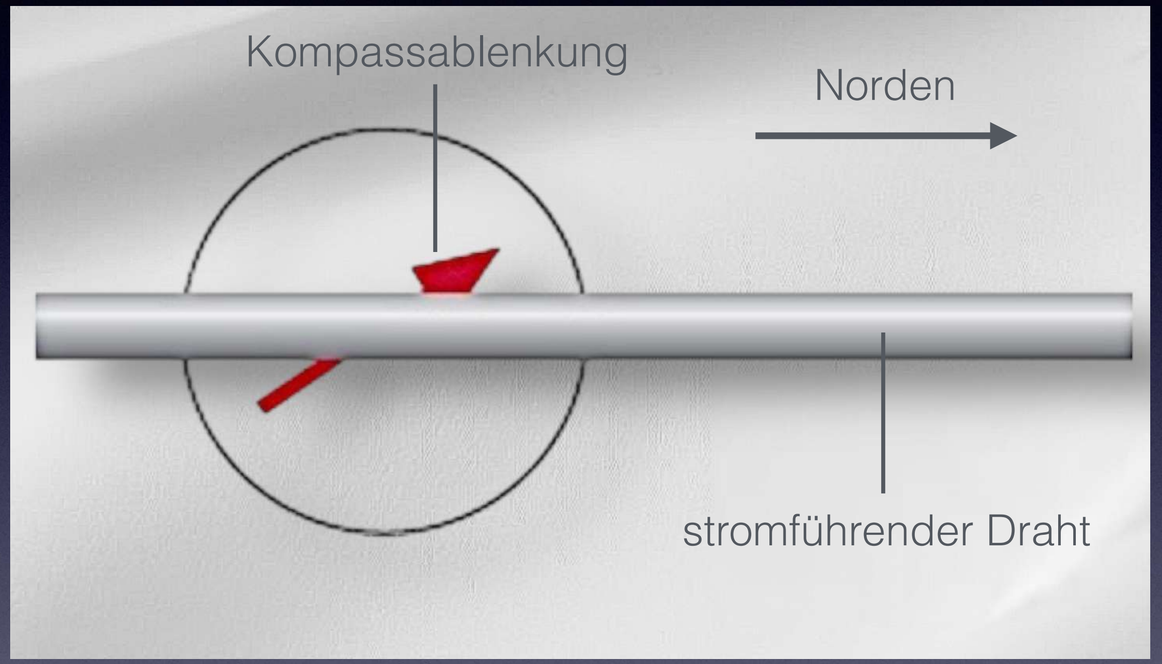


Kompassablenkung in -z-Richtung

Das Magnetfeld, das durch sich bewegende Ladungen im Draht entsteht, „wickelt“ sich um den Draht. Hier wird angenommen, dass die bewegten Ladungen negativ sind.

Kontrollpunkt 3

In der nebenstehenden Abbildung liegt ein stromdurchflossener Draht auf einem Kompass. (1) Nach der Ablenkung des Kompasses gegen Nord zu urteilen, welche Richtung hat der Elektronenstrom im Draht? (2) Wenn der Strom auf die Bewegung positiver Ladungen zurückzuführen wäre, in welche Richtung würden sich die positiven Ladungen bewegen?



Relativistische Effekte

Elektrische Felder werden durch ruhende oder bewegte Ladungen erzeugt. Magnetische Felder scheinen nur von bewegten Ladungen erzeugt zu werden - aber betrachte das folgende „Gedankenexperiment“: Nehmen wir an, dass Noah im Klassenzimmer sitzt und ein geladenes Stück Klebeband an der Kante seines Tisches klebt. Er kann dann ein durch das Band verursachtes elektrisches Feld beobachten, aber kein magnetisches Feld. Sein Kompass wird durch das geladene Klebeband nicht beeinflusst, da sich die Ladungen nicht bewegen:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2}\left(\vec{v}\times\hat{r}\right) \quad \rightarrow \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2}\left(\vec{0}\times\hat{r}\right) = \vec{0}\,.$$

Emilia rennt dagegen mit hoher Geschwindigkeit durch das Klassenzimmer, vorbei an dem geladenen Klebeband, und trägt dabei ihren eigenen sehr empfindlichen Kompass mit sich. Sie beobachtet ein elektrisches Feld, das von dem geladenen Band verursacht wird. Außerdem bewegt sich das geladene Band in ihrem Bezugssystem, so dass sie aufgrund der sich bewegenden Ladungen ein kleines Magnetfeld beobachtet, das ihren Kompass beeinflusst! Emilia sieht offenbar eine Mischung aus elektrischen und magnetischen Feldern, die durch das sich bewegende geladene Band verursacht werden:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right) \neq \vec{0}, \text{ da } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass elektrische und magnetische Felder grundsätzlich verschieden sind, aber dieses kleine „Gedankenexperiment“ zeigt, dass sie in Wirklichkeit eng miteinander verwandt sein müssen. Außerdem wirft diese Verbindung Fragen zur Gültigkeit des Biot-Savart-Gesetz auf: Welche Geschwindigkeit $\vec{v}$ sollen wir in dieser Gleichung verwenden? Die richtige Antwort ist, diejenige Geschwindigkeit zu verwenden, wie sie im jeweiligen Bezugssystem beobachtet wird. Damit kann das Magnetfeld jeweils berechnet werden. Noah und Emilia machen also unterschiedliche Vorhersagen und beobachten unterschiedliche Magnetfelder, allerdings im Einklang mit dem Biot-Savart-Gesetz.

Offensichtlich gibt es eine enge Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, die in Einsteins spezieller Relativitätstheorie explizit gemacht wird. Später werden wir weitere Aspekte dieses Zusammenhangs betrachten.

Erinnern wir uns kurz, dass sich das elektrische Feld einer Ladung in einem bestimmten Abstand von der Ladung nicht sofort ändert, wenn diese bewegt wird. Das elektrische Feld ändert sich erst nach einer ausreichenden Zeit, damit Licht den Beobachtungsort erreichen kann.

Der gleiche Verzögerungseffekt ist bei Magnetfeldern zu beobachten. Das Magnetfeld hat also ebenfalls eine eigenständige Realität, unabhängig von den bewegten Ladungen, die es ursprünglich erzeugt haben.

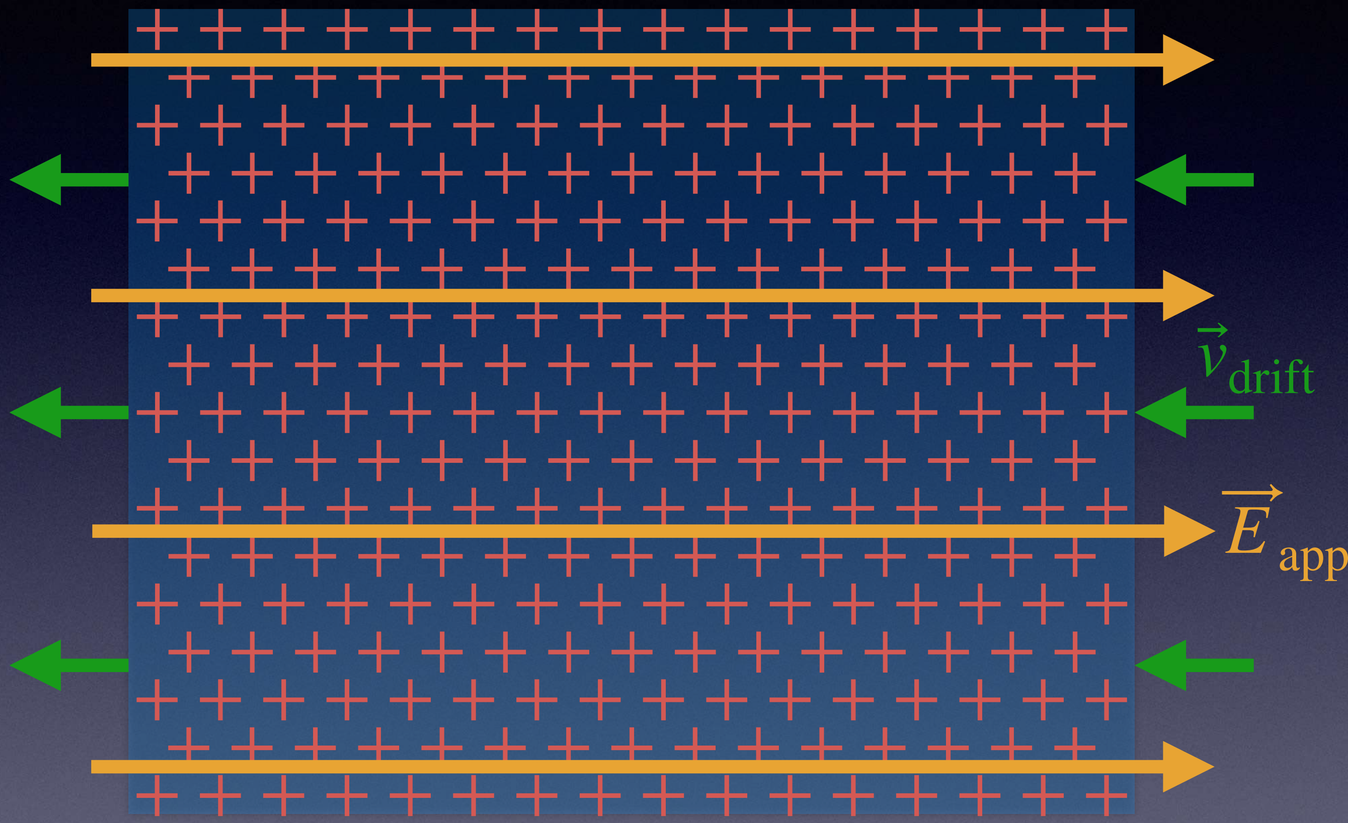
Das Biot-Savart-Gesetz enthält die Zeit nicht, so dass es nicht relativistisch korrekt sein kann. Wie das Coulomb-Gesetz liefert das Biot-Savart-Gesetz nur dann genaue Ergebnisse, falls die Geschwindigkeiten der sich bewegenden Quellen klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind.

Elektronenstrom und technischer Strom

Eine einfache Möglichkeit, die von sich bewegenden geladenen Teilchen erzeugten Magnetfelder zu beobachten, besteht darin, einen Strom zu erzeugen und aufrechtzuerhalten - einen kontinuierlichen Fluss geladener Teilchen in eine Richtung. Dazu müssen wir einen Weg finden, ein elektrisches Feld in einem Draht zu erzeugen und aufrechtzuerhalten, denn wir wissen, dass in einem Objekt aus Metall im Gleichgewicht kein Strom fließt, da das elektrische Feld im Inneren eines Metalls Null wird. Wie genau es möglich ist, Ladungen so anzuordnen, dass überall in einem Draht ein solches elektrisches Feld entsteht, ist Thema des nachfolgenden Kapitels. Für den Moment nehmen wir an, dass wir dies „irgendwie“ erreichen können.

Um das Biot-Savart-Gesetz zur Vorhersage von Größe und Richtung des Magnetfelds anwenden zu können, müssen wir die Anzahl der beweglichen Ladungen, die das Feld erzeugen, und ihre Geschwindigkeit kennen.

Man betrachte den Abschnitt eines Metalldrahtes, durch den sich das bewegliche „Elektronenmeer“ unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes ungleich Null ständig verschiebt, wie nebenstehend dargestellt. Im Inneren des Drahtes kann es nirgendwo eine überschüssige Ladung geben. Jedem beweglichen Elektron entspricht ein einfach geladener positiver Atomkern. Im Durchschnitt über einige Atomdurchmesser ist das Innere des Metalls neutral, und die Abstoßung zwischen den beweglichen Elektronen wird im Durchschnitt durch die Anziehung der positiven Kerne ausgeglichen.



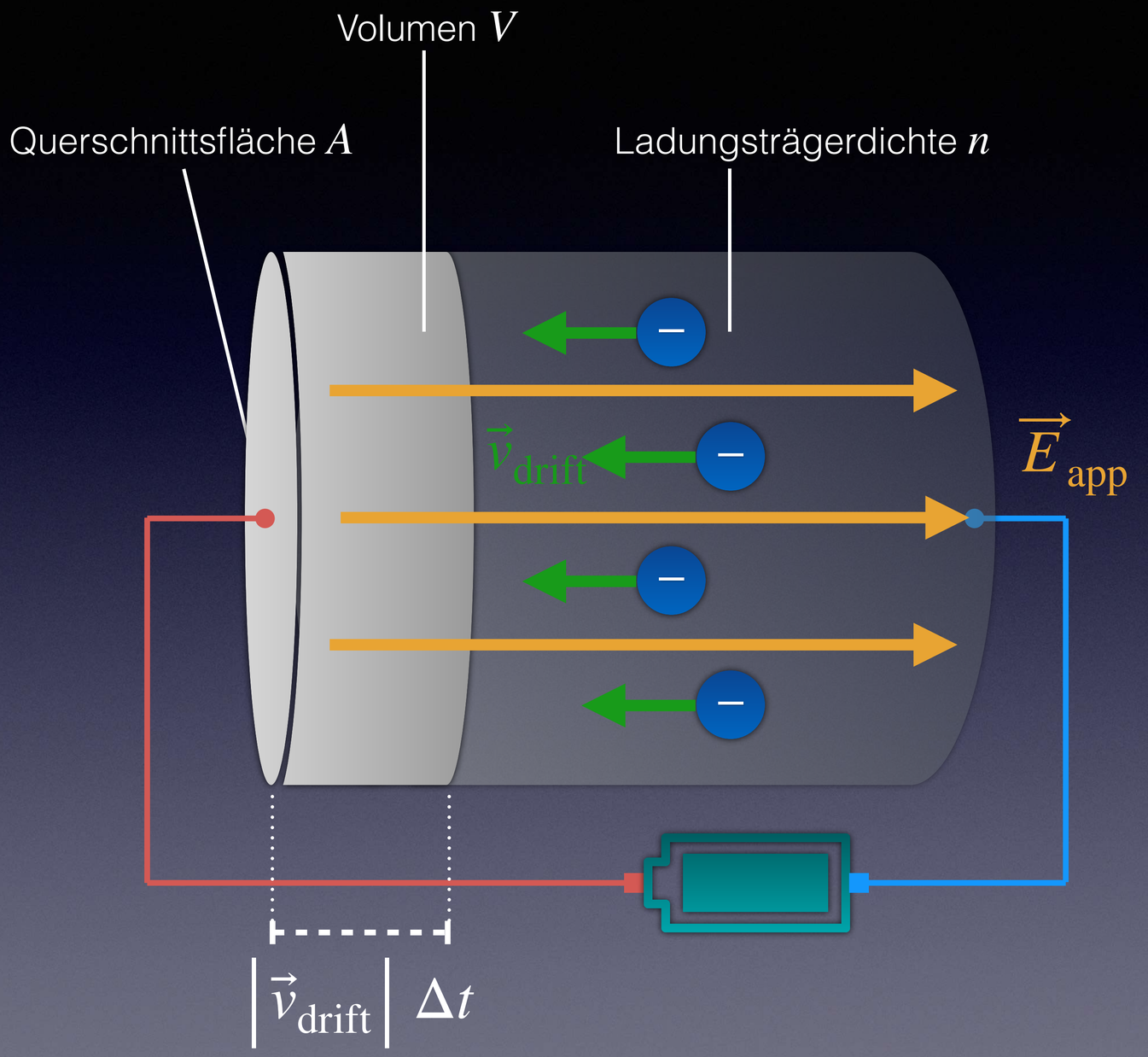
Das mobile „Elektronenmeer“ driftet nach links mit einer Drift-Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{drift}}$.

In dem Volumen V befinden sich $nA \left|\vec{v}_{\text{drift}}\right| \Delta t$ Ladungsträger.

Der Elektronenstrom i, also die Anzahl der Ladungsträger, die in der Zeiteinheit den Querschnitt A passieren beträgt daher

$$i = \frac{nA \left|\vec{v}_{\text{drift}}\right| \Delta t}{\Delta t} = nA \left|\vec{v}_{\text{drift}}\right| .$$

In einem Stromkreis verlassen die Elektronen das negative Ende der Batterie und fließen durch den Draht zum positiven Ende der Batterie.



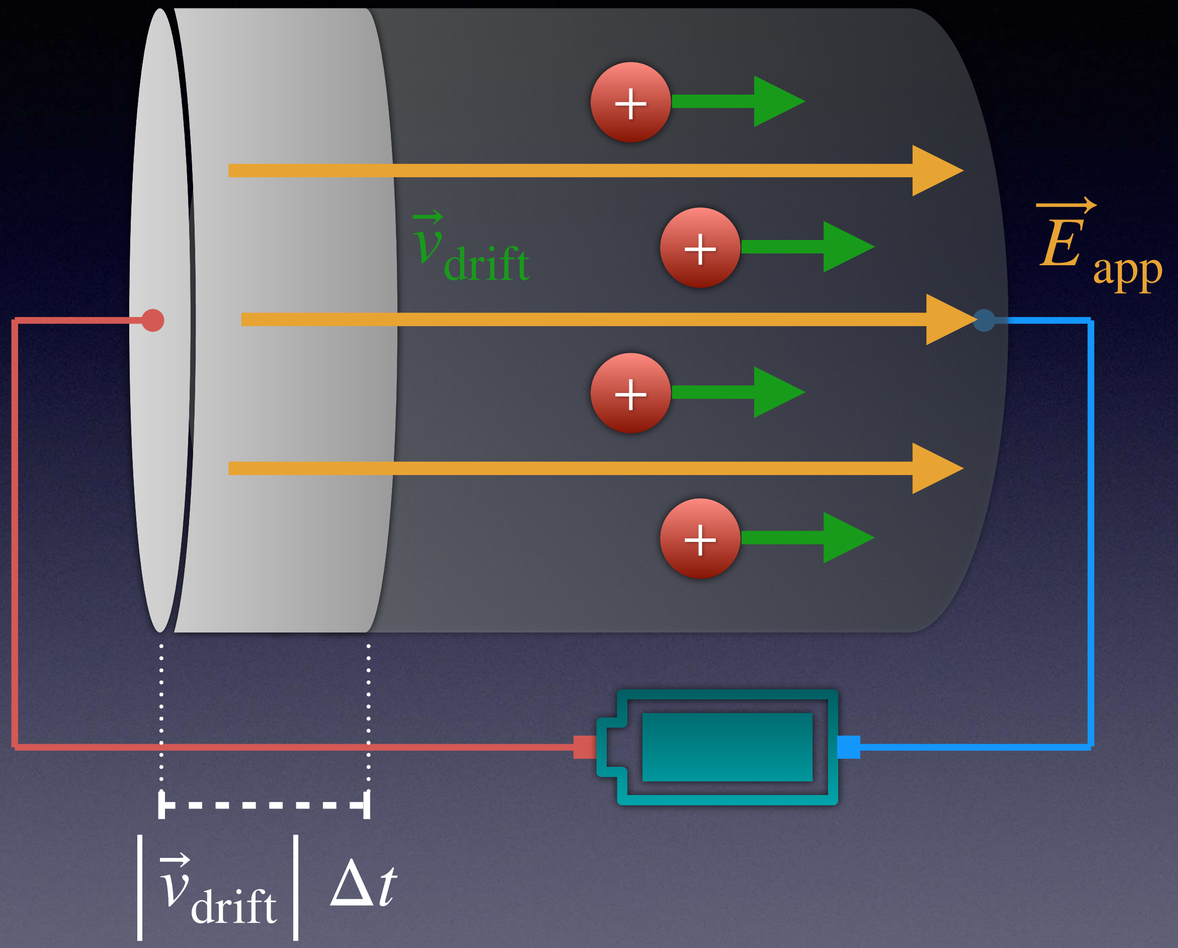
Kontrollpunkt 4

1. Nehmen wir an, dass $i = 3.4 \times 10^{18}\,\mathrm{Elektronen/s}$ durch einen Kupferdraht driften - dies ist ein typischer Wert für einen einfachen Stromkreis. Der Durchmesser des Drahtes beträgt $d = 1\,\mathrm{mm}$, und die Dichte der beweglichen Elektronen in Kupfer ist $n = 8.4 \times 10^{28}\,1/\mathrm{m}^3$. (1) Wie hoch ist die Drift-Geschwindigkeit der Elektronen? (2) Wie viele Minuten würde es dauern, bis ein Elektron, das mit dieser Geschwindigkeit unterwegs ist, von einem Ende zum anderen Ende eines Drahtes von $30\,\mathrm{cm}$ Länge driftet?

