

# Elektrische und magnetische Wechselwirkung

Teil 4  
Elektrisches Potenzial



# Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- das elektrische Feld, die elektrische potenzielle Energie und das elektrische Potenzial mathematisch in Beziehung setzen;
- die elektrische Potentialdifferenz innerhalb und außerhalb von Leitern und Isolatoren zu berechnen.

Bei der Analyse mechanischer Systeme, sowohl auf makroskopischer als auch auf mikroskopischer Ebene, haben wir festgestellt, dass es häufig wichtig ist, nicht nur Kräfte und (Dreh-) Momente, sondern auch Arbeit und Energie zu berücksichtigen, wenn wir versuchen, das Verhalten eines physikalischen Systems zu modellieren. In ähnlicher Weise benötigen wir zur Ergänzung unserer Verwendung des Konzepts des elektrischen Feldes und der elektrischen Kraft das Konzept des elektrischen Potentials. Das **elektrische Potential** ist definiert als elektrische **potenzielle Energie pro Ladungseinheit**.

Das **Konzept des elektrischen Potentials** ist aus einigen der gleichen Gründe nützlich wie das Konzept des elektrischen Feldes. Es ermöglicht uns, über Energie in einer Reihe von Situationen nachzudenken, ohne dass wir uns um die Details einer bestimmten Verteilung von Punktladungen kümmern müssen. Das elektrische Potential ist von praktischer Bedeutung, unter anderem, weil Batterien und elektrische Generatoren eine Potentialdifferenz aufrechterhalten, die nahezu unabhängig davon ist, was an sie angeschlossen ist. Das Konzept ist auch in der Theorie von großer Bedeutung, da es uns ermöglicht, Schlussfolgerungen zu einer Reihe von Fragen zu ziehen, z.B. zu den möglichen Mustern des elektrischen Feldes im Raum und zur Größe und Richtung des durchschnittlichen elektrischen Feldes in einem Isolator aufgrund der Polarisierung der Moleküle im Isolator.

# Übersicht

- Ein Review zur potenziellen Energie
- Aus geladenen Objekten bestehende Systeme
- Potenzialdifferenz in einem homogenen elektrischen Feld
- Zum Vorzeichen der Potenzialdifferenz
- Weitere Beispiele zur Potenzialdifferenz
- Pfadunabhängigkeit
- Das Potenzial an einer bestimmten Position
- Potenzialdifferenzen in einem Isolator
- Energiedichte und elektrisches Feld
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

# Ein Review zur potenziellen Energie

Dieser Abschnitt ist eine Wiederholung des Konzepts der potenziellen Energie, das erstmals in Kapitel 6 der Folien-Serie „Moderne Mechanik“ vorgestellt wurde.

Wenn du mit diesem Konzept sehr vertraut bist, kannst du diesen Abschnitt überspringen und direkt mit dem nachfolgenden Abschnitt „Systeme geladener Objekte“ fortfahren, in dem wir das Konzept auf miteinander wechselwirkende geladene Teilchen anwenden, ähnlich denen, die wir später in dieser Folien-Serie typischerweise betrachten werden.

Ein **einzelnes (Punkt-) Teilchen**, ob elektrisch geladen oder neutral, kann nur zwei Arten von Energie haben: die mit seiner Ruhemasse verbundene Energie, die so genannte „**Ruheenergie**“  $E_0$  (en: *rest energy*) und die mit seiner Bewegung verbundene Energie, die so genannte „**kinetische Energie**“  $E_{\text{kin}}$  (en: *kinetic energy*). Beide werden in einem einzigen kompakten Ausdruck zusammengefasst, der erstmals 1905 von Einstein formuliert wurde:

$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \gamma mc^2, \text{ mit}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\vec{v}|}{c}\right)^2}}.$$

Wenn der Betrag  $|\vec{v}|$  der Geschwindigkeit eines Teilchens klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c$ , können wir einen **Näherungsausdruck für die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$**  des Teilchens finden. In einem solchen Fall können wir die **Binomialentwicklung** verwenden:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots \right], \text{ und damit}$$

$$E \approx mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = E_0 + E_{\text{kin}} \rightarrow E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2}mv^2 \text{ (für } v \ll c\text{)}.$$

Dieser Ausdruck für  $E_{\text{kin}}$  entspricht dem von der „klassischen Physik“ her bekannten Wert.

Bei den meisten der in dieser Folien-Serie untersuchten Prozessen handelt es sich um Prozesse mit geringer Energie, bei denen keine nennenswerten Änderungen der Ruheenergie auftreten. Im Gegensatz dazu werden bei Prozessen wie der Kernspaltung und der Kernfusion, sehr große Mengen an Energie frei. Diese Prozesse sind Gegenstand einiger Anwendungen in Kapitel 6 der Folien-Serie „Moderne Mechanik“.

Wie wir auf der vorangehenden Folie gesehen haben, kann die kinetische Energie eines Teilchens, bei kleinen Geschwindigkeiten, wie folgt angenähert werden:

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 .$$

Die Energie ist eine skalare Größe und kein Vektor, d. h. sie hängt nur von der Geschwindigkeit des Teilchens ab, nicht aber von der Richtung seiner Bewegung.

Bei der Analyse von Energieveränderungen müssen wir ein **System** wählen, das aus einem oder mehreren Objekten besteht, die wir analysieren wollen. Bei der Wahl des Systems müssen wir entscheiden, welche Objekte wir in das System einbeziehen; alle Objekte, die nicht zum System gehören, sind Teil der Umgebung. Es steht uns frei, ein beliebiges System zu wählen, das wir für zweckmäßig oder interessant halten - die Gesetze der Physik gelten für jede Wahl des Systems. Die Wahl des Systems bestimmt jedoch die Energieformen, die wir berücksichtigen müssen.

Eine mögliche Wahl des Systems besteht darin, ein einzelnes Teilchen als System zu wählen und alle anderen Teilchen als Teil der Umgebung zu klassifizieren. In diesem Fall kann das System nur die beiden oben erwähnten Arten von Energie haben: Ruheenergie und kinetische Energie. Die potenzielle Energie ist mit den Wechselwirkungen zwischen den Teilchen in einem System verbunden. Ein einzelnes Teilchen hat keine potenzielle Energie.

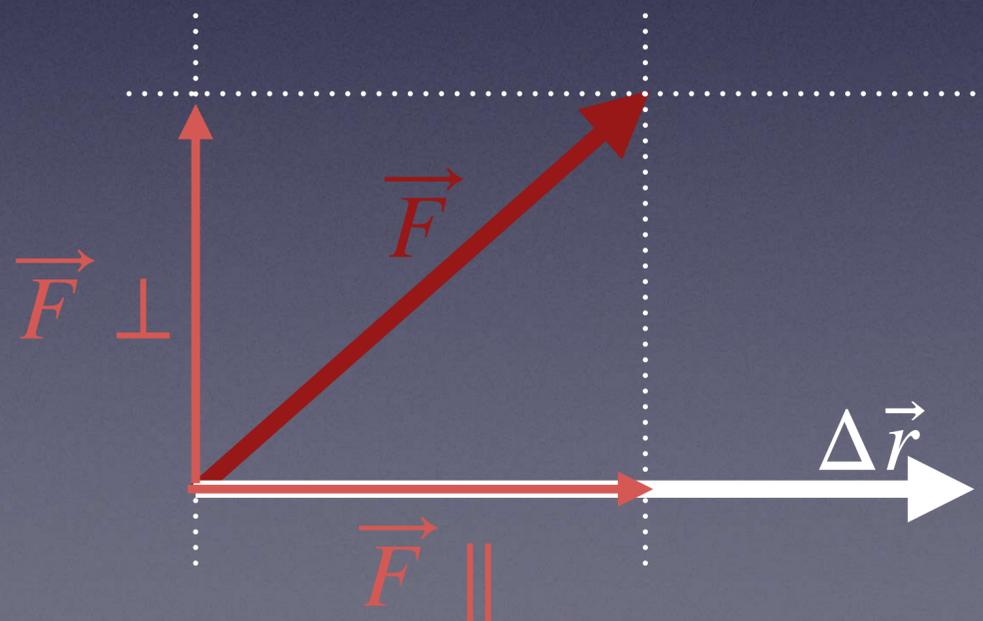
Die kinetische Energie eines einzelnen Teilchens kann sich ändern, wenn durch die Umgebung positive oder negative Arbeit auf das Teilchen ausgeübt wird:

$$\Delta E_{\text{sys}} \approx \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} = W_{\text{umg}} .$$