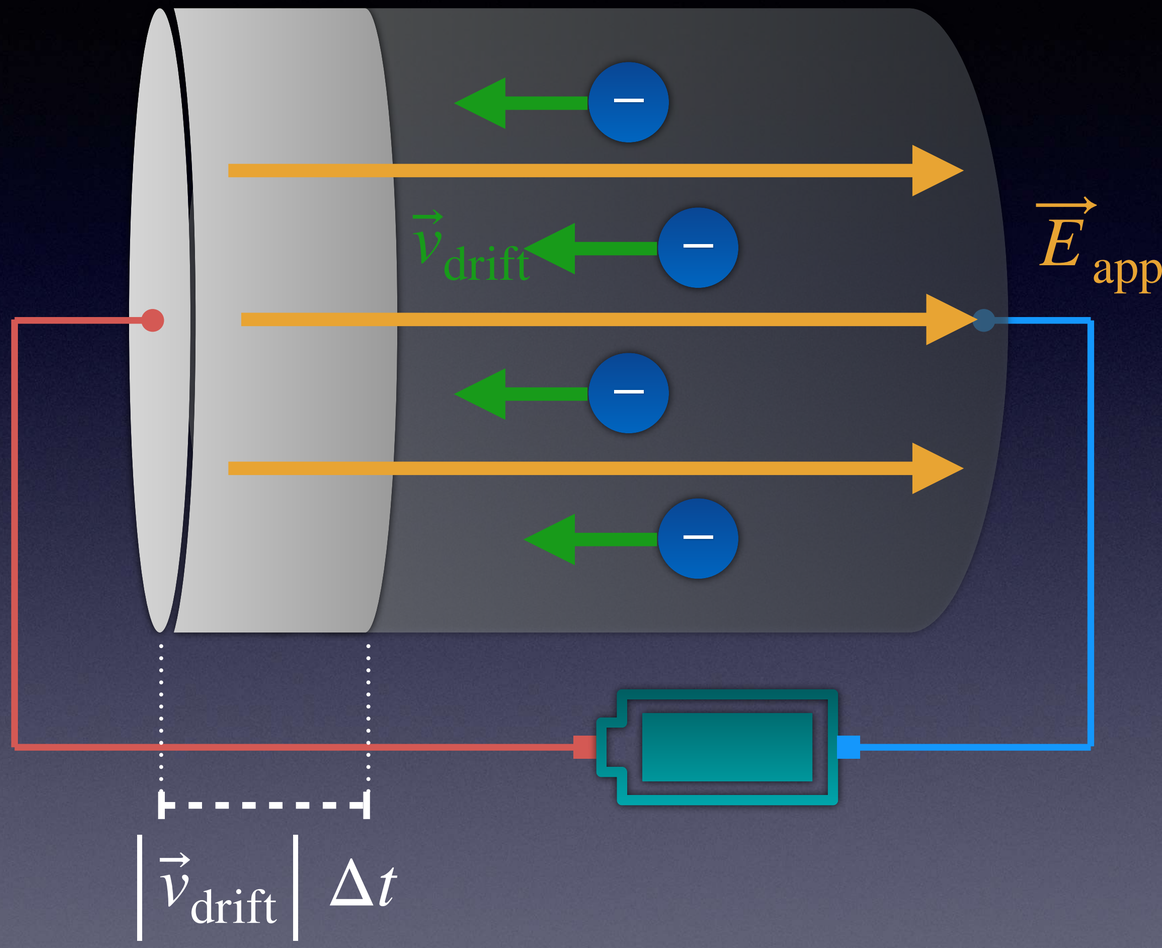
In den meisten Metallen besteht der elektrische Strom aus sich bewegenden Elektronen. Es gibt jedoch einige wenige Materialien, in denen sich die beweglichen Ladungen so verhalten, als wären sie positive „Löcher“ im „Meer“ der beweglichen Elektronen. Die positiven Löcher verhalten sich in jeder Hinsicht wie echte positive Teilchen. Zum Beispiel driften Löcher in Richtung des elektrischen Feldes und haben eine Ladung von $+e$.

Die Beobachtung des Magnetfeldes eines stromdurchflossenen Drahtes reicht daher nicht aus, um den Unterschied festzustellen, denn wenn sich das Vorzeichen der bewegten Ladung ändert, ändert sich auch die Richtung der Drift-Geschwindigkeit. Somit ist auch die Vorhersage des Biot-Savart-Gesetzes in beiden Fällen genau dieselbe.

Strom aus beweglichen „**Löchern**“



Strom aus beweglichen **Elektronen**



Bei Kupfer, wie bei den meisten Metallen, wird der Strom durch sich bewegende Elektronen verursacht. Zu den wenigen Metallen, die Löcherstrom aufweisen, gehören Aluminium und Zink. In den dotierten Halbleitern, die in der Elektronik wichtig sind, fließt bei p-Material (positiver Typ) ein Lochstrom und bei n-Material (negativer Typ) ein Elektronenstrom. In einem späteren Kapitel werden wir uns mit dem Hall-Effekt beschäftigen, mit dem sich feststellen lässt, ob der Strom in einem Draht durch Elektronen oder Löcher verursacht wird.

Da die meisten Effekte (mit Ausnahme des Hall-Effekts) für Elektronen- und Löcherstrom gleich sind, ist es üblich, „technischen Strom“ I so zu definieren, dass er in Richtung des Löcherstroms fließt, unabhängig von den tatsächlich beweglichen Ladungsträgern.

$$I = nA \left|\vec{v}_{\text{drift}}\right| \left|q\right|$$

Einheit: $\mathrm{C/s} \equiv A$ (Ampere)

Definition: Technischer Strom

Um einen Strom in einem Leiter aufrechtzuerhalten, ist ein elektrisches Feld erforderlich, das nicht Null ist. In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass die durchschnittliche Driftgeschwindigkeit in einem Metall gleich $b\vec{E}_{\text{app}}$ ist, wobei die Elektronenbeweglichkeit b und das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{app}}$ im Inneren des Metalls (das sich nicht im Gleichgewicht befindet) gemeint sind. Daher ist der konventionelle Strom in einem Draht

$$I = nAb\left|\vec{E}_{\text{app}}\right|\left|q\right| \equiv i\left|q\right| .$$

Wenn wir die Größe des elektrischen Feldes kennen, können wir vorhersagen, wie hoch der Strom in dem Draht sein wird.

Kontrollpunkt 5

1. Die Beweglichkeit der Elektronen in Kupfer beträgt $b = 4.5 \times 10^{-3}\,(\mathrm{C} \cdot \mathrm{m})/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{s})$, und die Dichte der beweglichen Elektronen beläuft sich auf $n = 8.4 \times 10^{28}\,1/\mathrm{m}^3$. In einem Kupferdraht mit einem Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{mm}$ herrscht ein elektrisches Feld der Größe $\left|\vec{E}_{\mathrm{app}}\right| = 0.05\,\mathrm{N/C}$. (1) Wie hoch ist der technische Strom I in diesem Draht? (Man beachte, dass ein kleines elektrisches Feld in Kupfer, das ein guter Leiter ist, einen beträchtlichen Strom erzeugt).

Biot-Savart-Gesetz für elektrische Ströme

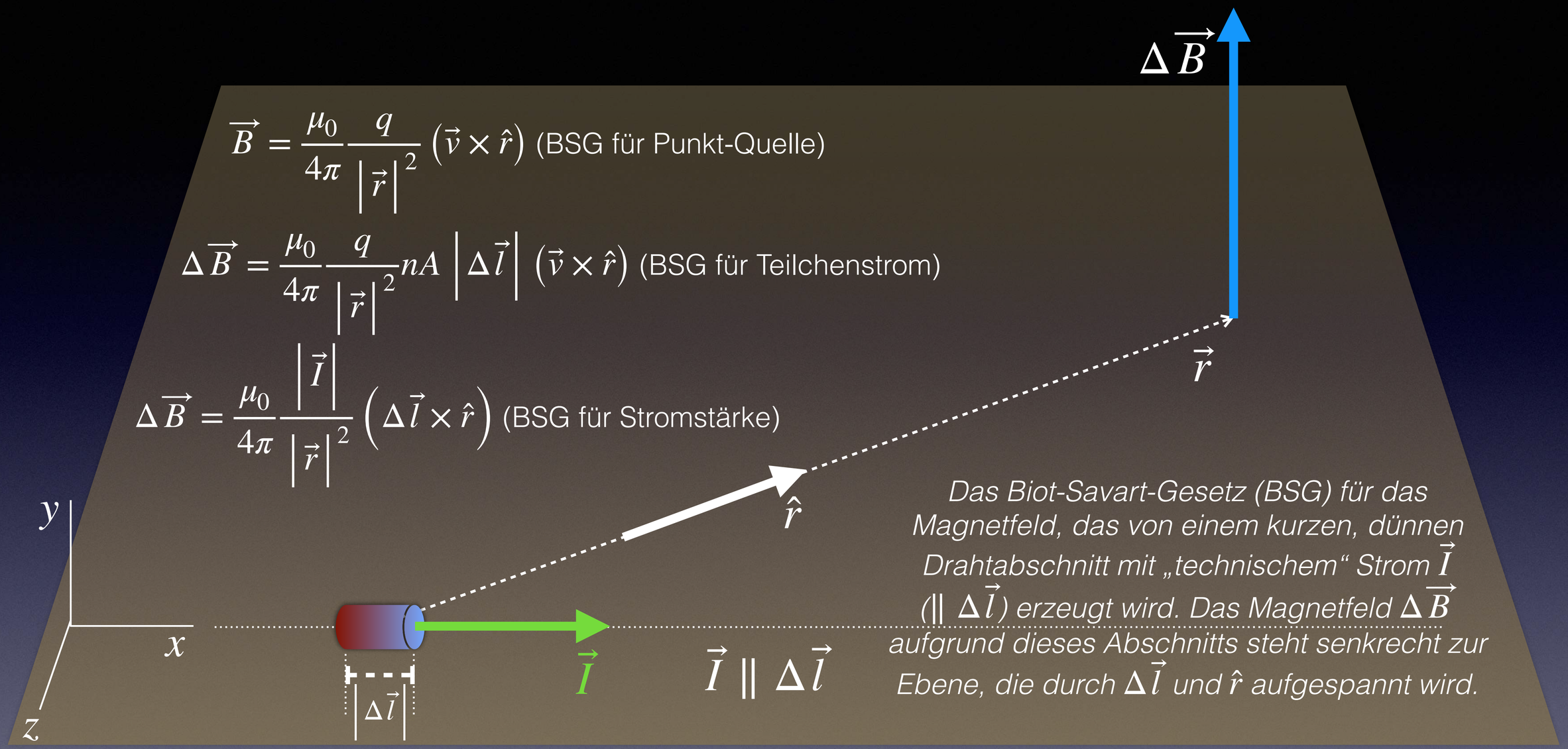
Wir beobachten nicht oft das Magnetfeld einer einzelnen bewegten (Punkt-) Ladung. Normalerweise interessieren wir uns für das Magnetfeld, das von einer großen Anzahl von Ladungen erzeugt wird, die sich in einem Stromkreis durch einen Draht bewegen. Da für Magnetfelder das Überlagerungsprinzip gilt, müssen wir die Beiträge der einzelnen Ladungen zum gesamten Magnetfeld addieren.

Berechnen wir das Magnetfeld, das auf einen Strom $\vec{I}$ in einem sehr dünnen Draht (Länge $\Delta\vec{l}$, Querschnittsfläche A) zurückzuführen ist (siehe folgende Folie). In dem Volumen $A\left|\Delta\vec{l}\right|$ gibt es $nA\left|\Delta\vec{l}\right|$ bewegte Ladungsträger. Wir werden das Magnetfeld an einem Ort $\vec{r}$ messen, der weit genug von diesem kleinen Volumen entfernt ist, so dass jede bewegte Ladung in dem Volumen ungefähr das gleiche Magnetfeld erzeugt.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right)$$ (BSG für Punkt-Quelle)

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} nA \left|\Delta\vec{l}\right| \left(\vec{v} \times \hat{r}\right)$$ (BSG für Teilchenstrom)

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\vec{I}\right|}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\Delta\vec{l} \times \hat{r}\right)$$ (BSG für Stromstärke)



Das Biot-Savart-Gesetz (BSG) für das Magnetfeld, das von einem kurzen, dünnen Drahtabschnitt mit „technischem“ Strom $\vec{I}$ ($\parallel \Delta\vec{l}$) erzeugt wird. Das Magnetfeld $\Delta\vec{B}$ aufgrund dieses Abschnitts steht senkrecht zur Ebene, die durch $\Delta\vec{l}$ und $\hat{r}$ aufgespannt wird.

Xx

Das Biot-Savart-Gesetz für verteilte elektrische Ströme

Im Folgenden werden wir das Biot-Savart-Gesetz anwenden, um das Magnetfeld verschiedener Stromverteilungen in Drähten zu bestimmen. Wir werden denselben vierstufigen Ansatz verwenden, den wir zur Bestimmung des elektrischen Feldes verteilter Ladungen in Kapitel 3 verwendet haben:

1. Unterteile die Stromverteilung in kurze Abschnitte $\Delta \vec{l}$ und zeichne $\Delta \overrightarrow{B}$ für ein repräsentatives Stück;

2. Formuliere den (algebraischen) Ausdruck für $\Delta \overrightarrow{B}$;

3. Addiere die Beiträge $\Delta \overrightarrow{B}$ aller kurzen Abschnitte;

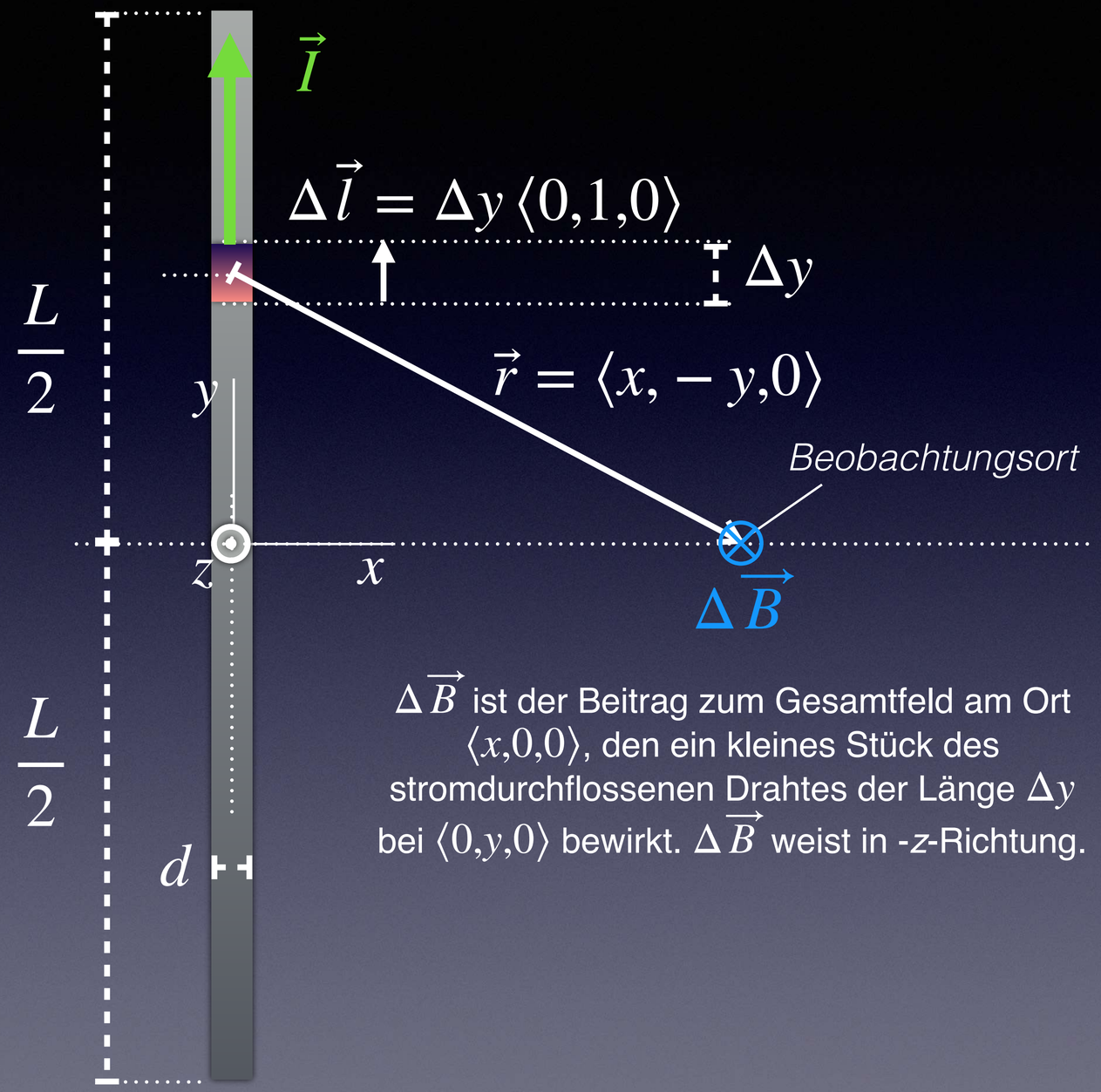
4. Verifiziere und plausibilisiere das Ergebnis.

Mit dem auf der vorangehenden Folie beschriebenen Verfahren können wir das Magnetfeld in der Nähe eines langen stromdurchflossenen geraden Drahtes berechnen. Damit kann man die Ablenkung der Kompassnadel vorhersagen, die man beobachtet, wenn man den Draht in die Nähe des Kompasses bringt, und man kann seine Vorhersage mit der experimentellen Beobachtung vergleichen.

Der lange gerade Draht zählt zu den wenigen Fällen, die wir vollständig von Hand berechnen können. Von einigen Sonderfällen abgesehen, ist es oft am besten, das Magnetfeld aufgrund von verteilten Strömen mit dem Computer zu berechnen. Die grundlegenden Konzepte, die du in einem Computerprogramm verwenden würdest, sind die gleichen wie die, die wir hier verwenden, nur geht es mit einem Computer bequemer.

Wir betrachten einen von dem (technischen) Strom $\vec{I}$ durchflossenen Draht der Länge L. Wir unterteilen den Draht in sehr kurze Abschnitte Δy, wobei Δy ein kleiner Teil der Gesamtlänge L ist. Wir berechnen das Magnetfeld für den senkrechten Abstand x vom Mittelpunkt des Drahtes. Mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel können wir die Richtung von $\Delta\vec{B}$ für dieses kurze Stück des stromdurchflossenen Drahtes berechnen:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left|\vec{I}\right|}{\left(x^2+y^2\right)}\left(\Delta\vec{l}\times\hat{r}\right).$$



$\Delta\vec{B}$ ist der Beitrag zum Gesamtfeld am Ort $\langle x,0,0\rangle$, den ein kleines Stück des stromdurchflossenen Drahtes der Länge Δy bei $\langle 0,y,0\rangle$ bewirkt. $\Delta\vec{B}$ weist in -*z*-Richtung.

Auswertung des Kreuzprodukts $\Delta\vec{l} \times \hat{r}$:

$$\frac{\Delta y}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}} \langle 0,1,0 \rangle \times \langle x, -y, 0 \rangle = \frac{\Delta y}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}} \langle 0,0, -x \rangle \ .$$

Setzen wir das Ergebnis für das Kreuzprodukt ein, so erhalten wir:

$$\Delta B_x = 0 \; ; \; \Delta B_y = 0 \; ; \; \Delta B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\vec{I}\right| x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \Delta y \; .$$

Lassen wir nun Δy infinitesimal klein werden, so schreiben wir für $\mathrm{d}B_z$:

$$\mathrm{d}B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\vec{I}\right| x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}y \; .$$

Um B_z zu erhalten müssen wir von $y = -L/2$ bis $y = +L/2$ integrieren.