Bei der Berechnung der **Arbeit**  $W$  sind wir an der Wirkung der **Kraftkomponente** interessiert, die **parallel zur Verschiebung** des Systems verläuft. Der Teil einer Kraft, der parallel zur Verschiebung ist, verrichtet Arbeit am System, aber der senkrechte Teil der Kraft ändert die Energie des Systems nicht:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \equiv |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\angle(\vec{F}, \Delta\vec{r}), \text{ oder}$$

$$W = \langle F_x, F_y, F_z \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z .$$



Eine andere Möglichkeit besteht darin, zwei oder mehr Teilchen in das System einzubeziehen. In einem System, das aus zwei oder mehr wechselwirkenden Teilchen besteht, kann es eine Energie geben, die mit den Wechselwirkungen der Teilchen innerhalb des Systems verbunden ist. Wenn sich die Ruheenergie der Teilchen nicht ändert (d. h. wenn sich die Identität der Teilchen nicht ändert), kann die kinetische Energie des Systems entweder durch (externe) Arbeit  $W_{\text{umg}}$  verändert werden, die von Kräften ausgeht, die von Objekten in der Umgebung ausgeübt werden, oder durch (interne) Arbeit  $W_{\text{int}}$ , die von Kräften ausgeht, die auf Wechselwirkungen zwischen Teilchen innerhalb des Systems zurückzuführen sind.

Im Allgemeinen können auch andere Arten von Energieübertragungen in das System stattfinden, z.B. aufgrund eines Temperaturunterschieds zwischen dem System und der Umgebung. In dieser Folien-Serie werden wir i.W. Energieübertragungen aus mechanischer Arbeit betrachten und daher andere Arten weglassen.

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{umg}} + W_{\text{int}}$$

Wir können diese Gleichung so umstellen, dass alle Terme, die nur mit Teilchen innerhalb des Systems verbunden sind, auf der linken Seite der Gleichung stehen:

$$\Delta E_{\text{kin}} - W_{\text{int}} = W_{\text{umg}} .$$

Der Term  $-W_{\text{int}}$  wird als Änderung  $\Delta U$  der potentiellen Energie des Mehrteilchensystems bezeichnet:

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta U = W_{\text{umg}} .$$

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta U = W_{\text{umg}}$$

Die vorstehende Gleichung besagt, dass für ein System aus zwei oder mehr Teilchen die Änderung der kinetischen Energie des Systems plus die Änderung der potenziellen Energie des Systems gleich der Arbeit ist, die von äußeren Kräften auf das System ausgeübt wird, vorausgesetzt, es gibt keine anderen Übertragungen von Energie in das System. Und insbesondere wird angenommen, dass

$$\Delta \sum_i m_i c^2 = 0$$

gilt (kein Identitätswechsel der zum System gehörenden Teilchen).

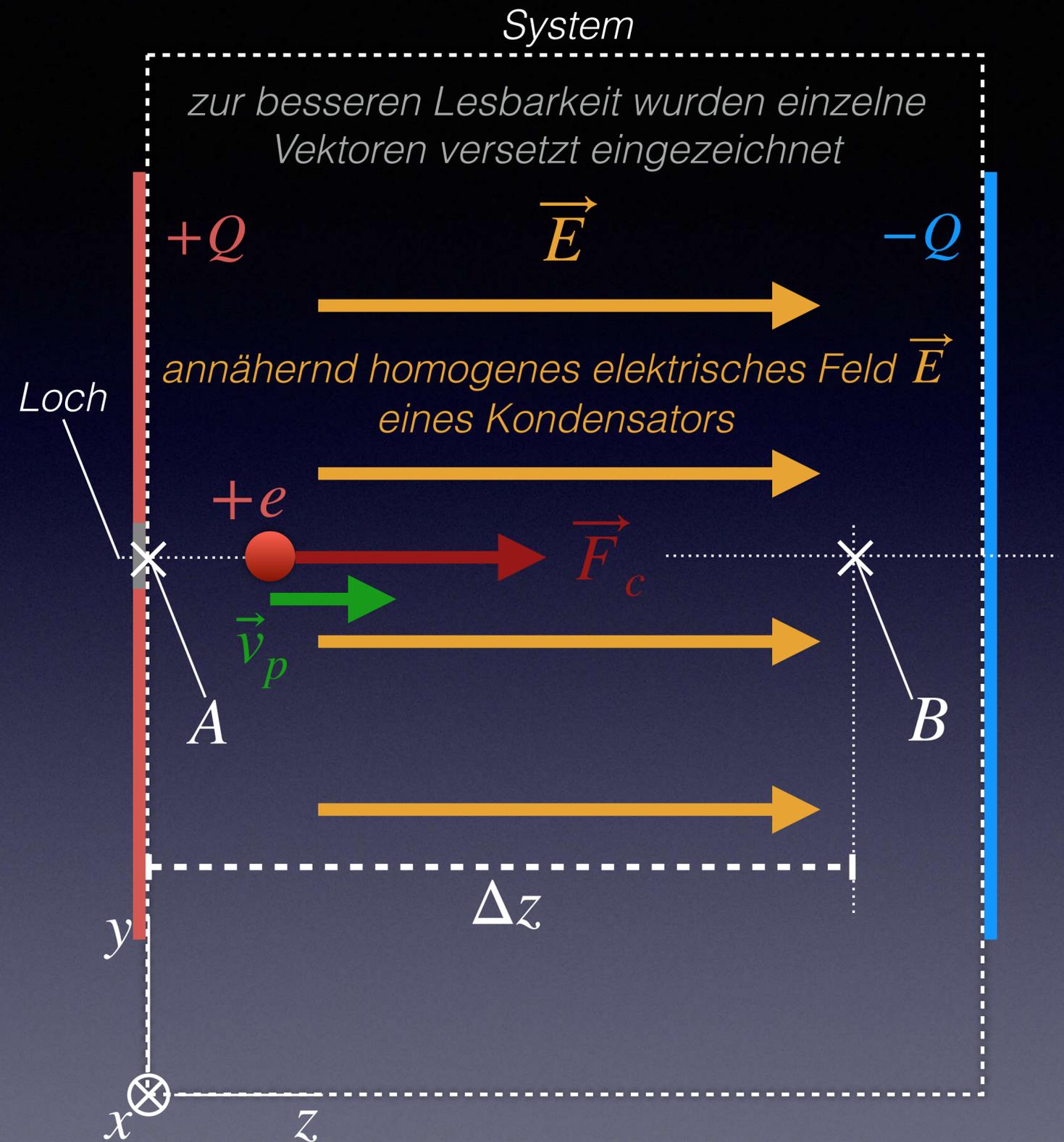
Aus geladenen Objekten  
bestehende Systeme

In den meisten Fällen, die in dieser Folien-Serie von Interesse sind, werden wir ein System wählen, das alle wechselwirkenden geladenen Objekte umfasst. In einigen Situationen müssen wir die Wirkung einer externen Kraft berücksichtigen, da eine Kraft erforderlich sein kann, um ein geladenes Teilchen in eine Richtung zu bewegen, die der auf es wirkenden elektrischen Kraft entgegengesetzt ist. In vielen einfachen Fällen können wir jedoch externe Kräfte vernachlässigen. Obwohl die Erde eine Gravitationskraft auf geladene Teilchen ausübt, ist diese Gravitationskraft in der Regel sehr klein im Vergleich zu den elektrischen Kräften, die auf die Teilchen wirken, und wir können sie normalerweise vernachlässigen. In solchen Fällen vereinfacht sich das Prinzip Energie auf

$$\Delta E_{\text{kin,sys}} + \Delta U_{\text{sys}} = 0 .$$

Betrachten wir als Beispiel ein System, das aus zwei gleichmäßig geladenen Platten (einem Kondensator) und einem einzelnen Proton besteht, wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Angenommen, das Proton bewegt sich zunächst nach rechts und tritt durch ein kleines Loch in der linken Platte in den Kondensator ein.