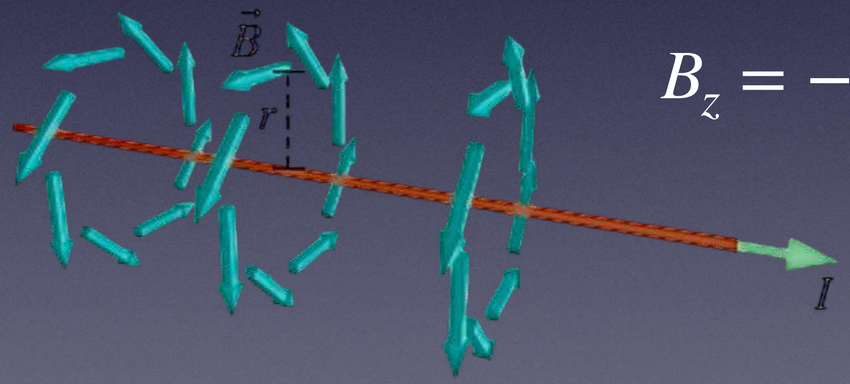
Magnetisches Feld eines geraden Drahts

by Web VPython

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left|\vec{I}\right| x \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}y$$

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left|\vec{I}\right| x \left[\frac{y}{x^2\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left|\vec{I}\right| \frac{L}{x^2} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{L/2}{x}\right)^2\right)^{1/2}}$$



magnetisches Feld um einen (langen) Draht

Hat das Ergebnis die richtige Einheit? Die Einheit sollte dieselbe sein wie für das magnetische Feld einer Punktladung:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right) .$$

Dies ist der Fall, da in

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left|\vec{I}\right| \frac{L}{x^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{L/2}{x}\right)^2\right)^{1/2}}$$

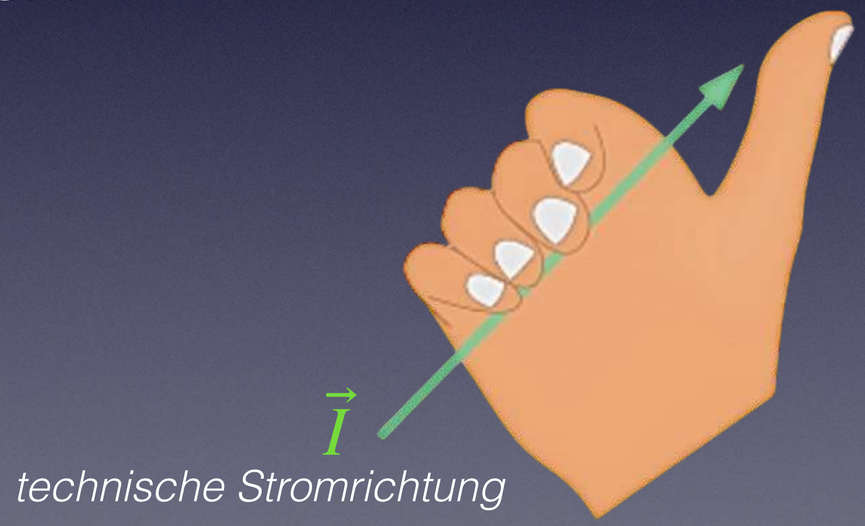
der letze Quotient dimensionslos ist.

Sehen wir uns das Ergebnis jetzt für den Spezialfall $x \ll L$ (Ort sehr nahe am Draht) oder $L \gg x$ (sehr langer Draht) an. Wir erhalten:

$$B_z \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} 2 \left|\vec{I}\right| \frac{1}{x} .$$

Die magnetische Feldstärke nimmt für $x \ll L$ also linear mit dem Abstand x ($\propto 1/x$) zum Draht ab. Anmerkung: Die Fläche des Mantels eines Zylinders wächst linear mit dem seinem Radius ($\propto x$) an. In sehr großen Abständen finden wir für das Feld eine $\propto 1/x^2$. Variation, da die Oberfläche einer Kugel $\propto x^2$ anwächst.

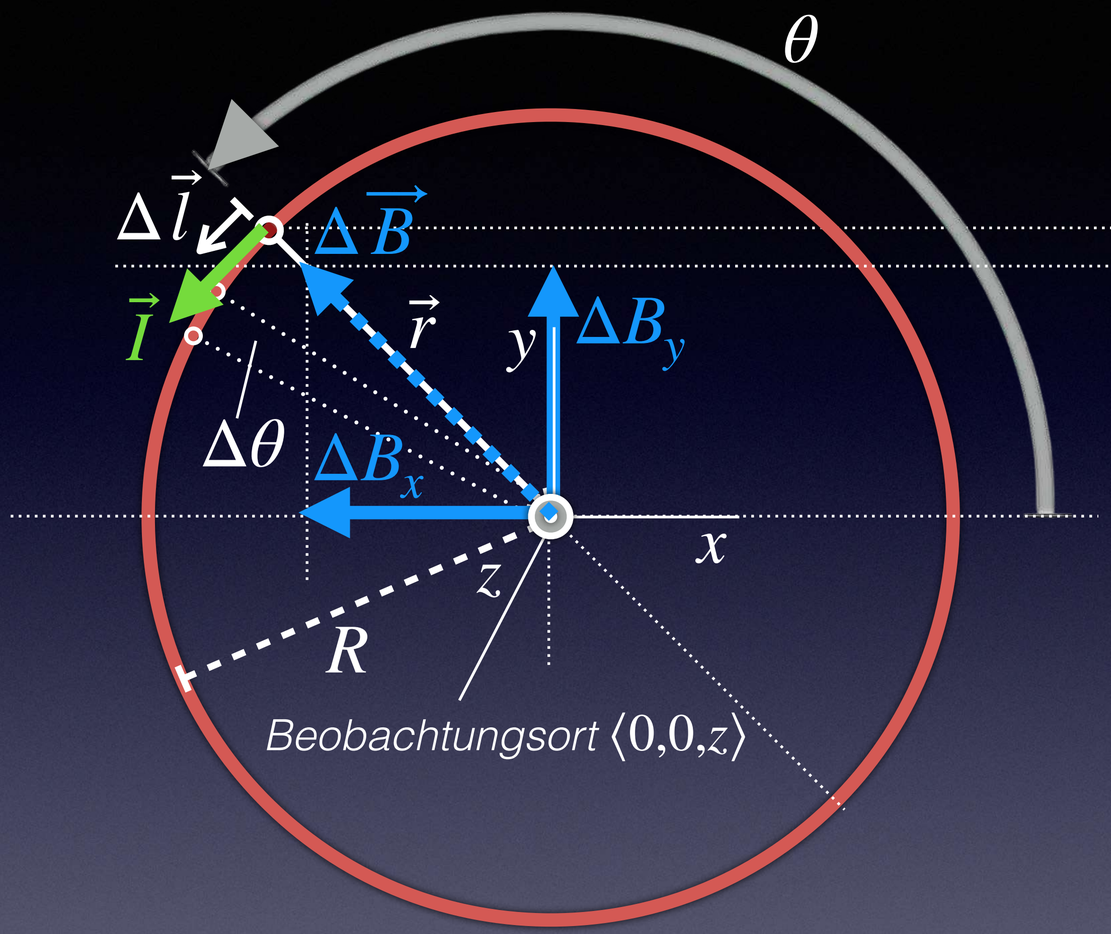
Es gibt eine weitere Rechte-Hand-Regel, die bei stromdurchflossenen Drähten oft praktisch ist. Wie unten zu sehen ist, krümmen sich die Finger in Richtung des Magnetfelds, wenn man den Draht mit der rechten Hand fasst und der Daumen in Richtung des technischen Stroms zeigt. Es ist klar, dass diese Regel für die rechte Hand mit derjenigen übereinstimmt, die wir für das Biot-Savart-Gesetz verwendet haben.



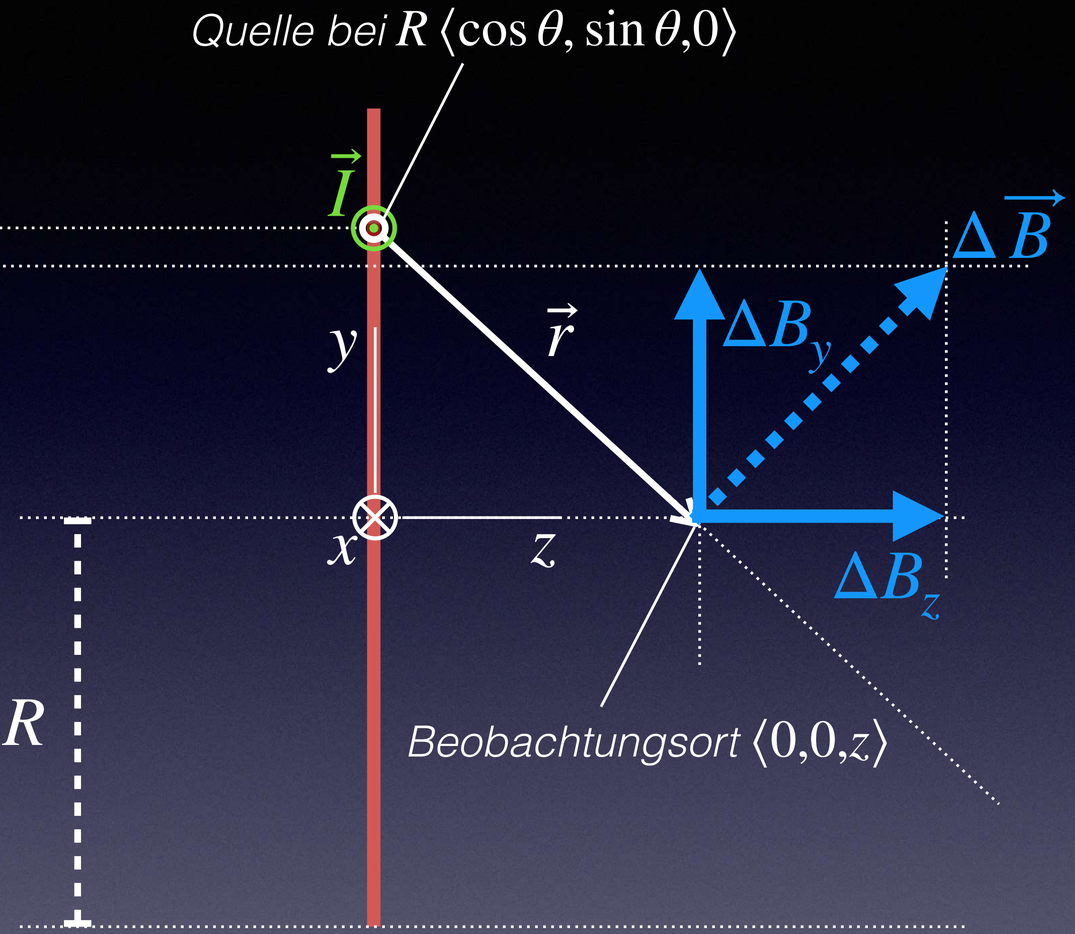
Magnetfeld eines stromdurchflossenen Rings

Als Nächstes berechnen wir das Magnetfeld eines Drahtrings, durch den ein „technischer“ Strom $\vec{I}$ fließt. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, das Magnetfeld $\overrightarrow{B}$ an einer beliebigen Stelle entlang der Achse des Rings zu berechnen, die durch den Mittelpunkt und senkrecht zum Ring verläuft.

Diese Berechnung ist aus zwei Gründen wichtig: Erstens sind viele wissenschaftliche und technische Anwendungen des Magnetismus mit kreisförmigen Schleifen aus stromführendem Draht verbunden. Zweitens wird die Berechnung später auch bei einer Analyse „atomarer Ringe“ (Elektron umkreist Atomkern) in z.B. Stabmagneten verwendet werden. Nach der Berechnung des Magnetfelds werden wir unsere Vorhersagen mit Experimenten vergleichen.



Frontansicht entgegengesetzt zur Richtung der z-Achse.



Seitenansicht in Richtung der x-Achse.

Beitrag $\Delta\overrightarrow{B}$ eines kurzen (geraden) Stück des Rings zum Magnetfeld:

$$\Delta\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left|\vec{I}\right|}{\left(R^2+z^2\right)}\left(\Delta\vec{l}\times\hat{r}\right), \text{ mit}$$

$$\Delta\vec{l} = R\left\langle\cos\left(\theta+\Delta\theta\right)-\cos\theta, \sin\left(\theta+\Delta\theta\right)-\sin\theta, 0\right\rangle \text{ und}$$

$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left\langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z\right\rangle .$$

Die Verwendung beliebiger θ-Werte in $\Delta\vec{l}\times\hat{r}$ ist „unübersichtlich“.

Wir können die „Unübersichtlichkeit“ jedoch überwinden, wenn wir uns die Symmetrie der Situation vor Augen führen. Aufgrund der Kreissymmetrie des Rings werden die Beiträge ΔB_x und ΔB_y eines kurzen Ringabschnitts durch den Beitrag eines Abschnitts auf der gegenüberliegenden Seite des Rings aufgehoben.

Außerdem ist der Beitrag ΔB_z von jedem Ringabschnitt zu B_z genau gleich. Dies ermöglicht es uns, einen Abschnitt auszuwählen, für den ΔB_z leicht zu berechnen ist, und das Ergebnis anschließend für jeden Teil der Summe zu verwenden.

Wir wählen $\vec{r}_o = \langle 0,R,0 \rangle$. Hierfür erhalten wir:

$$\vec{r} = \langle 0, -R, z \rangle \text{ und } \hat{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \langle 0, -R, z \rangle ,$$

$$\Delta \vec{l} = \langle -R\Delta\theta,0,0 \rangle \text{ und damit}$$

$$\Delta \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\vec{I}\right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \left(\langle -R\Delta\theta,0,0 \rangle \times \langle 0, -R, z \rangle \right) . \text{ Ergibt}$$

$$\Delta \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left|\vec{I}\right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \left\langle 0, zR\Delta\theta, R^2\Delta\theta \right\rangle .$$

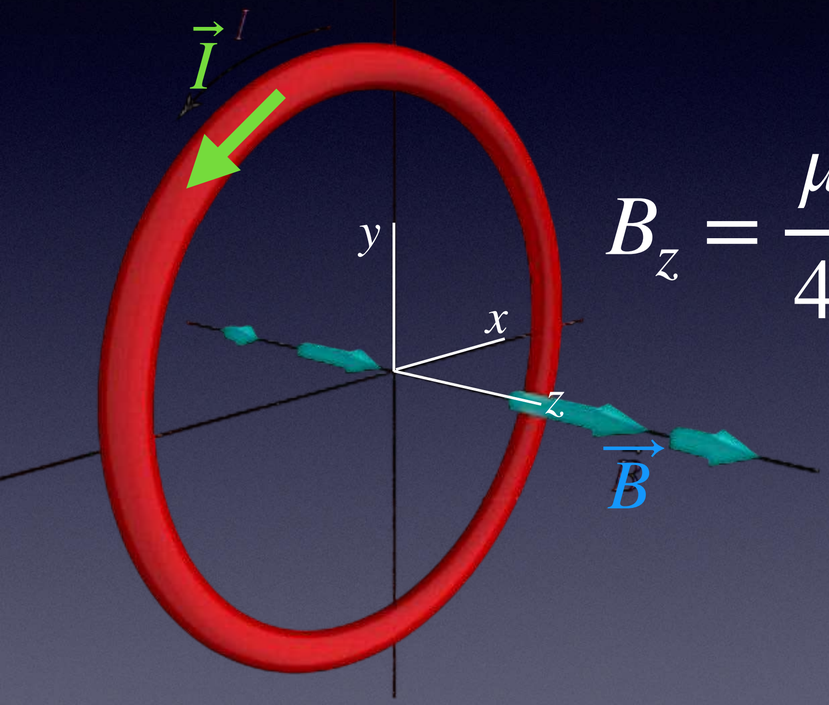
Wir benötigen nur ΔB_z, da sich alle anderen zu Null addieren:

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \left| \vec{I} \right|}{\left(R^2 + z^2 \right)^{3/2}} \Delta\theta \, .$$

Lassen wir nun $\Delta\theta$ infinitesimal klein werden, so erhalten wir:

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \left| \vec{I} \right|}{\left(R^2 + z^2 \right)^{3/2}} \mathrm{d}\theta \, .$$

Um B_z zu erhalten, müssen wir über den gesamten Ring, von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$, integrieren. Wir erhalten das bestimmte Integral



magnetisches Feld entlang der zentralen Achse eines Rings

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \left| \vec{I} \right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \text{ , und damit}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 \left| \vec{I} \right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} .$$

Hat das Ergebnis die richtige Einheit? Die Einheit sollte dieselbe sein wie für das magnetische Feld einer Punktladung:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right) \quad \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} \equiv \mathrm{T} \right)$$

Dies ist der Fall, wie wir

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 \left|\vec{I}\right|}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \quad \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} \equiv \mathrm{T} \right)$$

mit diesem Vergleich feststellen können.

Für B_z im Zentrum des Rings, also für $z = 0$, erhalten wir

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \left| \vec{I} \right|}{R} .$$

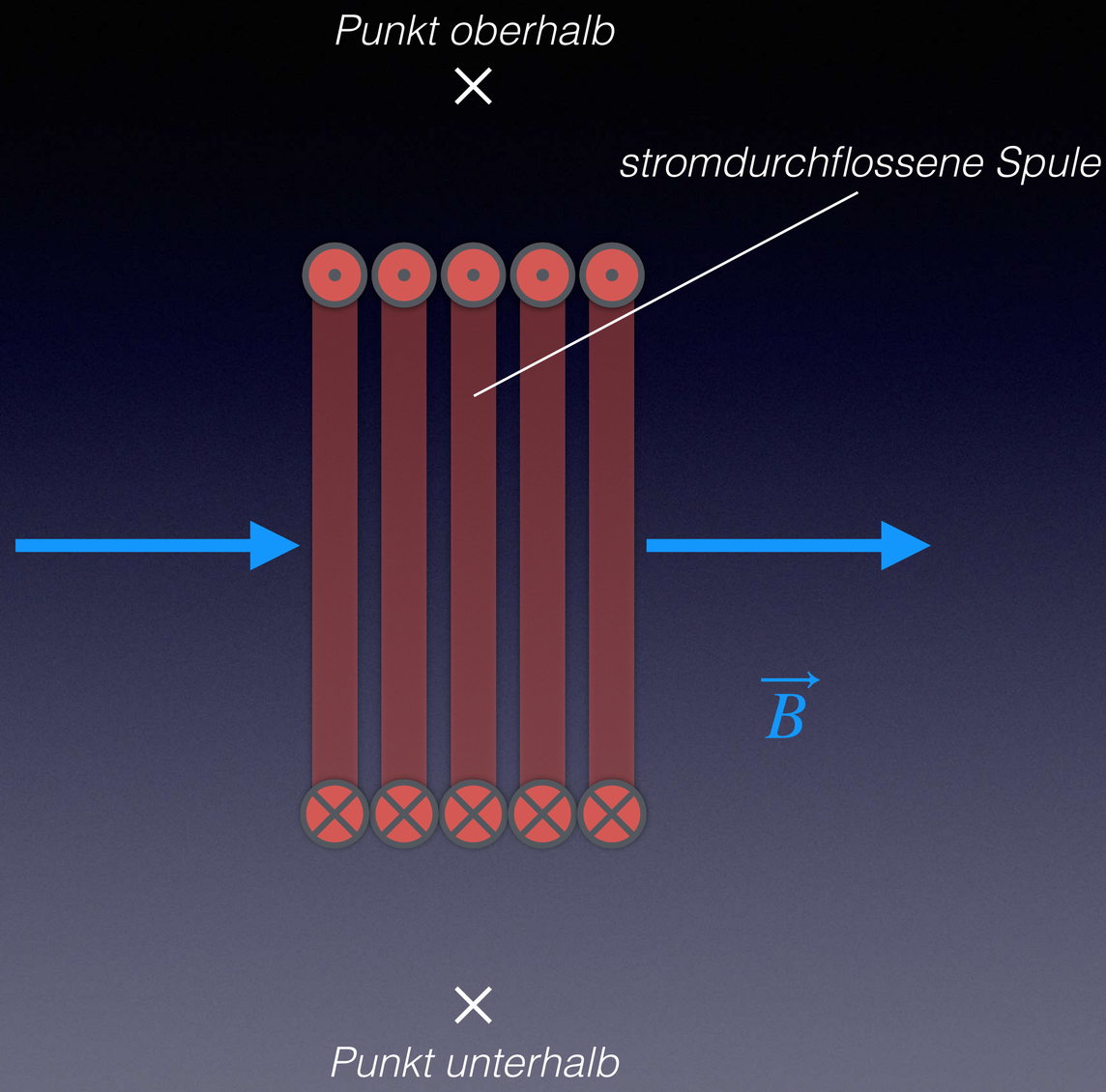
Weit entfernt von Ring, also für $z \gg R$, finden wir

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 \left| \vec{I} \right|}{z^3} .$$

Die Stärke des magnetischen Feldes B_z nimmt vergleichbar zu dem Feld eines elektrischen Dipols in großen Abständen von dem Ring $\propto 1/z^3$ ab.