Während sich das Proton im Kondensator befindet, wirkt eine elektrische Kraft (eine innere Kraft, die auf das elektrische Feld im Kondensator zurückzuführen ist) auf das Proton und verrichtet (interne) Arbeit (Potenzialdifferenz).



Da die elektrische Kraft  $\vec{F}_c$  auf das Proton in dieselbe Richtung wirkt wie die Verschiebung  $A \rightarrow B$  des Protons, nimmt die kinetische Energie des Protons zu. Wenn es in der Nähe der negativen Platte ankommt, hat sich die kinetische Energie des Proton-Kondensator-Systems um den Betrag  $\Delta E_{\text{kin,sys}}$  erhöht, welcher der Arbeit  $W_{\text{int}}$  entspricht, die das elektrische Feld  $\vec{E}$  im Kondensator auf das Proton mit der Ladung  $+e$  ausübt. Die Geschwindigkeit des Protons wird somit auf dem Weg  $A \rightarrow B$  anwachsen.

Für  $W_{\text{int}}$  können wir schreiben:

$$W_{\text{int}} = \vec{F}_c \cdot \Delta \vec{r} = e \left( E_x \Delta x + E_y \Delta y + E_z \Delta z \right) .$$

Mit  $\Delta \vec{r} = \langle 0, 0, \Delta z \rangle$  folgt

$$\Delta U_{\text{sys}} = - W_{\text{int}} = - e E_z \Delta z , \text{ und damit}$$

$$\Delta E_{\text{kin,sys}} = e E_z \Delta z .$$

# Kontrollpunkt 1

1. Ein Proton bewegt sich in einem Bereich mit gleichmäßigem elektrischem Feld von Ort  $A$  zu Ort  $B$  (siehe vorangehendes Beispiel). (1) Wenn die Größe des elektrischen Feldes innerhalb des Kondensators  $3500 \text{ N/C}$  ist und der Abstand zwischen  $A$  und  $B$   $3 \text{ mm}$  beträgt, wie groß ist die Änderung der elektrischen potenziellen Energie des Systems (Proton + Kondensator) während dieses Prozesses? (2) Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie des Protons während dieses Vorgangs? (3) Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Protons am Ort  $B$ , falls es sich am Ort  $A$  in Ruhe befunden? (4) Wie ändert sich die Antwort auf (1), wenn das Proton durch ein Elektron ersetzt wird?

# Potenzialdifferenz in einem homogenen elektrischen Feld

Bei der Arbeit mit elektrischen Kräften  $\vec{F}_c$  hat es sich als sehr nützlich erwiesen, das elektrische Feld  $\vec{E}$  an einem bestimmten Ort berechnen zu können, ohne sich Gedanken darüber machen zu müssen, welche Art von geladenem Teilchen  $q$  von diesem Feld beeinflusst werden könnte. Wenn wir das elektrische Feld an einem Ort kennen, können wir die elektrische Kraft auf ein beliebiges Teilchen, das sich an diesem Ort befindet, einfach durch Multiplikation

$$\vec{F}_c = q\vec{E}$$

berechnen.

Für ein Proton im elektrischen Feld eines Kondensators haben wir im vorangehenden Abschnitt für die Differenz der Potenziellen Energie den Ausdruck

$$\Delta U_{\text{sys}} = + e \left( -E_z \Delta z \right)$$

erhalten. Für ein Elektron folgt analog

$$\Delta U_{\text{sys}} = - e \left( -E_z \Delta z \right).$$

Der in beiden Gleichungen auftretende Ausdruck  $\left( -E_z \Delta z \right)$  wird als Potenzialdifferenz  $\Delta V_c$  zwischen den Orten  $A$  und  $B$  bezeichnet.

Für ein beliebiges elektrisches Feld und einen beliebigen Weg zwischen den Orten  $A$  und  $B$  können wir für  $\Delta V_c$  verallgemeinern:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} .$$

Wie die Energie ist auch das elektrische Potenzial eine skalare Größe. Sie hat die Einheit  $\text{J/C}$ , also „Energiedifferenz pro Ladungseinheit“. Dies ist eine so wichtige Größe, dass sie mit  $\text{V}$  (Volt) einen eigenen Namen hat.