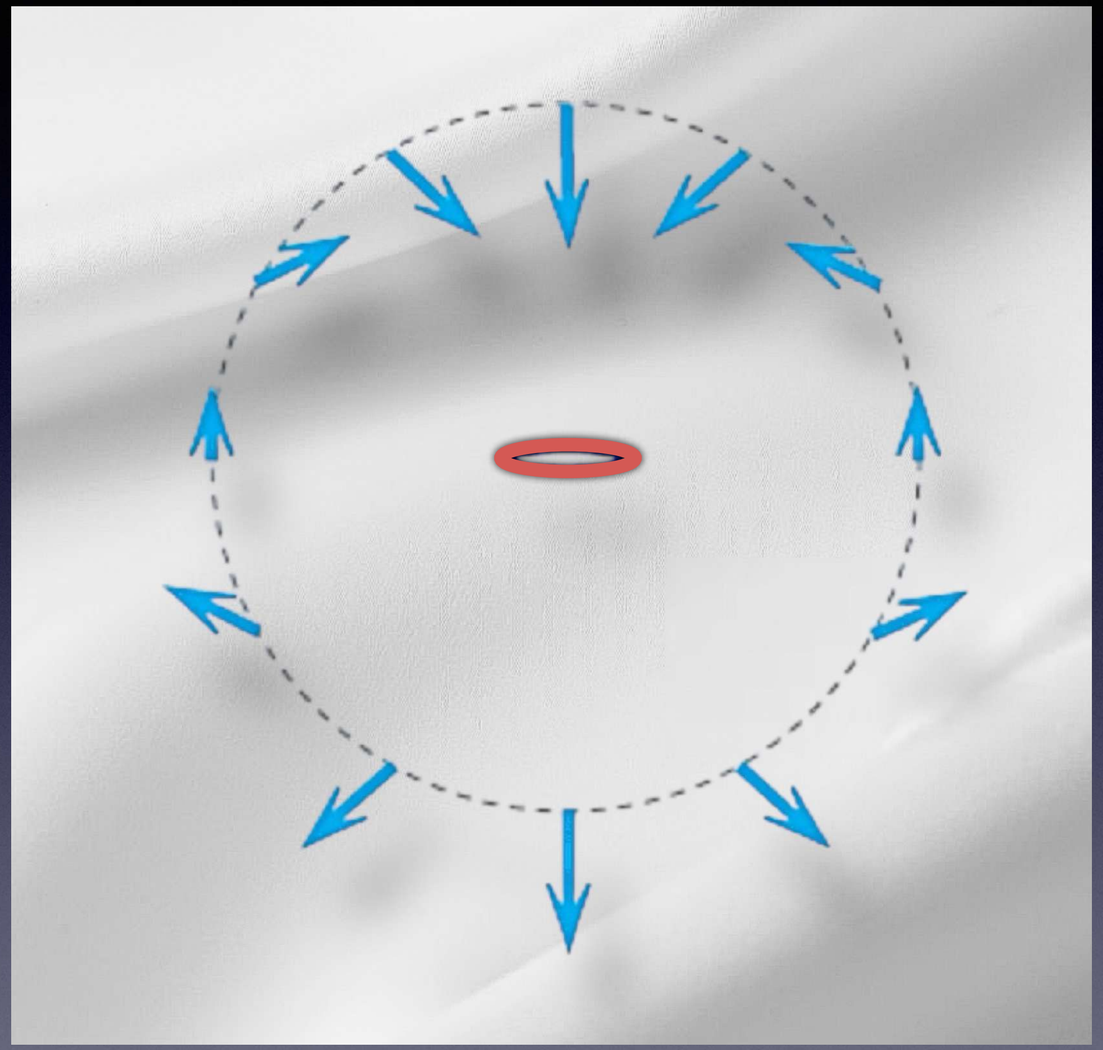
Kontrollpunkt 6

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Verlauf des Magnetfeldes entlang der Achse einer Spule mit vielen Windungen. (1) Welche Richtung hat das Magnetfeld an den Punkten oberhalb und unterhalb der Spule? (Tipp: Wende das Biot-Savart-Gesetz qualitativ auf die nahe und ferne Hälfte der Spulen-Windungen an).



Das Magnetfeld an beliebigen Stellen außerhalb des Rings ist analytisch schwieriger zu berechnen, aber das Magnetfeld hat ein charakteristisches Dipolmuster, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt wird, welches das Ergebnis einer Computerberechnung ist, die alle Beiträge vieler kurzer Abschnitte des Rings aufsummiert.

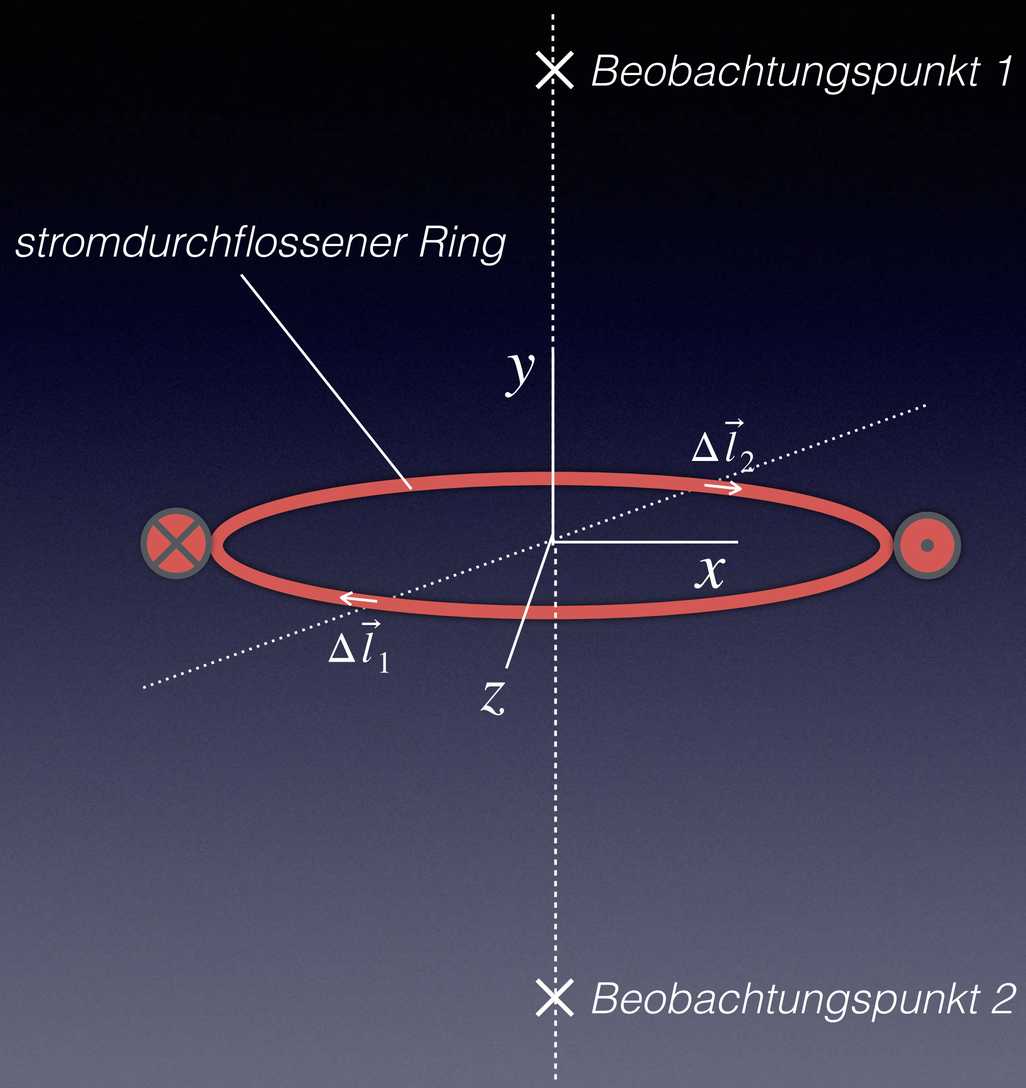
Magnetisches Feld eines Rings in zwei Ebenen
by Web VPython



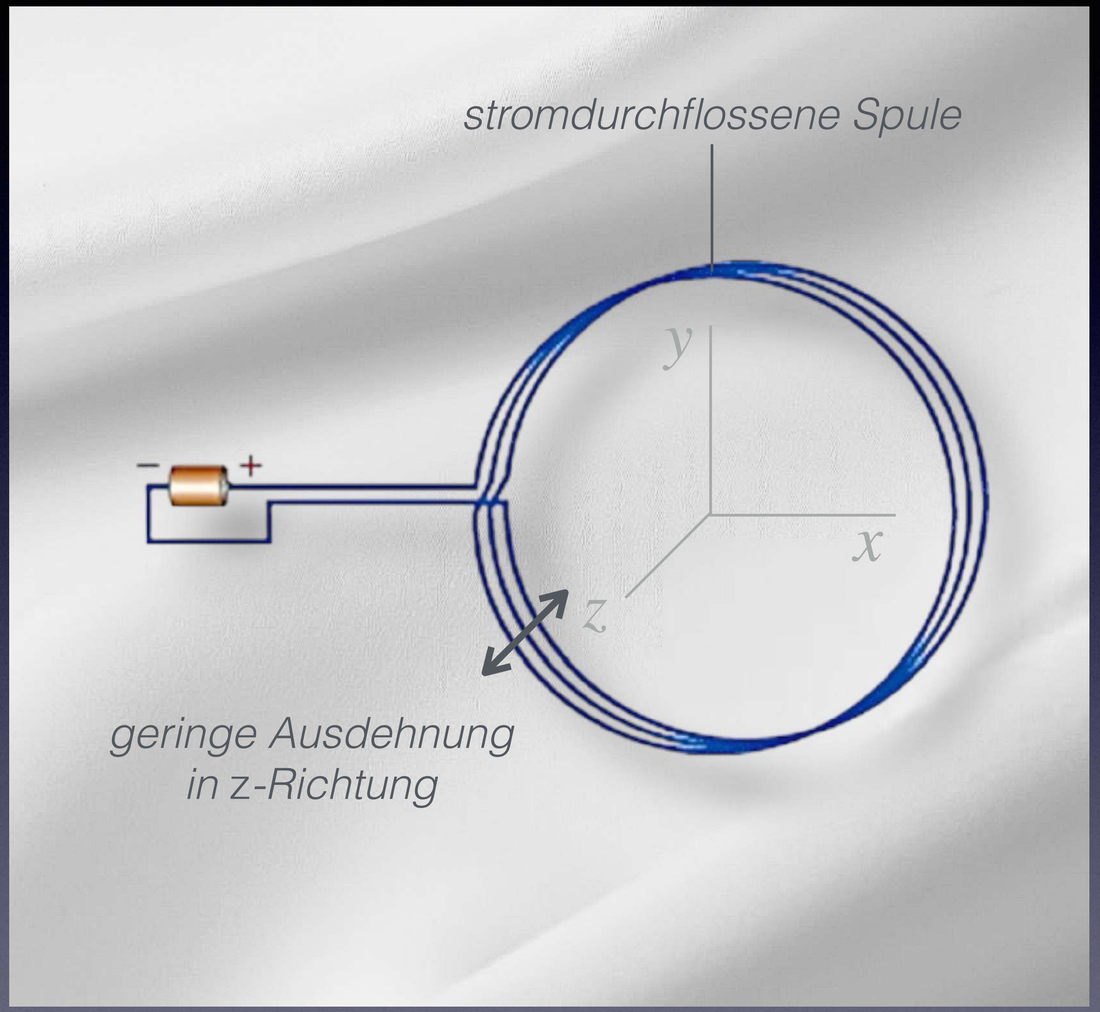
Das Magnetfeld eines stromführenden Rings (in der Mittelebene mit Achse des Rings), an Stellen außerhalb des Rings.

Kontrollpunkt 7

Es gibt eine weitere „Regel der rechten Hand“, die häufig verwendet wird, um die Richtung des Magnetfelds entlang der Achse eines stromdurchflossenen Rings zu bestimmen. Lasse dabei die Finger deiner rechten Hand in Richtung des technischen Stroms weisen, und dein Daumen zeigt dann in die Richtung des Magnetfelds an einer beliebigen Stelle der Achse des Rings. (1) Gib mit Hilfe dieser Regel die Richtung des Magnetfeldes an den angegebenen Beobachtungsorten an. (2) Berücksichtige zwei kurze, sich gegenüberliegende Stücke $\Delta\vec{l}$ des Rings. Zeige, dass mit $\Delta\vec{l} \times \hat{r}$ dieselbe Richtung des Magnetfelds wie zuvor prognostiziert wird.



Eine stromdurchflossene, aus N Windungen aufgebaute Spule, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen, erzeugt ein Magnetfeld, das ungefähr das N-fache des Magnetfelds einer einzelnen Windung beträgt, sofern die Spule „dünn“ ist, d. h. alle Windungen nahezu in der gleichen Ebene liegen (hier ist das die *xy*-Ebene).

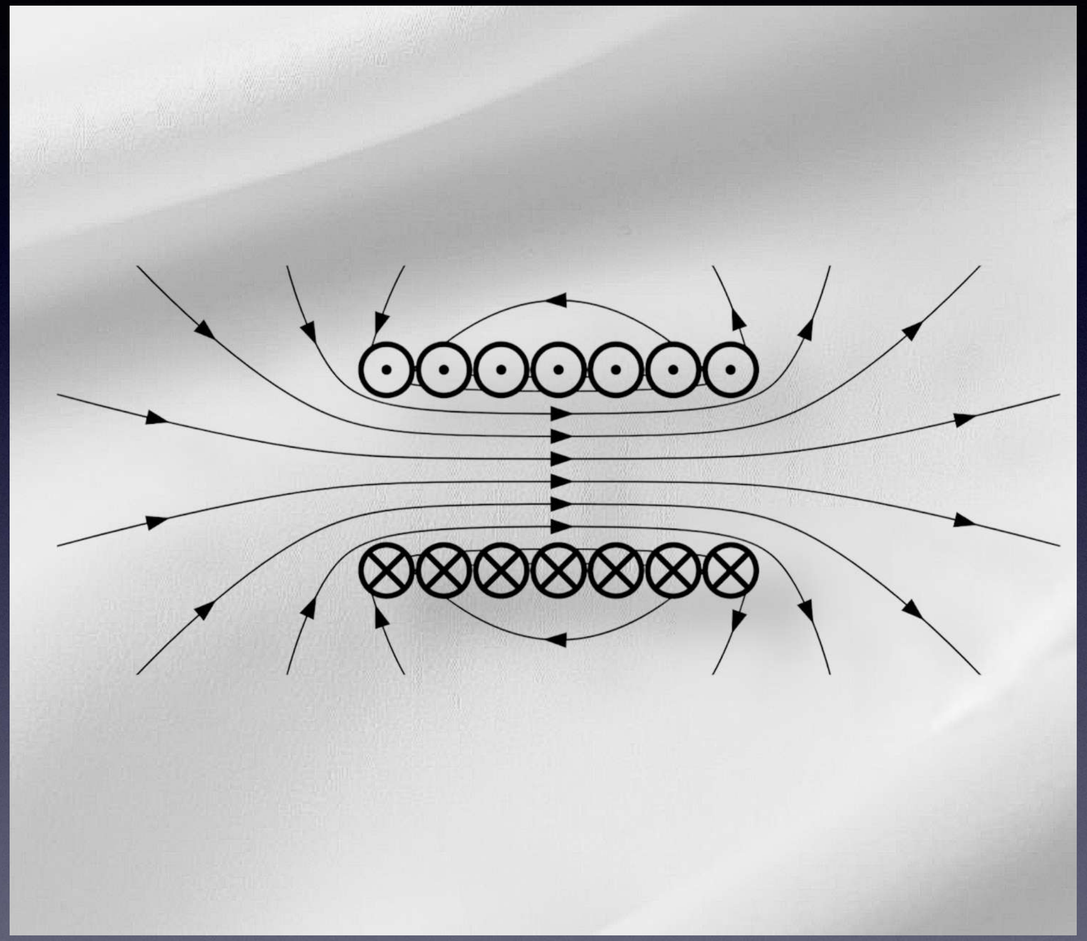


Eine dünne Spule mit drei Windungen.

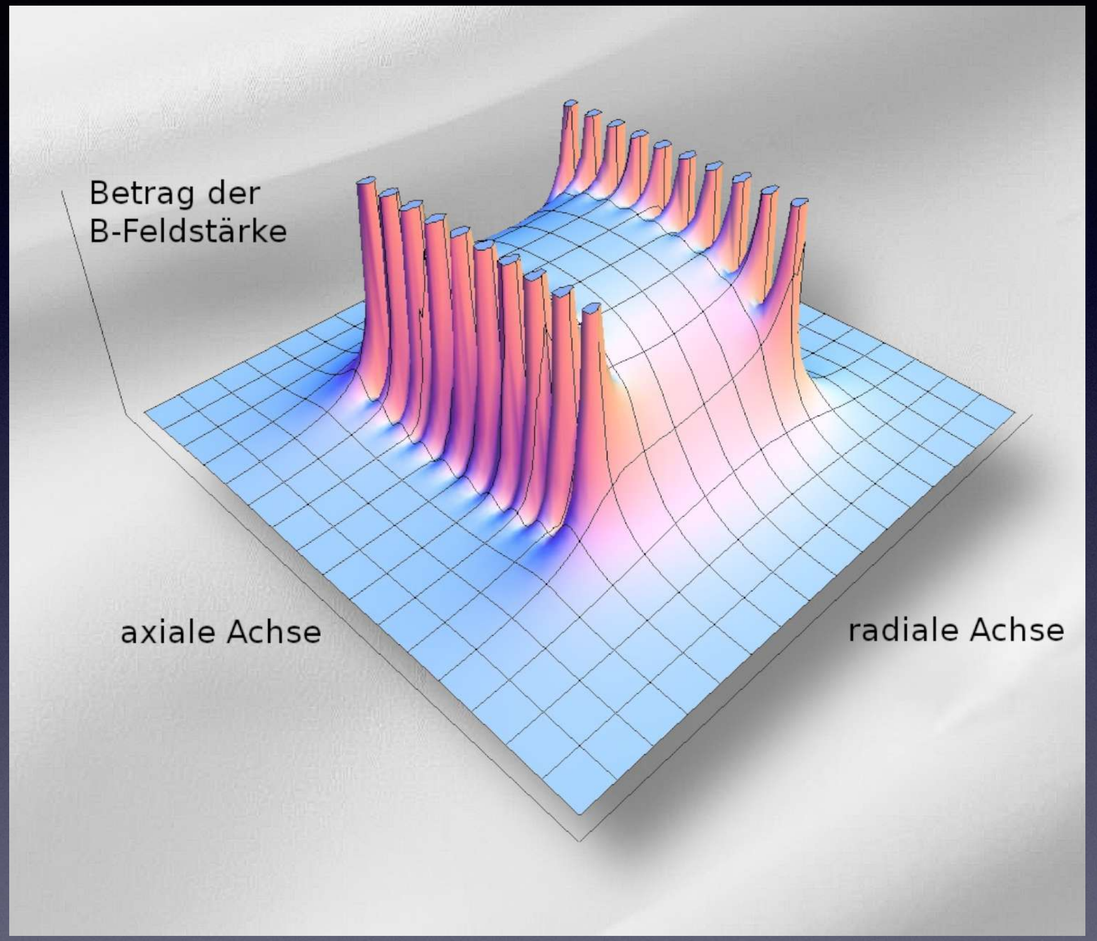
Eine **Zylinderspule** ist eine Spule, bei der die Drahtwicklung auf einem Zylindermantel liegt, also dünn gegenüber dem Zylinderdurchmesser ist. In der Regel ist sie einlagig. Einlagige Zylinderspulen haben einen helixförmigen Verlauf des Drahtes.

Eine Zylinderspule mit einem großen Verhältnis Länge zu Durchmesser ist zum Erzeugen eines homogenen Magnetfeldes in ihrer Mitte geeignet (solenoidales Magnetfeld) und wird manchmal auch als **Solenoid** bezeichnet.

Hinweis: *Visualisierung siehe nächste Folie.*



Magnetfeld einer Zylinderspule (im Querschnitt).
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zylinderspule



Magnetfeld einer Zylinderspule mit zehn Windungen. Die Schnittebene verläuft axial durch das Zentrum.
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zylinderspule

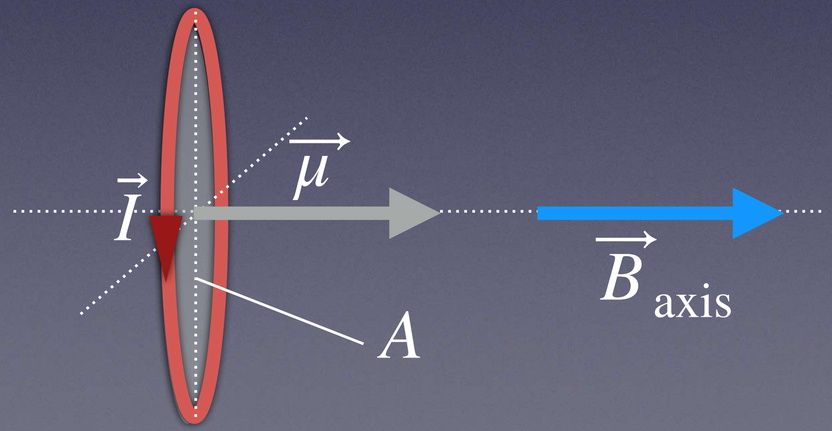
Magnetisches Dipolmoment

Erinnere dich an die Gleichung für das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{axis}}$ entlang der Achse eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ in einem großen Abstand $\vec{r}$ zum Dipol:

$$\vec{E}_{\text{axis}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\vec{p}}{\left|\vec{r}\right|^3}.$$

Analog erhält man für das Magnetfeld $\vec{B}_{\text{axis}}$ entlang der Achse einer stromdurchflossenen Spule, mit $\vec{\mu} = \left|\vec{I}\right| A\hat{A}$ als magnetischem Dipolmoment:

$$\vec{B}_{\text{axis}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{\mu}}{\left|\vec{r}\right|^3}.$$



Kontrollpunkt 8

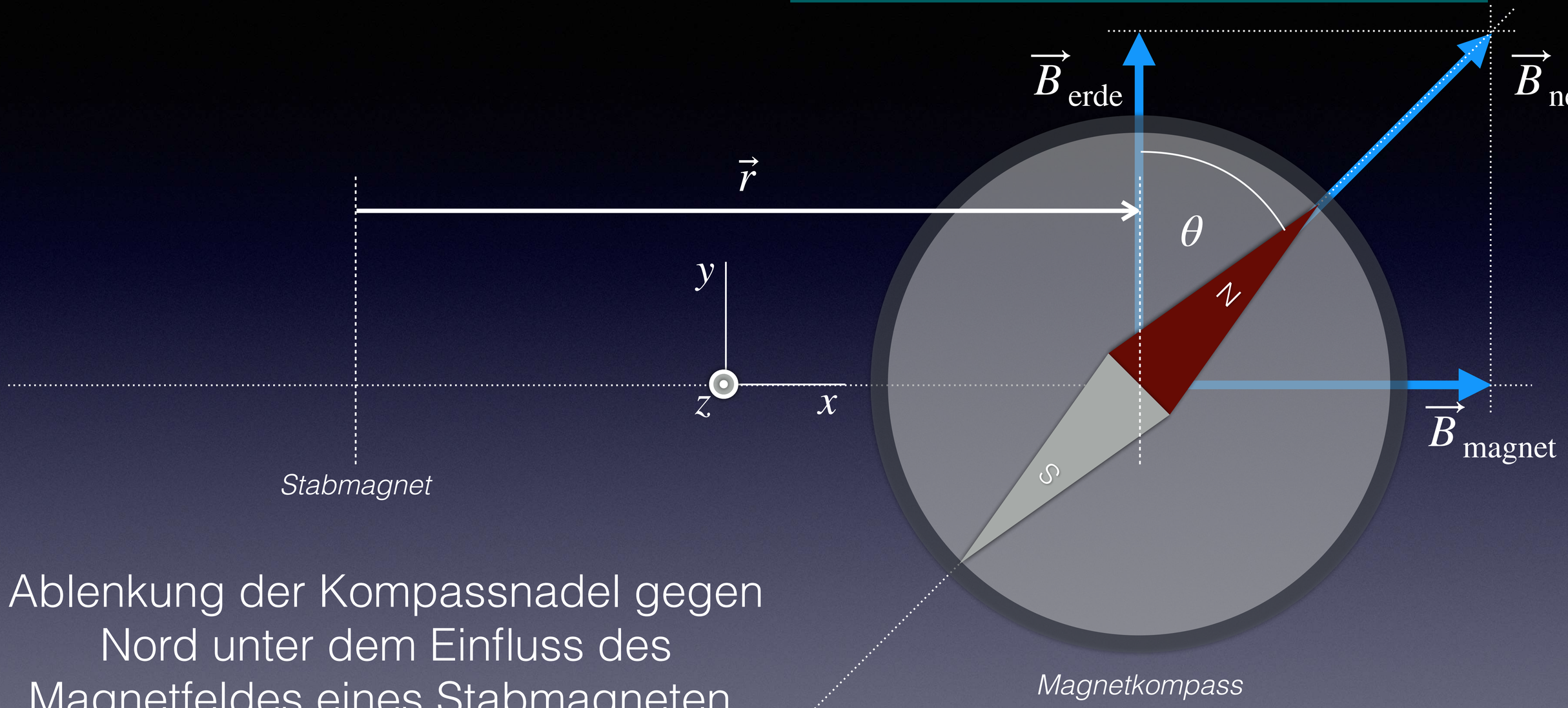
1. Wie groß ist das magnetische Dipolmoment einer rechteckigen Spule ($3 \times 5\,\mathrm{cm}^2$) mit 3000 Windungen, durch die ein Strom von $2\,\mathrm{A}$ hindurchfließt?

Das magnetische Feld eines Stabmagneten

Der Name „Stabmagnet“ lässt schon vermuten, dass dieser auch ein Magnetfeld erzeugt. Wir sagen, dass ein Magnetfeld vorhanden ist, wenn wir sehen, dass eine Kompassnadel ausgelenkt wird, sobald du einen Stabmagneten in die Nähe des Kompasses bringst, siehst du, dass ein Stabmagnet eine Kompassnadel auslenkt.

Zwei (Stab-) Magnete interagieren miteinander und ziehen sich je nach ihrer relativen Ausrichtung an oder stoßen sich ab.

Stabmagnet und Kompass
by University of Colorado, Boulder



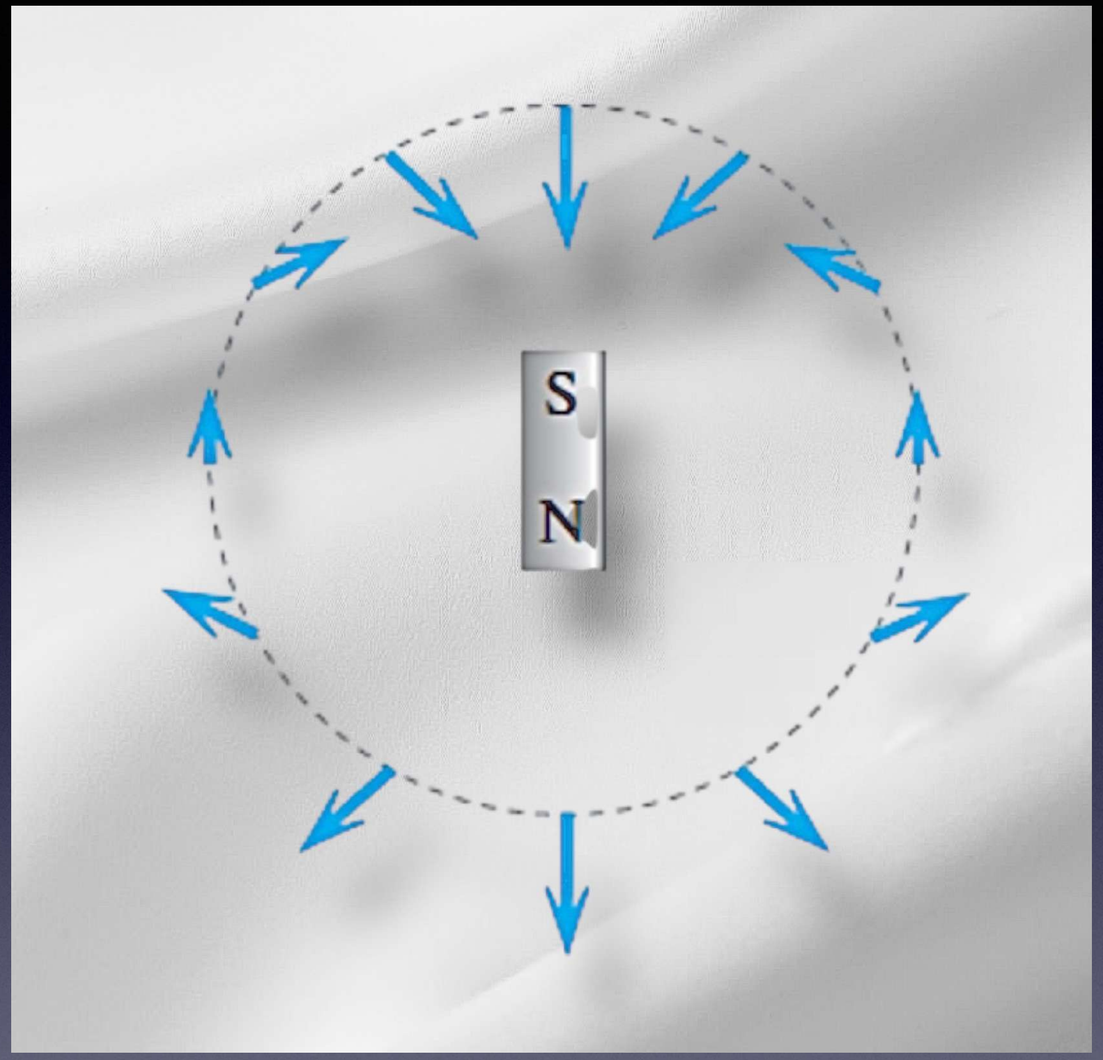
Ablenkung der Kompassnadel gegen Nord unter dem Einfluss des Magnetfeldes eines Stabmagneten.

Kontrollpunkt 9

1. Ein Kompass zeigt ursprünglich nach Norden. Ein Stabmagnet, mit einer Masse $M = 69.5\,\mathrm{g}$, ist in Ost-West-Richtung ausgerichtet, und wird in der Nähe des Kompasses platziert, so dass der Nordpol des Magneten zum Kompass hinweist. Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Magneten und dem Mittelpunkt des Kompasses beträgt $23.3\,\mathrm{cm}$. Die Kompassnadel wird um $70°$ gegen Nord abgelenkt. (1) Wie groß ist das magnetische Dipolmoment des Stabmagneten? Hinweis: $\overrightarrow{B}_{\mathrm{erde}} = 2 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Magnetische Wechselwirkungen haben einige Ähnlichkeiten mit elektrischen Wechselwirkungen: Man kann sowohl Anziehung als auch Abstoßung beobachten, es gilt das Überlagerungsprinzip, und die Wechselwirkungen gehen durch Materie hindurch. Allerdings gibt es auch einige wesentliche Unterschiede. Ein Stabmagnet interagiert nur mit Gegenständen aus Eisen oder Stahl, während ein geladenes Klebeband mit allen Gegenständen interagiert. Ein Magnet kann dauerhaft magnetisch sein, aber ein geladenes Klebeband oder ein Plastikstift verliert seine Ladung innerhalb relativ kurzer Zeit. Zwei negativ geladene Gegenstände stoßen sich immer ab, während sich zwei Magnete je nach ihrer Ausrichtung anziehen oder abstoßen können. Das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Draht hat ein „ringförmiges“ Muster, das wir bei elektrischen Feldern nicht sehen.

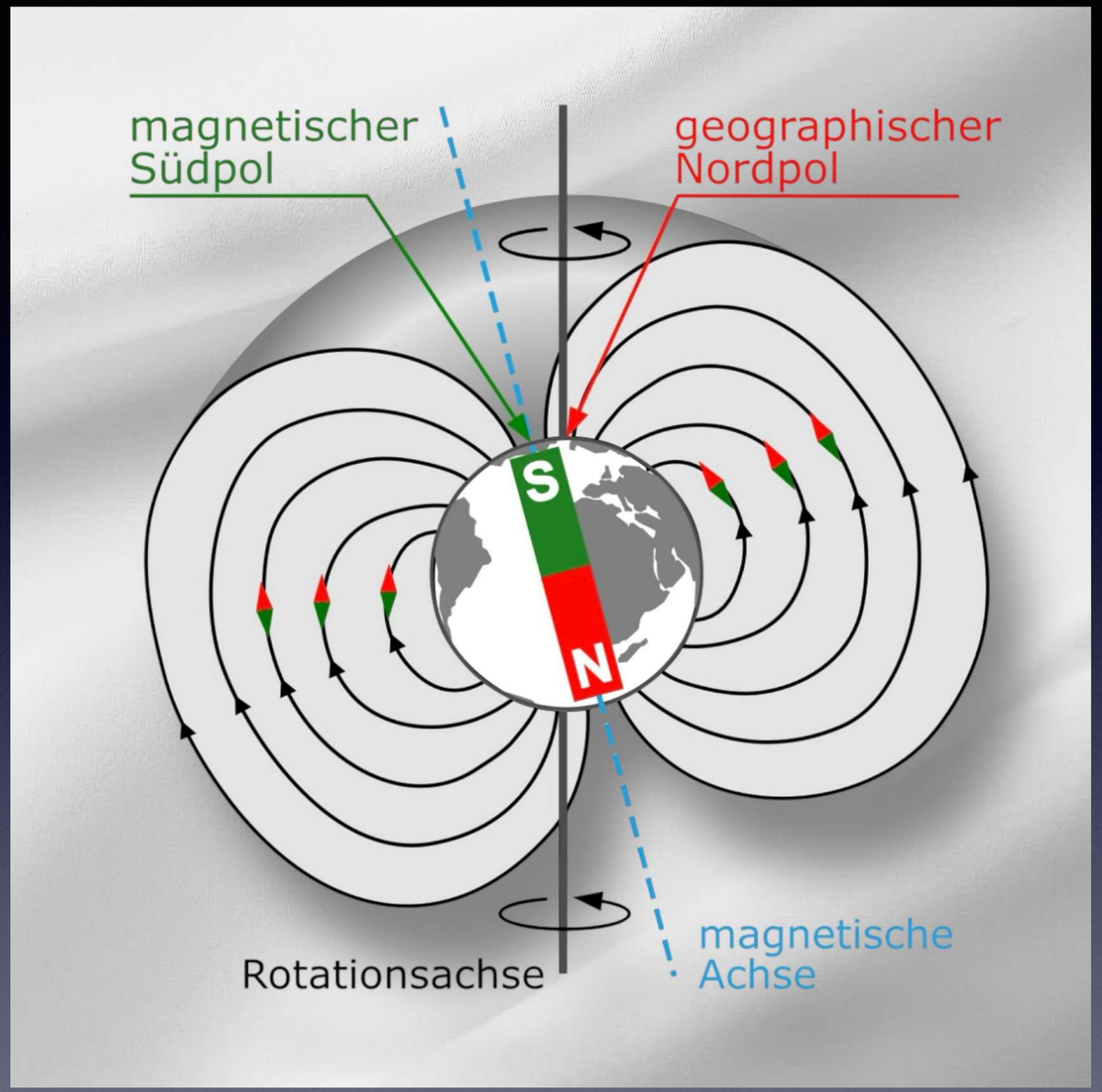
Das Muster des magnetischen Feldes um einen Stabmagneten ist dem Muster des magnetischen Feldes um eine Stromschleife und dem Muster des elektrischen Feldes um einen permanenten elektrischen Dipol sehr ähnlich. Auch entlang der Achse eines Magneten oder einer Stromschleife oder eines permanenten elektrischen Dipols variiert das magnetische oder elektrische Feld $\propto 1/\left|\vec{r}\right|^3$. Außerdem ist die Größe des Feldes seitlich von einem elektrischen Dipol oder einem Magneten halb so groß wie in der gleichen Entfernung entlang der Achse.



Ein Stabmagnet ist ein magnetischer Dipol. Das Feldmuster ist das eines Dipols, und die Größe des Feldes ist proportional zu $1/\left|\vec{r}\right|^3$.

Das Magnetfeld der Erde hat ein Muster, das wie das eines Stabmagneten aussieht (siehe nebenstehende Abbildung). In der nördlichen Hemisphäre fällt das Erdmagnetfeld nach unten zur Erde hin ab. Ein horizontal gehaltener Kompass wird nur von der horizontalen Komponente des Magnetfelds beeinflusst, und diese horizontale Komponente wird kleiner, je näher man sich den magnetischen Polen nähert.

Hinweis: Die magnetischen Pole der Erde befinden sich nicht genau an den geografischen Polen. Die Abstände von den geografischen Polen betragen aktuell jeweils ca. $1300\,\mathrm{km}$.



Die Erde wirkt wie ein (Stab-) Magnet. Ihr magnetischer) Nord-Pol befindet sich in der Antarktis und ihr (magnetischer) Süd-Pol in der Arktis.

Es gibt einen entscheidenden Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen Dipolen. Die einzelnen positiven und negativen elektrischen Ladungen (Monopole), aus denen ein elektrischer Dipol besteht, können voneinander getrennt werden, und diese Punktladungen erzeugen nach außen oder nach innen gerichtete elektrische Felder, die $\propto 1/\left|\vec{r}\right|^2$ variieren. Man könnte erwarten, dass ein magnetischer Dipol aus positiven und negativen magnetischen Monopolen besteht, aber niemand hat bislang jemals einen einzelnen magnetischen Monopol gefunden. Ein solcher magnetischer Monopol würde vermutlich ein nach außen oder nach innen gerichtetes Magnetfeld erzeugen, das wie das Feld einer elektrischen Punktladung variieren würde, aber ein solches Muster eines Magnetfeldes wurde noch nie beobachtet.

Die atomare Struktur von Magneten

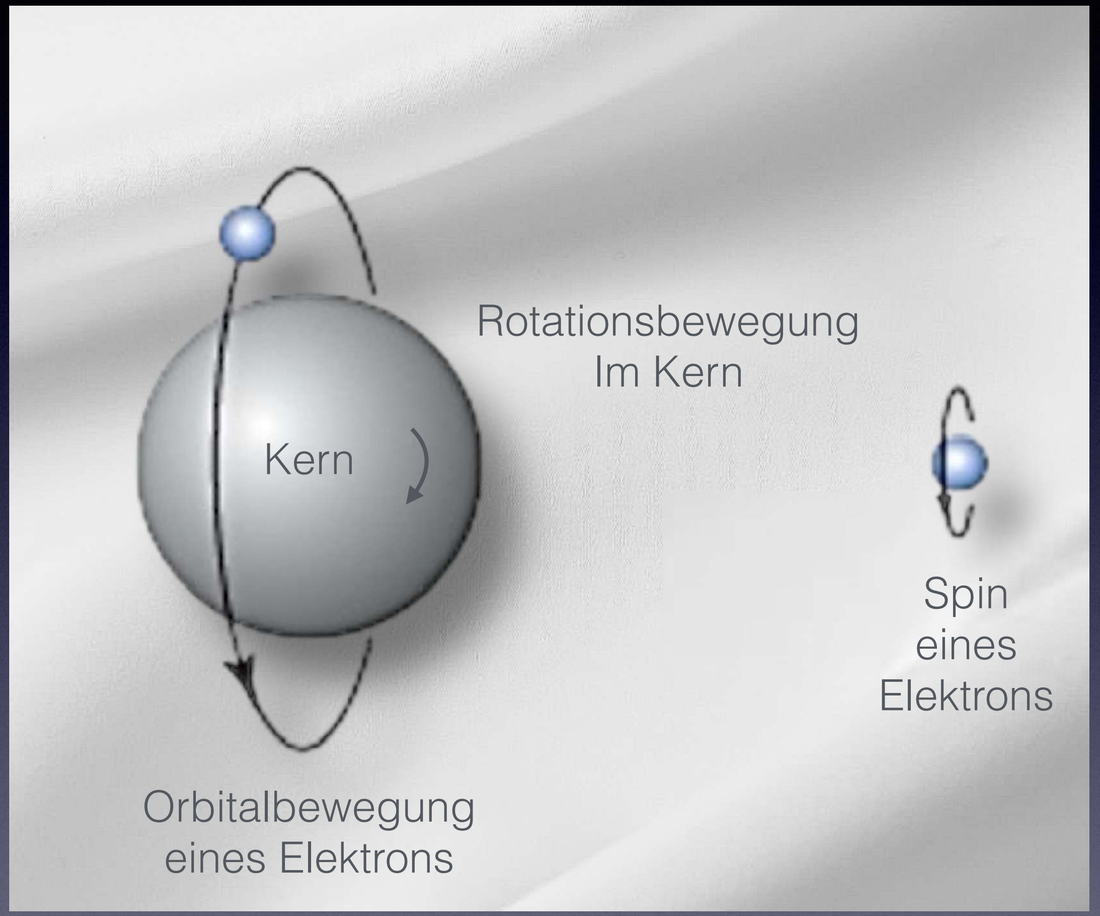
Wir haben gesehen, dass das Magnetfeld eines stromführenden Rings dem Magnetfeld eines (Stab-) Magneten „verdächtig“ ähnlich sieht. Das generelle Muster der beiden Magnetfelder sieht gleich aus, und es ist sogar so, dass sowohl bei Magneten als auch bei Stromschleifen die Größe des Feldes bei großen Abständen entlang der Achse $\propto 1/\left|\vec{r}\right|^3$ abfällt. Sowohl Magnete als auch Stromschleifen können durch ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$ beschrieben werden.

In jedem Atom gibt es bewegliche geladene Teilchen. In magnetischen Materialien können diese subatomaren „Ströme“ winzige magnetische Dipolmomente erzeugen, die sich zu einem magnetischen Dipolmoment ungleich Null für jedes Atom addieren.