Mit Einführung der Einheit  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{J/C}$  (Volt) in Zusammenhang mit dem (elektrischen) Potenzial kann für das elektrische Feld  $\vec{\mathbf{E}}$  anstelle von  $\mathbf{N/C}$  auch  $\mathbf{V/m}$  (Volt pro Meter) verwendet werden.

Wir können nun auch den Ursprung der Energieeinheit „Elektronenvolt“ (Einheit  $eV$ ) besser verstehen. Wenn sich ein Elektron durch eine Potenzialdifferenz von einem Volt bewegt, ändert sich die elektrische potenzielle Energie um den Betrag von

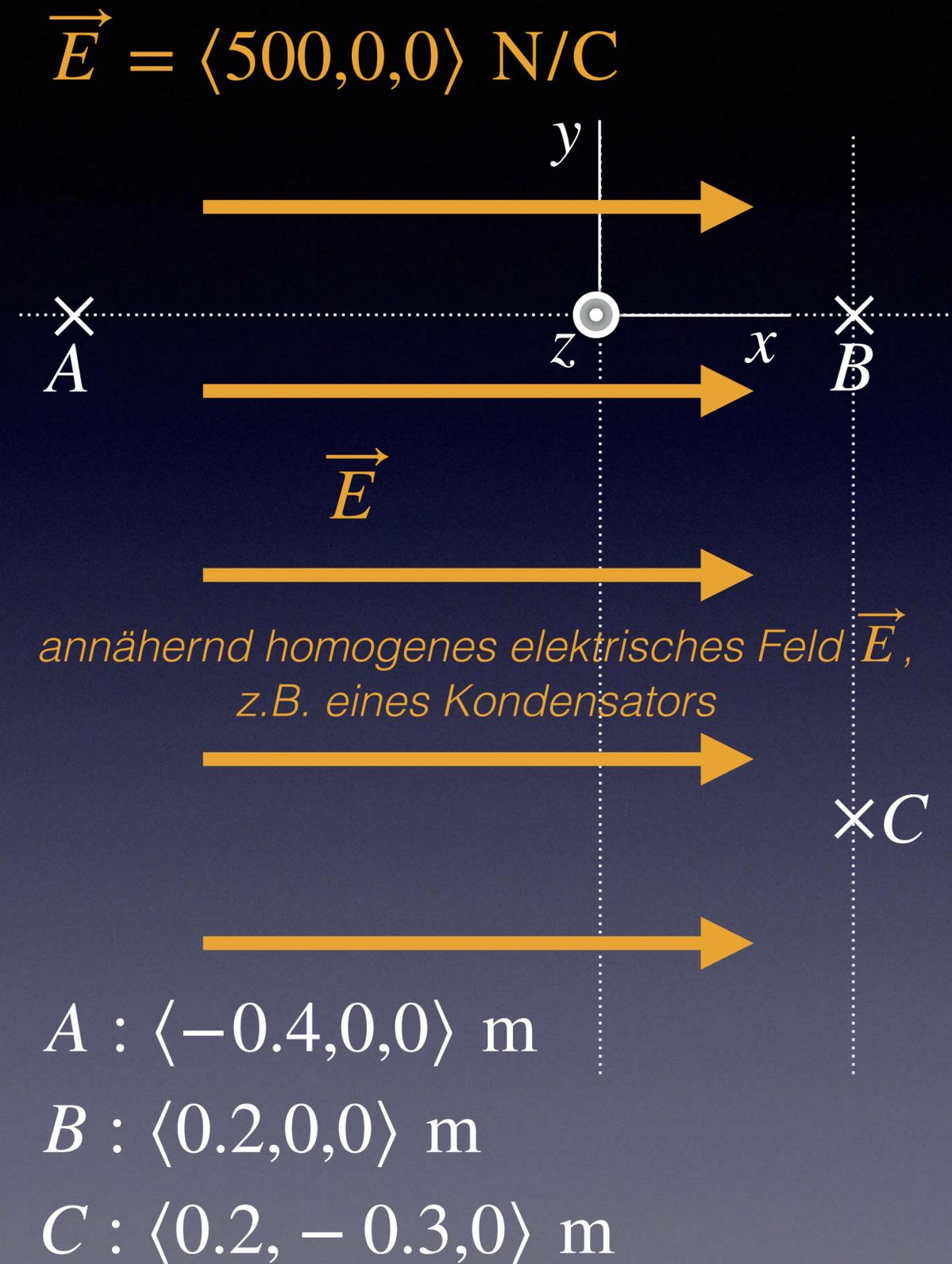
$$\Delta U_c = e \times 1V = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ J/C} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} .$$