Es gibt drei Möglichkeiten für die Quelle der subatomaren Ströme, die einem einzelnen Atom ein magnetisches Dipolmoment ungleich Null verleihen könnten:

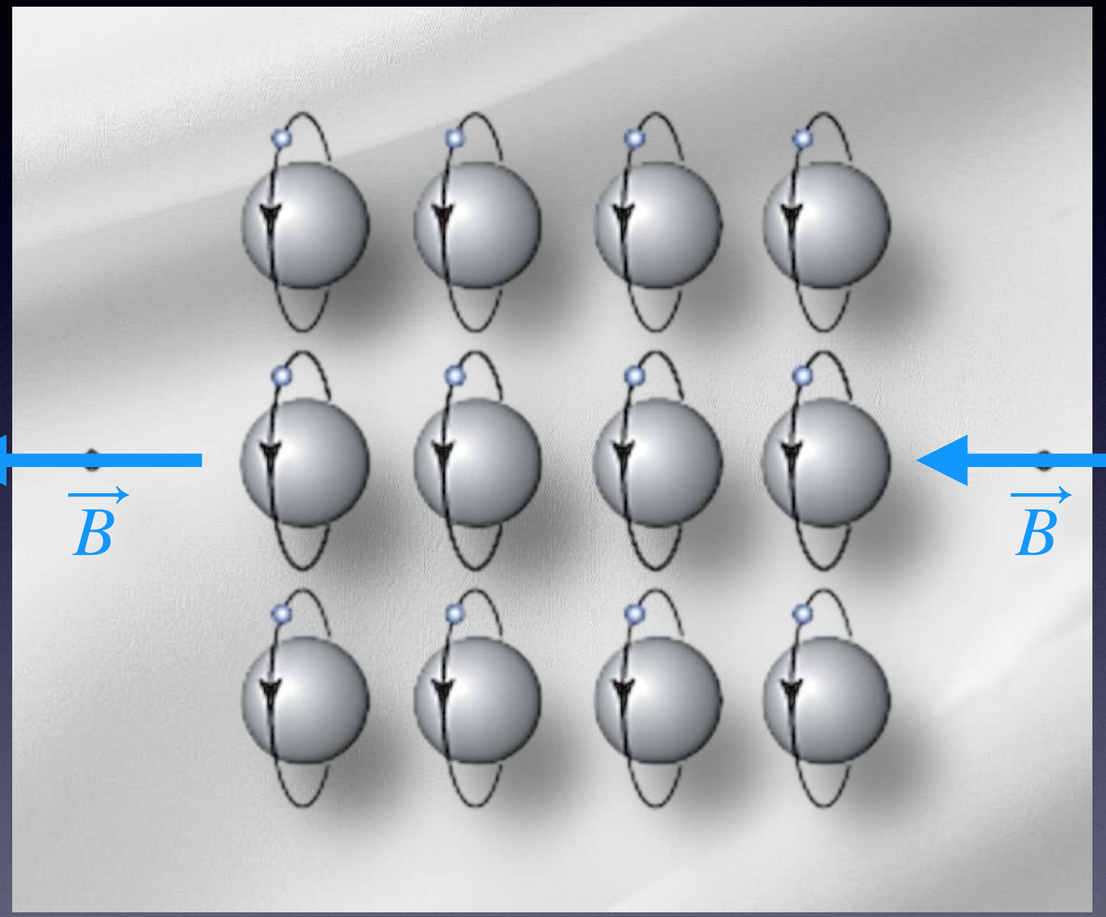
1. Ein Elektron auf einer Umlaufbahn um den Atomkern;
2. Ein Elektron, das sich um seine eigene Achse dreht;
3. Rotationsbewegung im Kern (Protonen und Neutronen haben einen Spin um ihre eigene Achse und können auch innerhalb des Kerns kreisen).

In all diesen Situationen hat das Objekt einen Drehimpuls $\vec{L}$ und es gilt $\vec{\mu} \propto \vec{L}$.



Elektronen haben sowohl einen Spin als auch eine Orbitalbewegung, die zum magnetischen Dipolmoment beitragen können.

Es ist am einfachsten, den Proportionalitätsfaktor zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\mu}$ abzuschätzen, indem man das magnetische Dipolmoment eines umlaufenden Elektrons betrachtet und das einfache Bohrsche Modell eines Atoms verwendet, um zumindest die richtige Größenordnung zu erhalten. Wie nebenstehend dargestellt, nehmen wir an, dass jedes Atom ein ungepaartes Elektron hat, das den Kern auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit umkreist. Jedes umlaufende Elektron kann als eine winzige Stromschleife betrachtet werden, die ein Dipolmagnetfeld erzeugt.



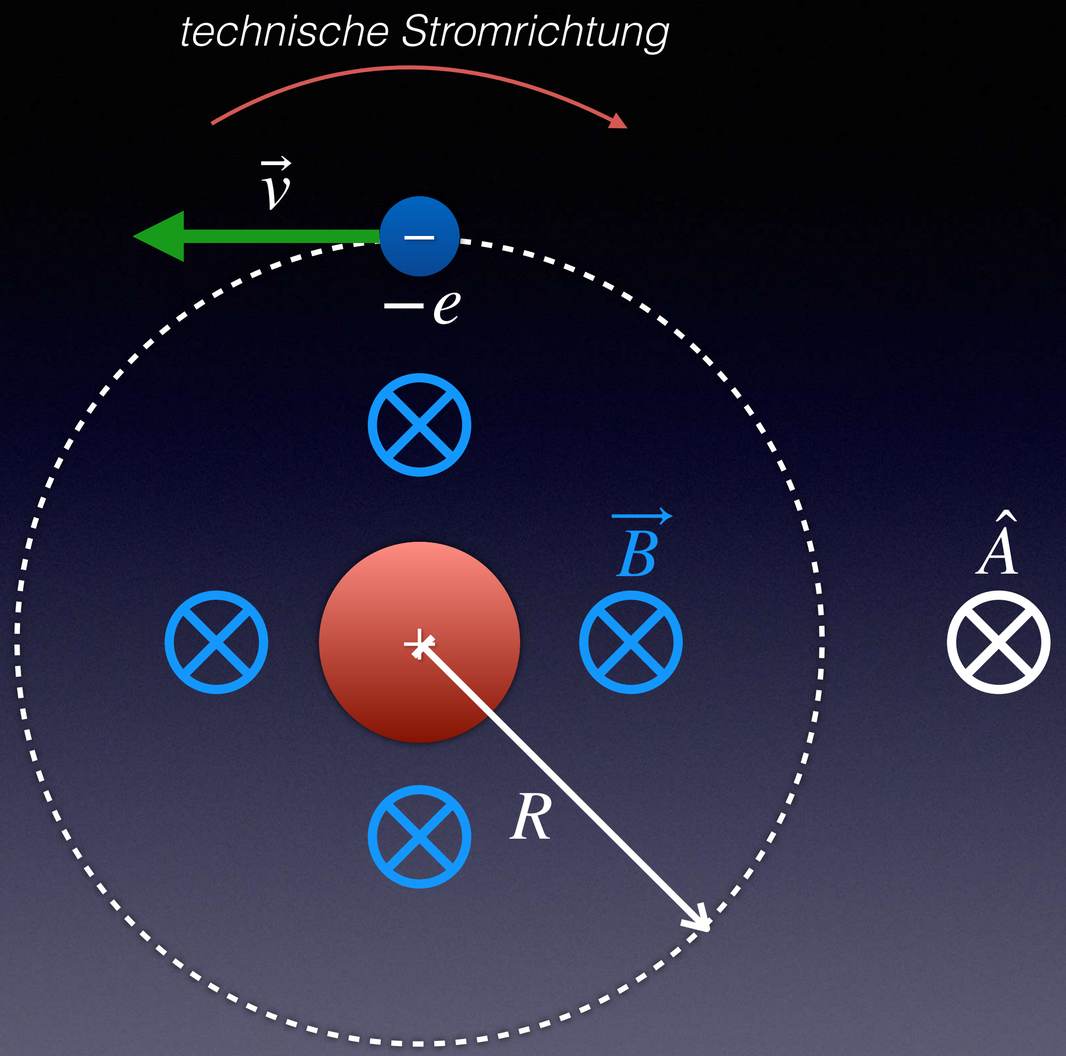
Ein einfaches Modell für einen Magneten könnte Elektronen in kreisförmigen Atomumlaufbahnen beinhalten. Man beachte, dass die technische Stromrichtung der Bewegung der Elektronen entgegengesetzt ist.

Für die Stromstärke $\vec{I}$ eines umlaufenden Elektrons erhalten wir:

$$\vec{I} = \frac{-e\vec{v}}{2\pi R} .$$

Magnetisches Dipolmoment:

$$\vec{\mu} = \left|\vec{I}\right| A\hat{A} = \frac{1}{2} e \left|\vec{v}\right| R\hat{A} .$$



Der Betrag des (Bahn-) Drehimpulses eines Elektrons auf einer Kreisbahn ist gegeben durch

$$\left|\vec{L}\right| = Rm_e \left|\vec{v}\right| .$$

Für den Zusammenhang zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\mu}$ erhalten wir:

$$\left(\frac{m_e}{m_e}\right)\frac{1}{2}Re\left|\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{e}{m_e}Rm_e\left|\vec{v}\right| \rightarrow \left|\vec{\mu}\right| = \frac{1}{2}\frac{e}{m_e}\left|\vec{L}\right| .$$

Unsere Schätzung des Proportionalitätsfaktors f zwischen magnetischem Dipolmoment $\vec{\mu}$ und (Bahn-) Drehimpuls $\vec{L}$ für ein Teilchen in einem Atom lautet

$$f = \frac{1}{2}\frac{e}{m} .$$

Wir gehen davon aus, dass f für umlaufende Elektronen, Elektronen sowie Nukleonen (Protonen und Neutronen), die sich jeweils um ihre Achse drehen, gültig ist. Wie groß ist dieser Faktor?

$$f_{\text{elektron}} \approx 8.9 \times 10^{10}\,\text{C/kg} \; , f_{\text{nukleon}} \approx 4.7 \times 10^{7}\,\text{C/kg} .$$

Vielleicht erinnerst du dich an ein Ergebnis aus Kapitel 11 (Teil *Moderne Mechanik*), dass sowohl der Bahn-Drehimpuls als auch der Eigen-Drehimpuls in Atomen quantisiert sind: es werden nur bestimmte diskrete Werte beobachtet. Für ein Elektron, das einen Kern umkreist, muss der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches der Planckschen Konstante h geteilt durch 2π, geschrieben als $\hbar$, sein:

$$\left|\vec{L}\right| = N\hbar \text{ , mit } N = 0,1,2,3,\ldots \text{ und } \hbar \approx 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}\ .$$

Geht man von einem (Quant) Drehimpuls $\overrightarrow{L} = \hbar$ aus, so ergibt sich daraus

$$\left|\overrightarrow{\mu}\right| \approx \frac{1}{2}\frac{e}{m}\hbar \,.$$

Und dies entspricht

$$\left|\overrightarrow{\mu}\right| \approx 1 \times 10^{-23}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2 \text{ pro Atom} \,.$$

In einem früheren Beispiel haben wir festgestellt, dass ein bestimmter (Eisen-) Magnet, dessen Masse $69.5\ \mathrm{g}$ betrug, über ein magnetisches Dipolmoment von $3.5\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ verfügte. Nehmen wir an, dass fast alle Atome in diesem Magneten Eisenatome sind, dessen Mol-Masse $56\ \mathrm{g}$ beträgt, so erhalten wir

$$N = \frac{69.5}{56} \times 6.02 \times 10^{23}\ \text{Atome} = 7.5 \times 10^{23}\ \text{Atome}\ ,\ \text{und}$$

$$\left|\vec{\mu}\right| \approx 7.5\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2\ .$$

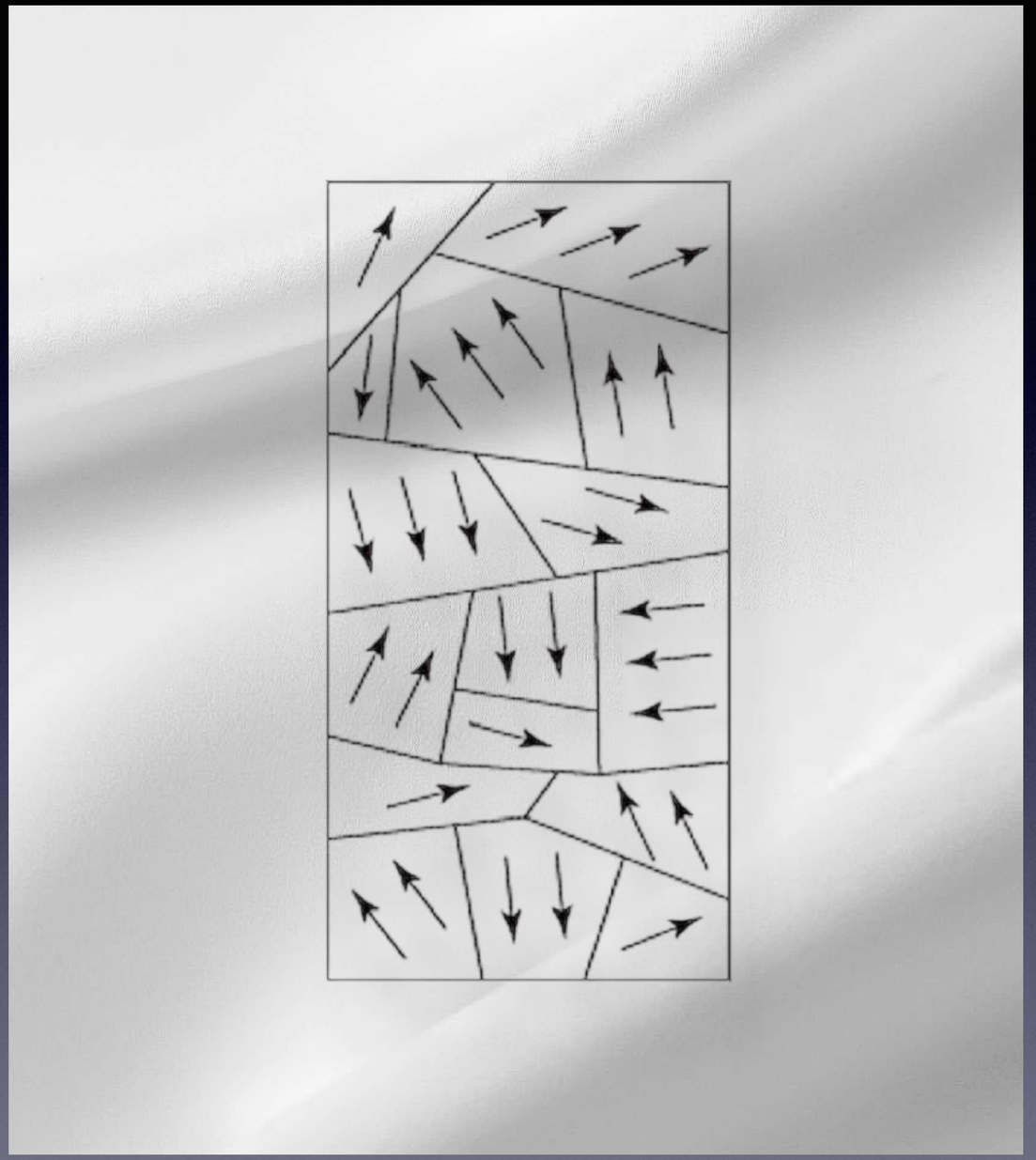
Das ist eine gute Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert. Die Werte unterscheiden sich nur um einen Faktor von etwa zwei. Die Tatsache, dass Vorhersage und Messung so nahe beieinander liegen, zeigt, dass die Grundannahmen unseres sehr einfachen Modells vernünftig sind.

In unserem Modell haben wir eine Reihe von vereinfachenden Annahmen getroffen. Du weißt wahrscheinlich, dass die Elektronen den Kern nicht auf wohldefinierten Kreisbahnen umkreisen. In diesen Modellen gibt es nur eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Elektron an einem bestimmten Ort befindet. Außerdem haben viele Elektronen in Atomen sphärisch symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen (s-Orbitale), und eine solche symmetrische Verteilung hat einen durchschnittlichen Drehimpuls von Null. Elektronen in nicht sphärisch symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (p-, d- oder f-Orbitale) haben jedoch einen von Null verschiedenen Drehimpuls und können ein von Null verschiedenes magnetisches Dipolmoment verursachen. Außerdem sind wir davon ausgegangen, dass in jedem Atom nur ein Elektron zu einem Magnetfeld beiträgt, aber in einigen Materialien können zwei oder mehr ungepaarte Elektronen dazu beitragen. Außerdem führen die empfindlichsten Experimente zu dem Ergebnis, dass ein Elektron eine echte Punktladung ist und einen Radius von Null hat! Nichtsdestotrotz ist es eine experimentelle Tatsache, dass ein Elektron ein Magnetfeld erzeugt, als wäre es eine sich drehende Ladungskugel.

Moderne Theorien über die Beschaffenheit von Magneten berücksichtigen nicht nur den Beitrag der einzelnen Atome, sondern auch die Auswirkungen ihrer Wechselwirkungen untereinander. Diese komplexeren theoretischen Behandlungen legen nahe, dass die magnetischen Dipolmomente aufgrund des Eigen-Drehimpuls der sich drehenden Elektronen den größten Teil des Magnetfelds eines Magneten ausmachen, obwohl der Bahn-Drehimpuls der Elektronen auch einen gewissen Beitrag leistet.

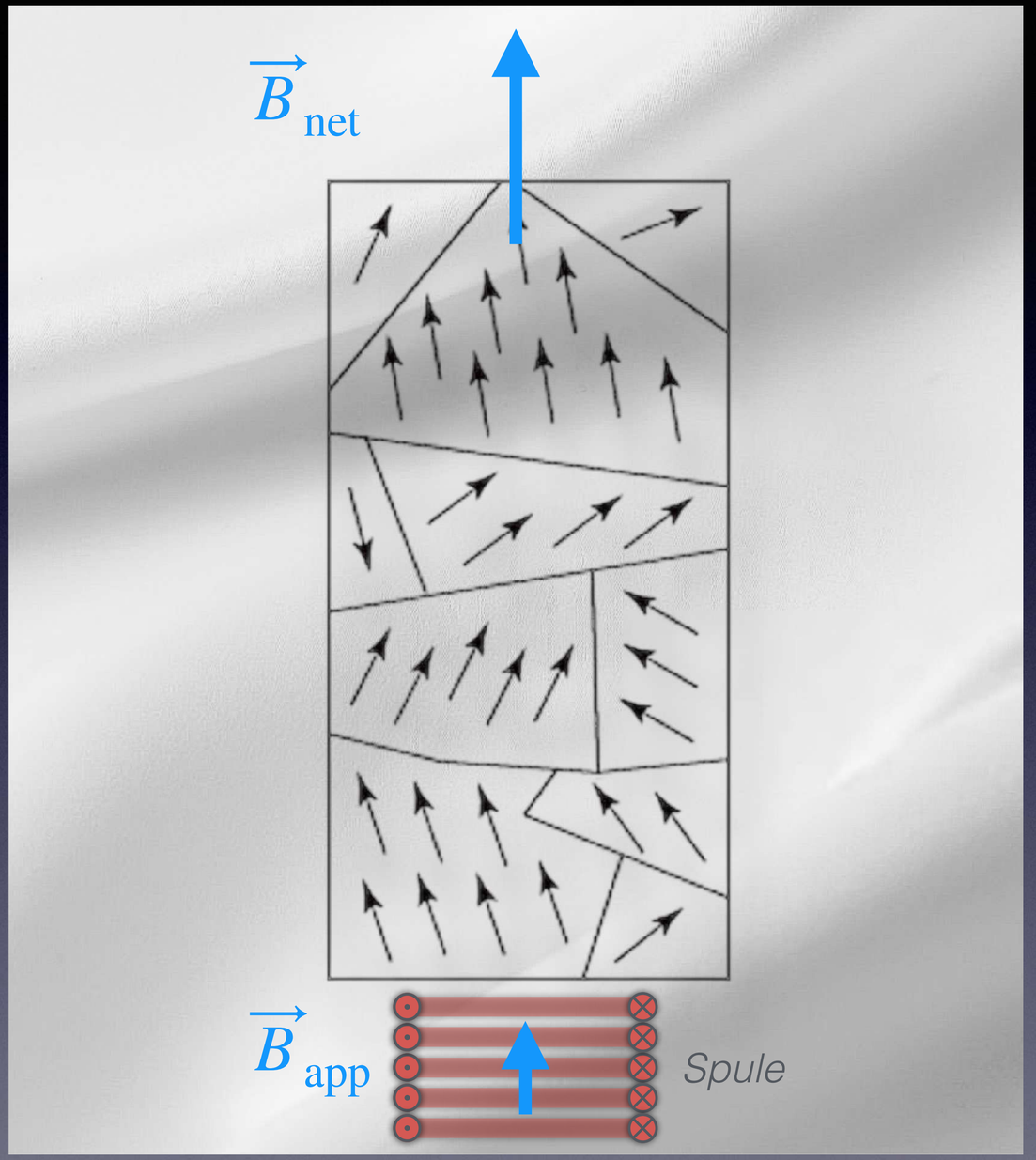
Wie wir zuvor gesehen haben, ist der Faktor e/m für ein Proton so viel kleiner als für ein Elektron, dass wir die nuklearen Beiträge zum Magnetfeld eines Stabmagneten ignorieren können. Kernmagnetische Dipolmomente spielen jedoch eine wichtige Rolle beim Phänomen der kernmagnetischen Resonanz (NMR) und bei der in der Medizin verwendeten Technologie der Magnetresonanztomographie (MRT), die auf der NMR basiert.

In einem gewöhnlichen Stück Eisen, das kein Magnet ist, besteht das Eisen aus einem Flickenteppich von kleinen Bereichen, den so genannten „magnetischen Domänen“, in denen die Ausrichtung aller atomaren magnetischen Dipolmomente nahezu perfekt ist. Normalerweise sind diese Domänen jedoch in zufälligen Richtungen ausgerichtet, so dass das Eisen unter dem Strich kein nennenswertes Nettomagnetfeld erzeugt. Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Bild der Situation, in dem die Vektoren die magnetischen Dipolmomente der Atome anzeigen.



Ungeordnete magnetische Domänen - $\vec{B} \simeq \vec{0}$.

Wenn man eine Spule verwendet, um ein Magnetfeld $\vec{B}_{app}$ an das Eisen anzulegen, wachsen die Bereiche, die ungefähr mit dem angelegten Feld ausgerichtet sind, auf Kosten der Bereiche, die eine andere Ausrichtung haben. Außerdem neigen die magnetischen Dipolmomente der Atome in einer Domäne bei einem ausreichend großen angelegten Magnetfeld dazu, sich in Richtung des angelegten Feldes zu drehen, so wie sich eine Kompassnadel dreht, um sich mit einem angelegten Feld auszurichten. Das Ergebnis dieser beiden Effekte ist eine teilweise Ausrichtung der magnetischen Dipolmomente der meisten Atome, was ein Magnetfeld $\vec{B}_{net}$ erzeugt, das viel größer als $\vec{B}_{app}$ sein kann.



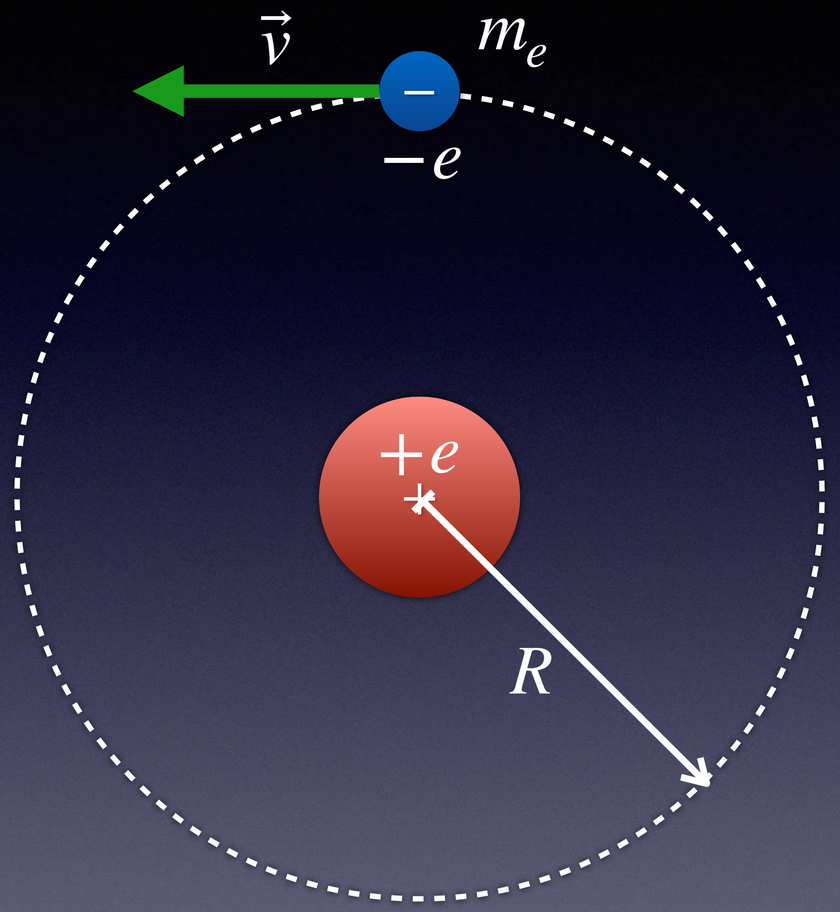
Geordnete magnetische Domänen - $\vec{B}_{net} > \vec{B}_{app}$.

Bei sehr reinem Eisen kehrt das Stück Eisen, wenn man den Strom in der Spule abschaltet, fast zu seinem ursprünglichen ungeordneten Flickenteppich aus Domänen zurück und wirkt nicht mehr wie ein Magnet. Bei einigen anderen ferromagnetischen Materialien, einschließlich einiger Eisenlegierungen, bleiben die Domänen jedoch nahezu ausgerichtet, wenn man das angelegte Feld entfernt. In diesem Fall erhält man einen Dauermagneten, der in der Regel aus einer Alnico-Legierung besteht (Alnico enthält 51 % Eisen, 8 % Aluminium, 14 % Nickel, 24 % Kobalt und 3 % Kupfer). Ein harter Schlag auf einen Magneten kann die Domänen durcheinander bringen, so dass das Metall nicht mehr wie ein Magnet wirkt. Auch das Erhitzen über eine kritische Temperatur hinaus zerstört die Ausrichtungen.

Es ist möglich, die zuvor beschriebene Verstärkung zu beobachten. Ein kleines Magnetfeld, das durch stromdurchflossene Drahtschleifen, die um ein Stück Eisen gewickelt sind, erzeugt wird, kann aufgrund der Ausrichtung der magnetischen Dipolmomente im Eisen zu einem großen Magnetfeld führen, das durch das Eisen erzeugt wird. Dank dieses verstärkenden Effekts wird aus einem Eisenkern in einer stromdurchflossenen Spule ein starker „Elektromagnet“, der z.B. andere Gegenstände aus Eisen anziehen kann.

Abschätzung des Bahn-Drehimpulses eines Elektrons in einem Atom

Wir können den Bahndrehimpuls $\vec{L}$ eines Elektrons in einem Atom abschätzen, indem wir das einfache Bohrsche Atommodell verwenden, in dem ein Elektron einen Kern mit konstanter Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn umkreist, und das Impulsprinzip anwenden. In diesem Modell (siehe nebenstehende Abbildung) wird ein Außenelektron (Ladung $-e$, Masse m_e) durch die elektrische Anziehung zum Rest des Atoms, der eine Nettoladung von $+e$ hat, auf einer Kreisbahn mit einem Radius R gehalten.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ \text{, mit } \vec{r} \perp \vec{p} \text{ folgt } \left|\vec{L}\right| \approx R m_e \left|\vec{v}\right|$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{net}} = \frac{\left|\vec{p}\right|}{\mathrm{d}t}\hat{p} + \left|\vec{p}\right|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t} = \left|\vec{p}\right|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left|\vec{p}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t}\right| = m_e\left|\vec{v}\right|\frac{\left|\vec{v}\right|}{R}$$

$$m_e\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} \rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e R}}$$

Mit $R \approx 1 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $m_e \approx 9 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ und $m_e \approx 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ erhalten wir

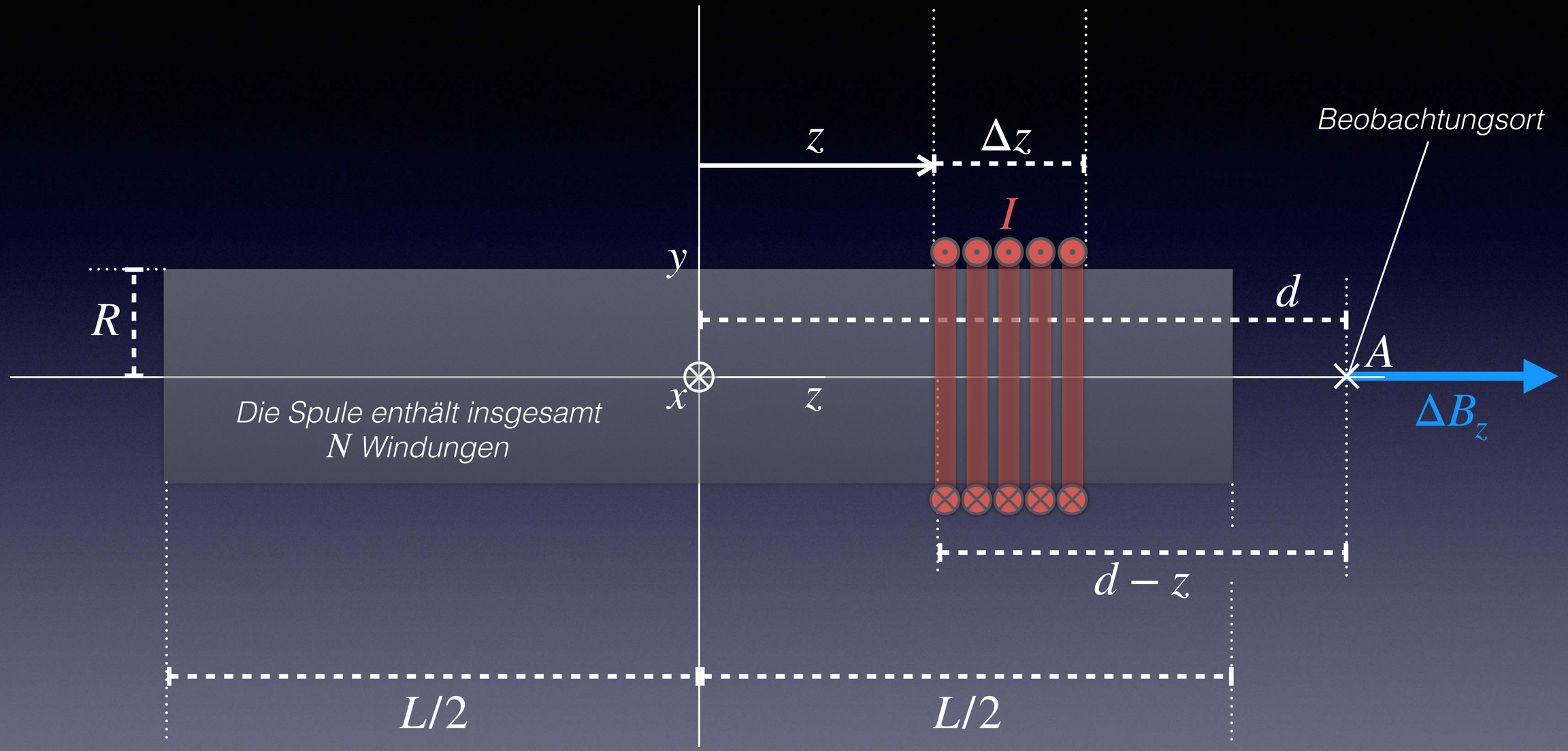
$$\left|\vec{v}\right| \approx 1.6 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}\ .$$

Und für die Größe des Bahn-Drehimpuls

$$\left|\overrightarrow{L}\right| \approx 1.4 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}\ .$$

Man vergleiche mit $\hbar \approx 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

Magnetfeld (Solenoid) einer Zylinderspule



Definition der Integrationsvariablen z für die Summation der Beiträge der vielen stromdurchflossener Schleifen

Es gibt N/L Windungen pro Meter, also ist die Anzahl der Windungen in dem Abschnitt Δz mit $(N/L)\,\Delta z$ anzusetzen. Wir kennen von früher schon das Magnetfeld, das von jeder Windung entlang ihrer Achse erzeugt wird. Für die entlang Δz vorhandenen Windungen folgt

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left((d-z)^2 + R^2 \right)^{3/2}} \frac{N}{L} \Delta z \,.$$

Wir können nun wieder Δz infinitesimal klein werden lassen, so dass wir über die gesamte Länge L der Spule integrieren können.

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I N}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{\left((d-z)^2 + R^2 \right)^{3/2}} \, \mathrm{d}z$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I N}{L} \left(\frac{d + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(d + \frac{L}{2} \right)^2 + R^2}} - \frac{d - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(d - \frac{L}{2} \right)^2 + R^2}} \right)$$

In diesem Ausdruck ist d der Abstand vom Mittelpunkt der Spule.

Für $d = 0$ (Zentrum der Spule) und $L \gg R$ können wir den Wert des Ausdrucks innerhalb der großen Klammer durch 2 ersetzen und erhalten damit

$$B_z \approx \vec{\mu_0} \frac{IN}{L} \, .$$

Antworten
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: Die Elektronen fließen von Nord nach Süd. Der Kompass befindet sich oberhalb des Drahts. Die Rechte-Hand-Regel sagt uns, dass das Mag etwelches des Drahts oberhalb von West nach Ost gerichtet ist. (1) Es gilt:

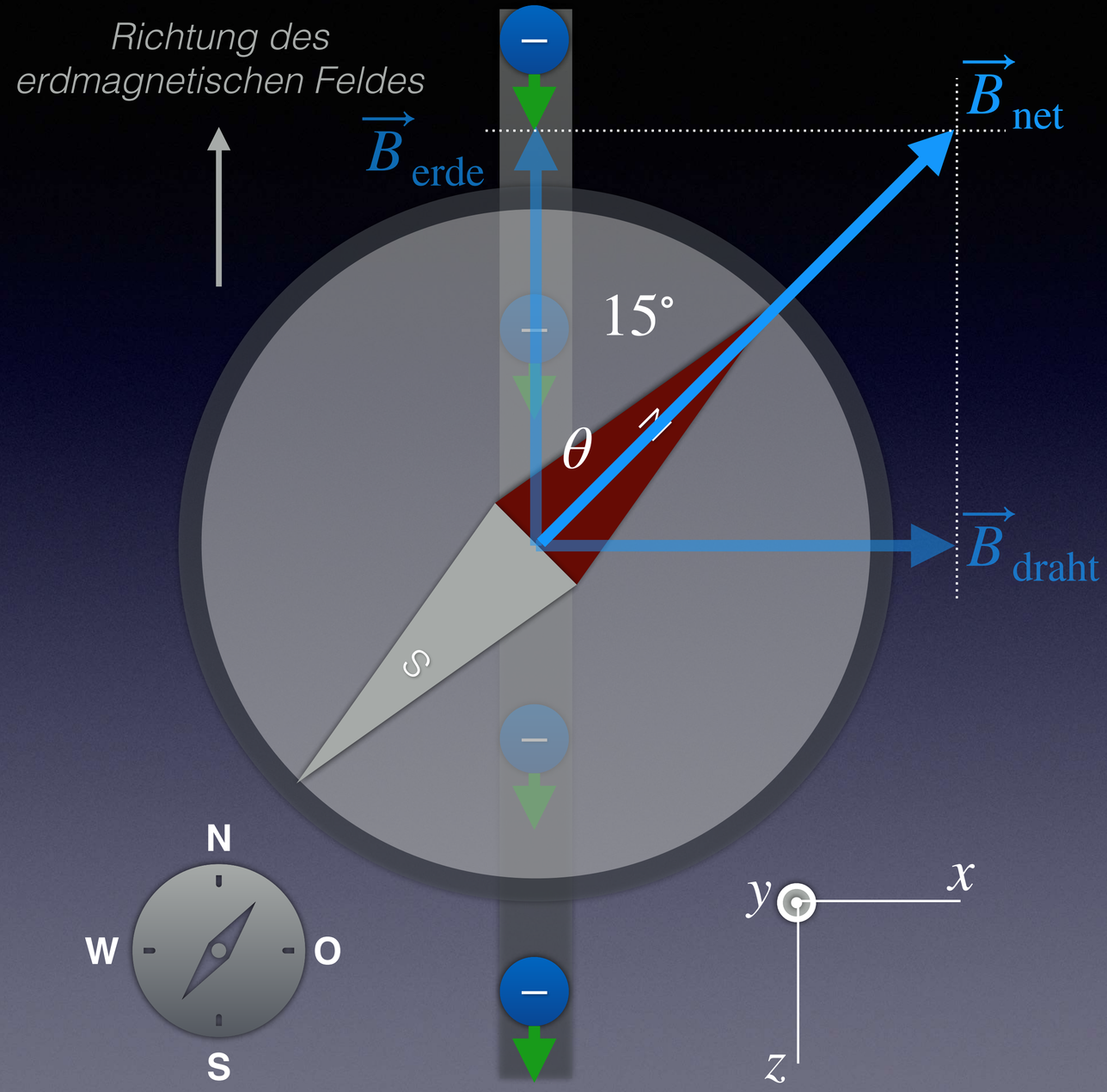
$$\vec{B}_{\text{net}} = \vec{B}_{\text{erde}} + \vec{B}_{\text{draht}} ,$$

$$\vec{B}_{\text{erde}} \perp \vec{B}_{\text{draht}} ,$$

$$\tan\theta = \left|\vec{B}_{\text{erde}}\right| / \left|\vec{B}_{\text{draht}}\right| , \text{ also}$$

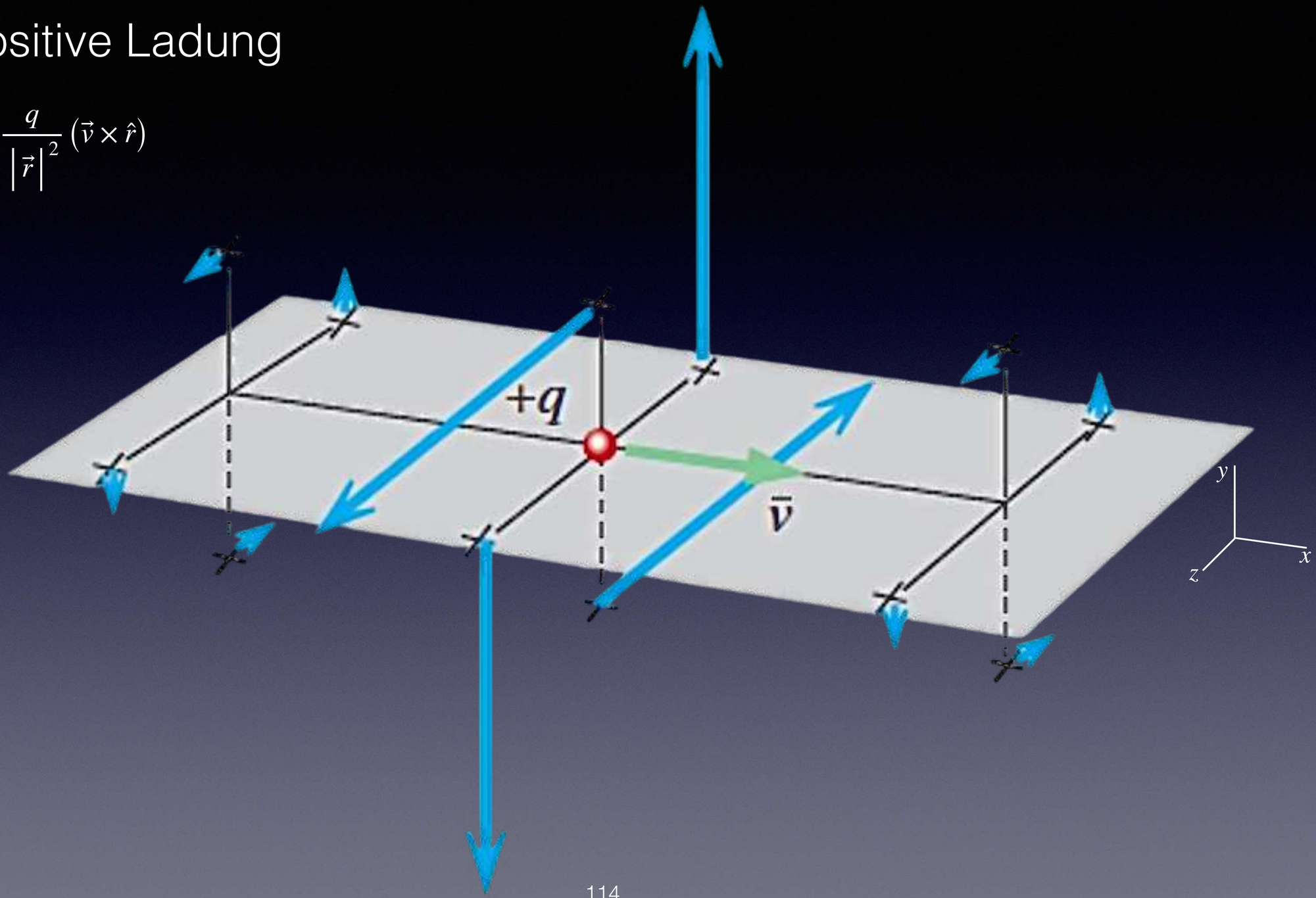
$$\left|\vec{B}_{\text{draht}}\right| = \left|\vec{B}_{\text{erde}}\right| / \tan\theta .$$

Ergebnis: $\left|\vec{B}_{\text{draht}}\right| \approx 0.54\,\text{T}$.



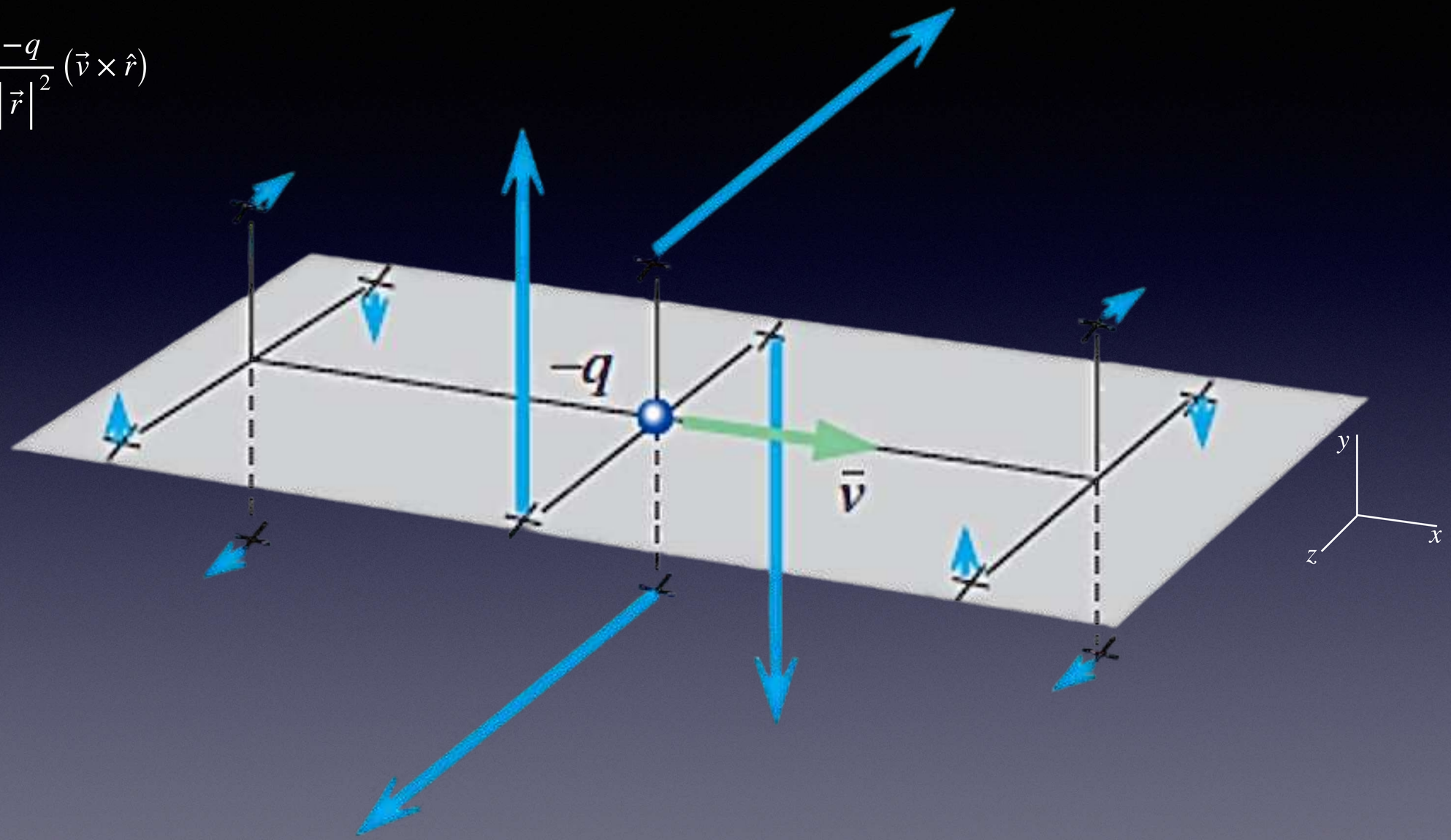
K2.1: (1) Positive Ladung

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right)$$

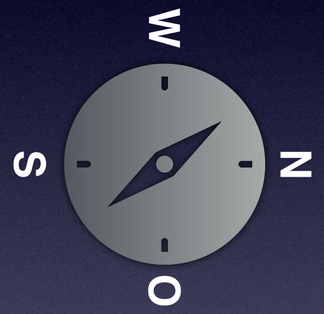


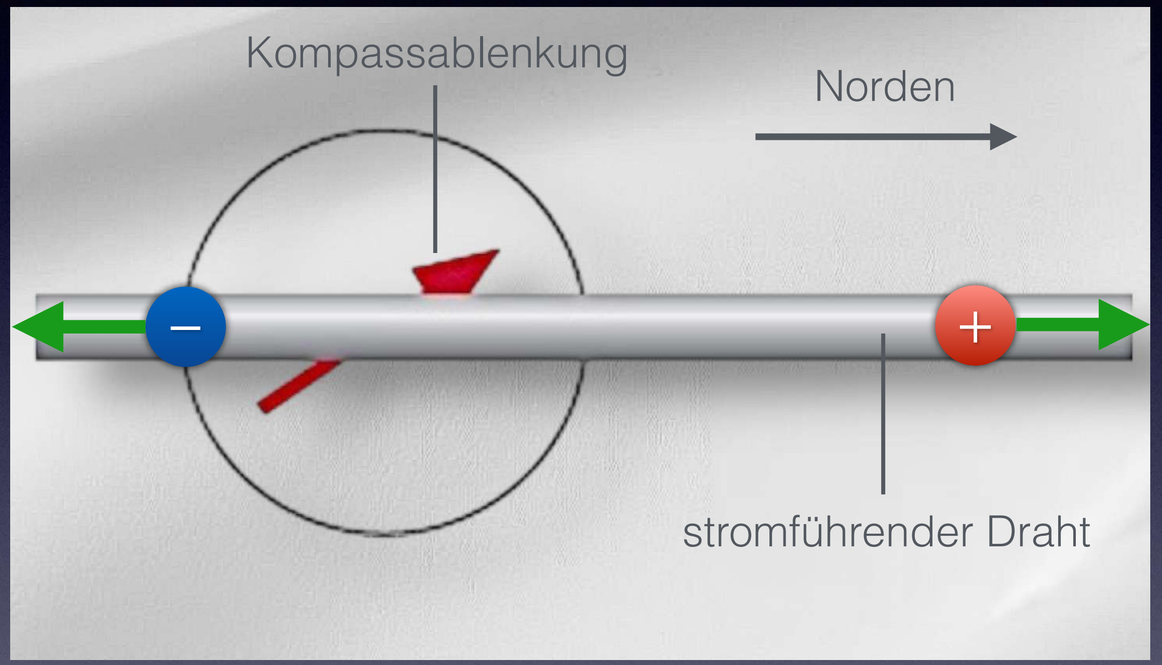
K2.1: (2) Negative Ladung

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-q}{\left|\vec{r}\right|^2} \left(\vec{v} \times \hat{r}\right)$$



K3.1: (1) Elektronenstrom von Nord nach Süd, oder (2) Strom positiver Ladungsträger von Süd nach Nord.



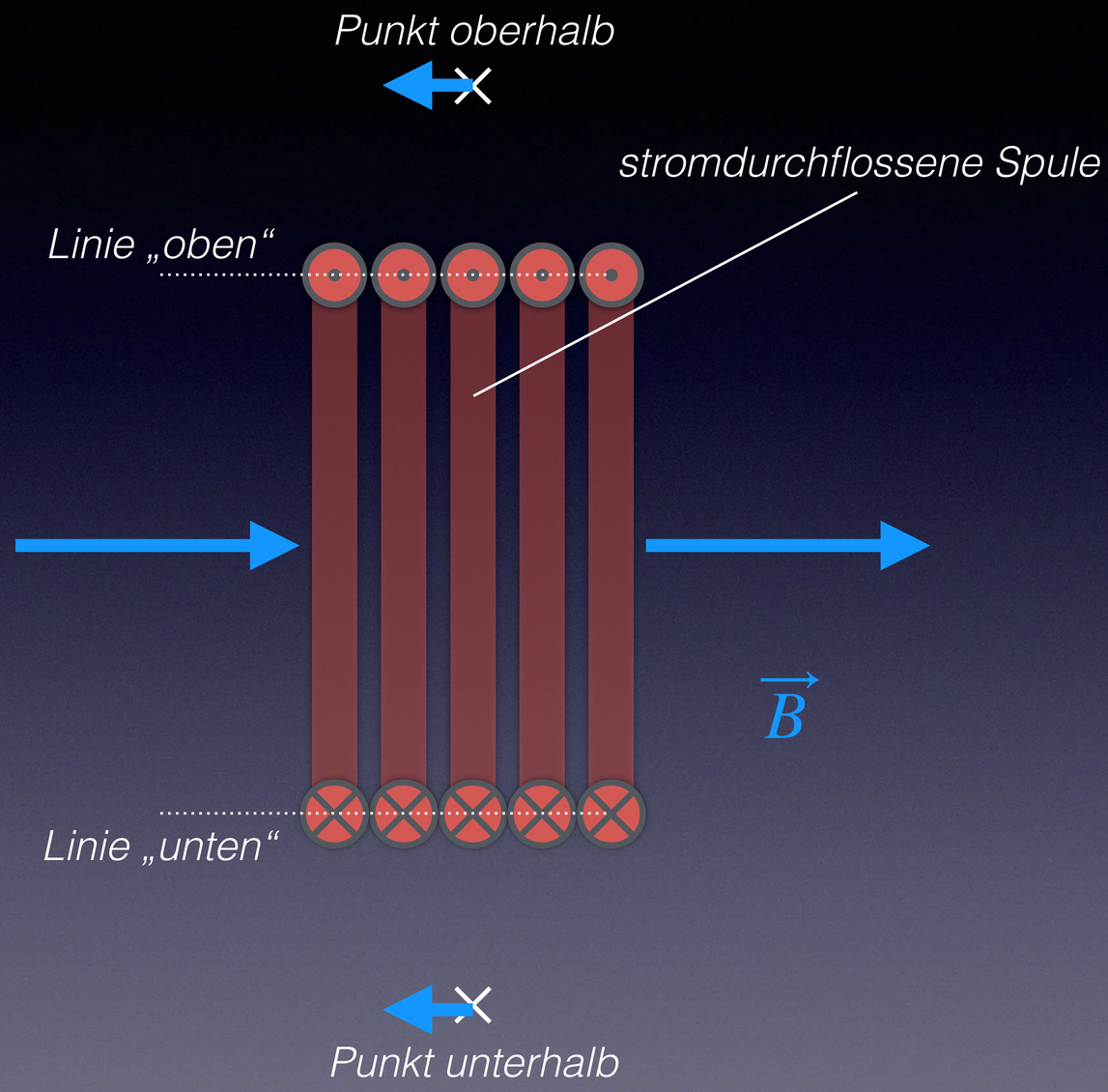




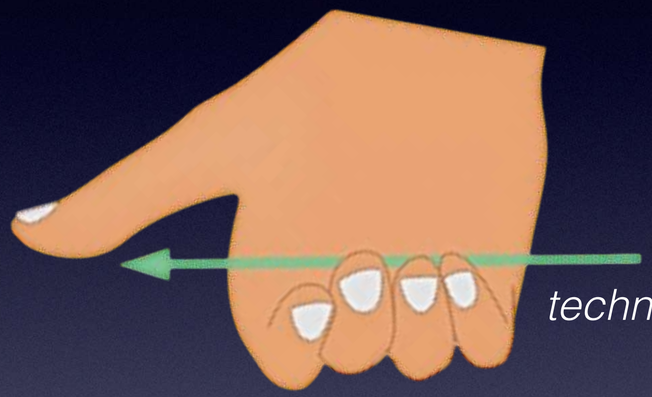
K4.1: (1) $\left|\vec{v}\right| = i/(nA) = 4i/(n\pi d^2) \approx 5.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s}$. (2)
$\Delta t \approx 5770\,\mathrm{s} \approx 96\,\mathrm{min}.$

K5.1: (1) $I = nd^2beE_{\mathrm{app}}/4 \approx 2.38\ \mathrm{A}.$

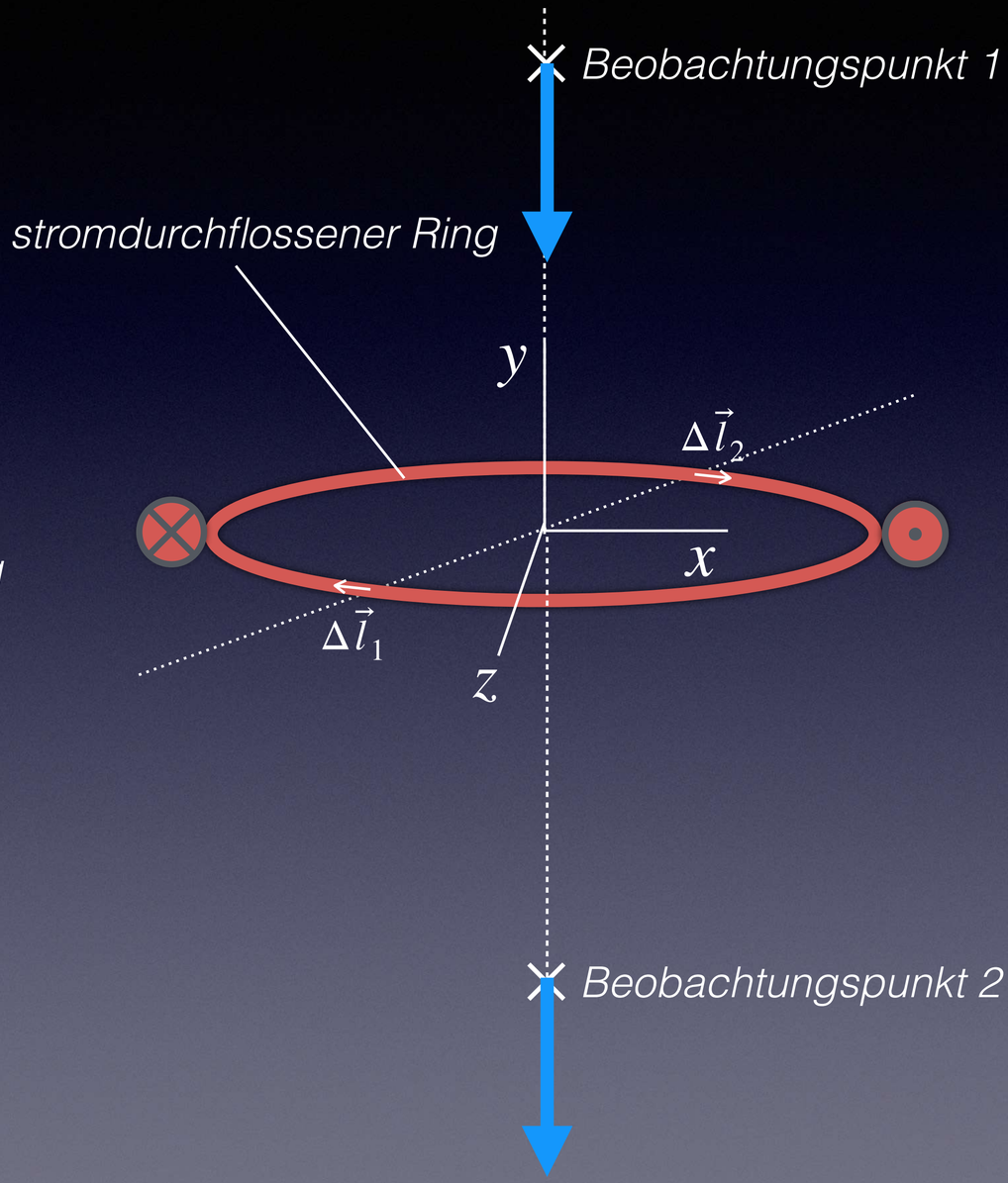
K6.1: Oben (Linie „oben“) fließt der Strom auf uns zu. Daher ist das magnetische Feld oberhalb der Spulen von rechts nach links gerichtet und unterhalb von links nach rechts. Unten (Linie „unten“) fließt der Strom von uns weg. Daher ist das magnetische Feld unterhalb der Spule von rechts nach links gerichtet und oberhalb von links nach rechts. Das resultierende Feld oberhalb und unterhalb der Spule ist nicht $\vec{0}$, da die Richtung von der jeweils näher liegenden Linie dominiert wird.



K7.1:



technische Stromrichtung



K8.1: (1) $\left|\vec{\mu}\right| = \left|\vec{I}\right| A = 9\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$.

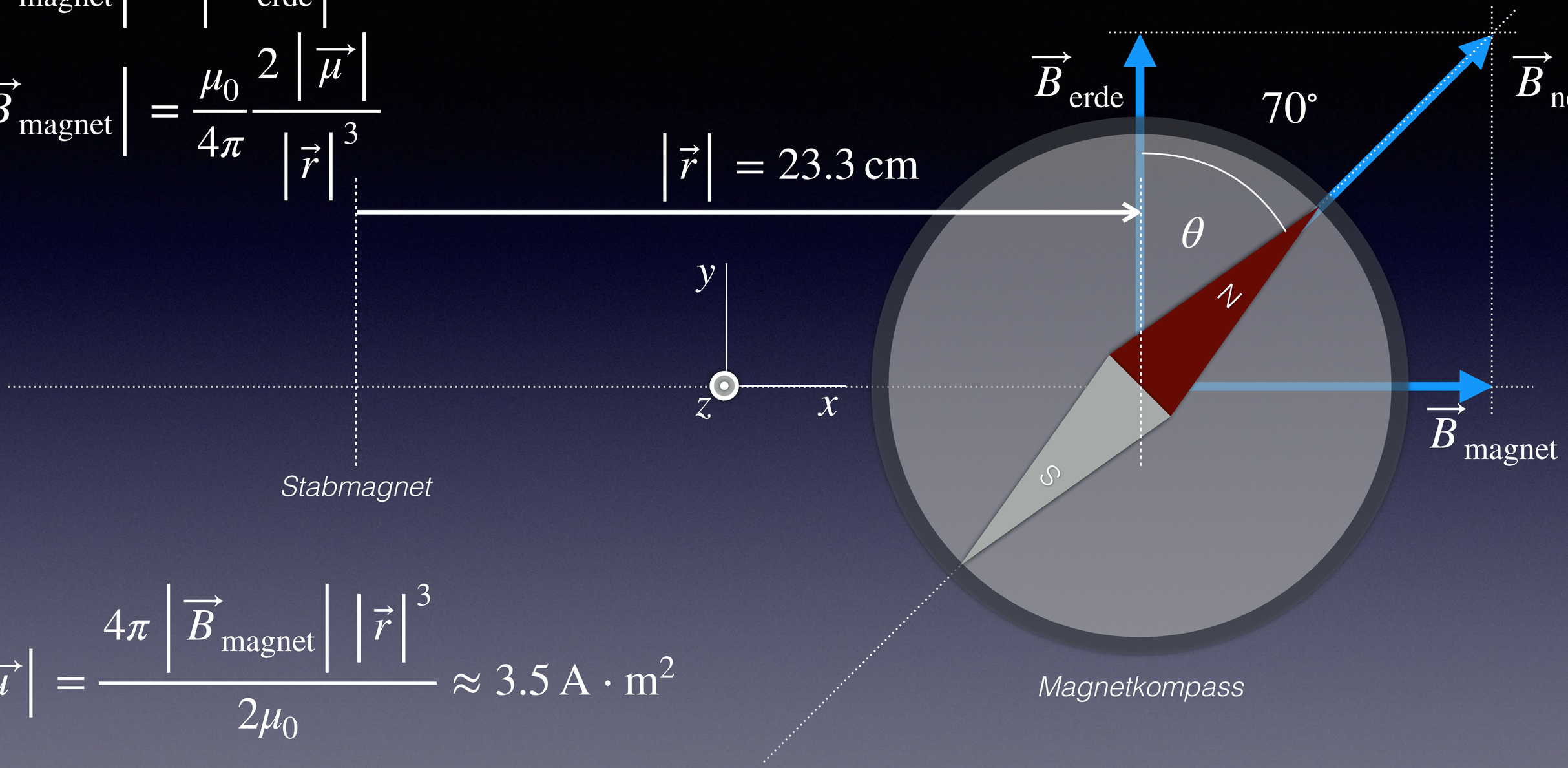
$$\left|\vec{B}_{\text{magnet}}\right| = \left|\vec{B}_{\text{erde}}\right| \tan\theta$$

$$\left|\vec{B}_{\text{magnet}}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\left|\vec{\mu}\right|}{\left|\vec{r}\right|^3}$$

$$\left|\vec{r}\right| = 23.3\,\text{cm}$$

$$\left|\vec{\mu}\right| = \frac{4\pi \left|\vec{B}_{\text{magnet}}\right| \left|\vec{r}\right|^3}{2\mu_0} \approx 3.5\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

K9.1



Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

Ende

Folien zusammengestellt von Günther Lang

Es folgt: Teil 6 - Elektrisches Feld und Stromkreise