Das Elektronenvolt ist eine praktische Einheit zur Messung der Energie atomarer Prozesse in Physik und Chemie. Beachte, dass ein Elektronenvolt eine Einheit der Energie ist, nicht eine des Potentials (das Potenzial wird in Volt gemessen, nicht in Elektronenvolt).

# Kontrollpunkt 2

Berechne für einen Pfad, der bei  $B$  beginnt und nach  $A$  führt: (1) Die Änderung des elektrischen Potentials; (2) Die Änderung der potenziellen Energie, wenn sich ein Proton von  $B$  nach  $A$  bewegt; (3) Die Änderung der potenziellen Energie, wenn sich ein Elektron von  $B$  nach  $A$  bewegt.

Berechne für einen Pfad, der bei  $B$  beginnt und nach  $C$  führt: (4) Die Änderung des elektrischen Potentials; (5) Die Änderung der potenziellen Energie, wenn sich ein Proton von  $B$  nach  $C$  bewegt; (6) Die Änderung der potenziellen Energie, wenn sich ein Elektron von  $B$  nach  $C$  bewegt.



Wir haben vor kurzem gesehen, wie man die Potentialdifferenz  $\Delta V_c$  für ein homogenes elektrisches Feld mit  $(-E_z \Delta z)$  berechnet. Umgekehrt können wir das elektrische Feld aus der Potenzialdifferenz berechnen. In diesem einfachsten Fall erhalten wir

$$E_z = - \frac{\Delta V_c}{\Delta z} .$$

Für ein beliebiges elektrisches Feld können wir das Ergebnis wie folgt verallgemeinern:

$$\vec{E} \approx - \frac{\Delta V_c}{|\Delta \vec{r}|}.$$

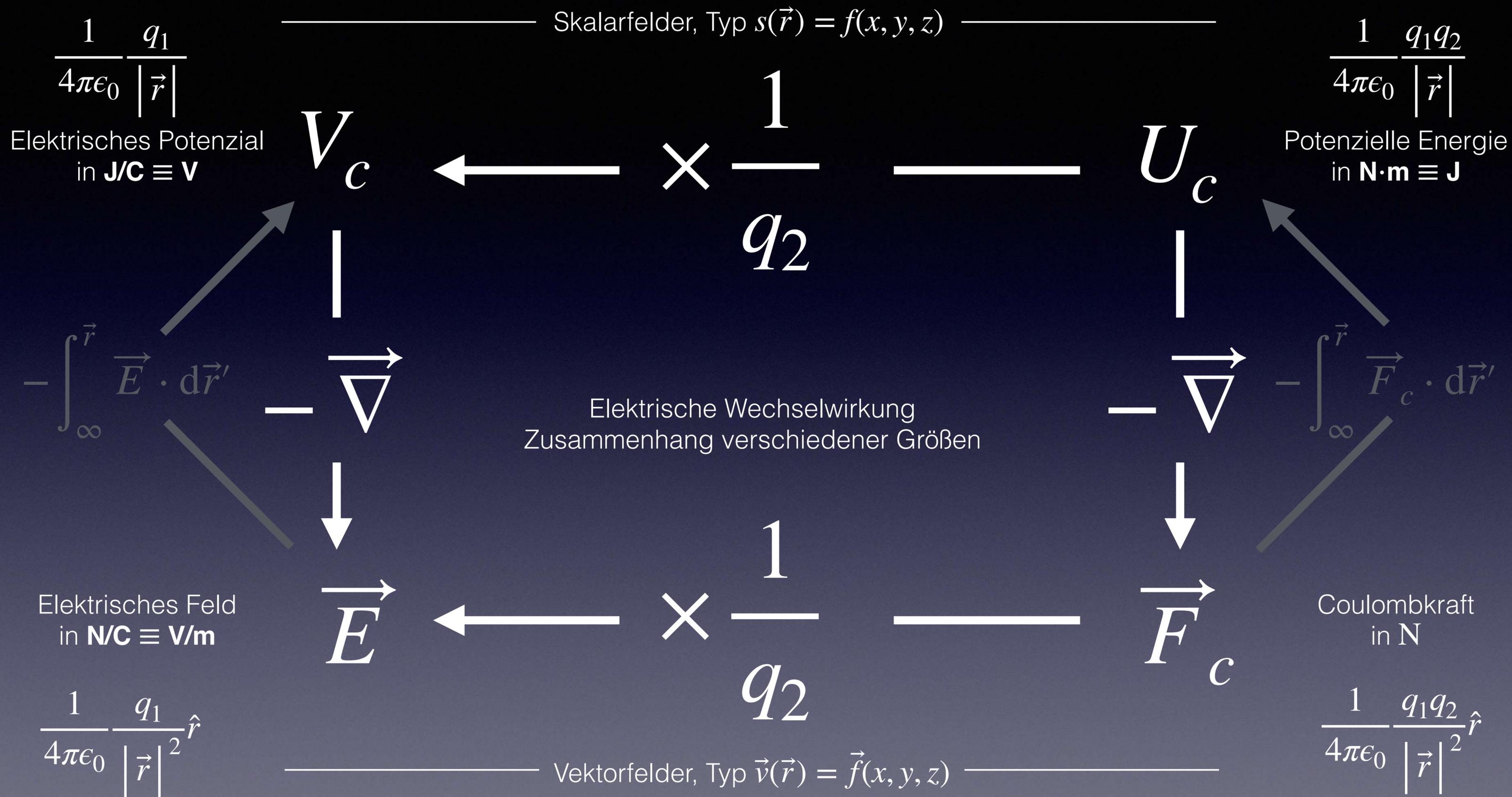
Falls wir  $|\Delta \vec{r}|$  beliebig klein werden lassen erhalten wir:

$$\vec{E} \approx - \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\Delta V_c}{|\Delta \vec{r}|} = - \vec{\nabla} V_c = \left\langle \frac{\partial V_c}{\partial x}, \frac{\partial V_c}{\partial y}, \frac{\partial V_c}{\partial z} \right\rangle.$$

Das elektrische Feld entspricht also dem negativen Gradienten des elektrischen Potentials, ganz analog zu dem Zusammenhang zwischen Gravitationsfeld  $\vec{g}$  und Gravitationspotential  $V_g$ .

# Kontrollpunkt 3

1. Angenommen, die Potentialdifferenz beim Übergang von einem Ort  $\langle 2.00, 3.50, 4.00 \rangle$  m zum Ort  $\langle 2.00, 3.52, 4.00 \rangle$  m beträgt  $\Delta V_c = 3$  V. (1) Wie hoch ist der ungefähre Wert für das elektrische Feld  $\vec{E}$  (Vektor!) in dieser Region? Beachte dabei auch das korrekte Vorzeichen.



# Zum Vorzeichen der Potenzialdifferenz

Die Potenzialdifferenz  $\Delta V_c$  kann positiv oder negativ sein, und das Vorzeichen ist äußerst wichtig, da das Vorzeichen bestimmt, ob ein bestimmtes geladenes Teilchen bei der Bewegung von einem Ort zum anderen (kinetische) Energie gewinnt oder verliert. Eine Zunahme der potenziellen Energie  $q\Delta V_c$  geht mit einer Abnahme der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  einher, während eine Abnahme der potenziellen Energie  $q\Delta V_c$  mit einer Zunahme der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  verbunden ist.

Welches Vorzeichen  $\Delta V_c$  hat, hängt maßgeblich vom Vorzeichen des Skalarprodukts  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  ab.

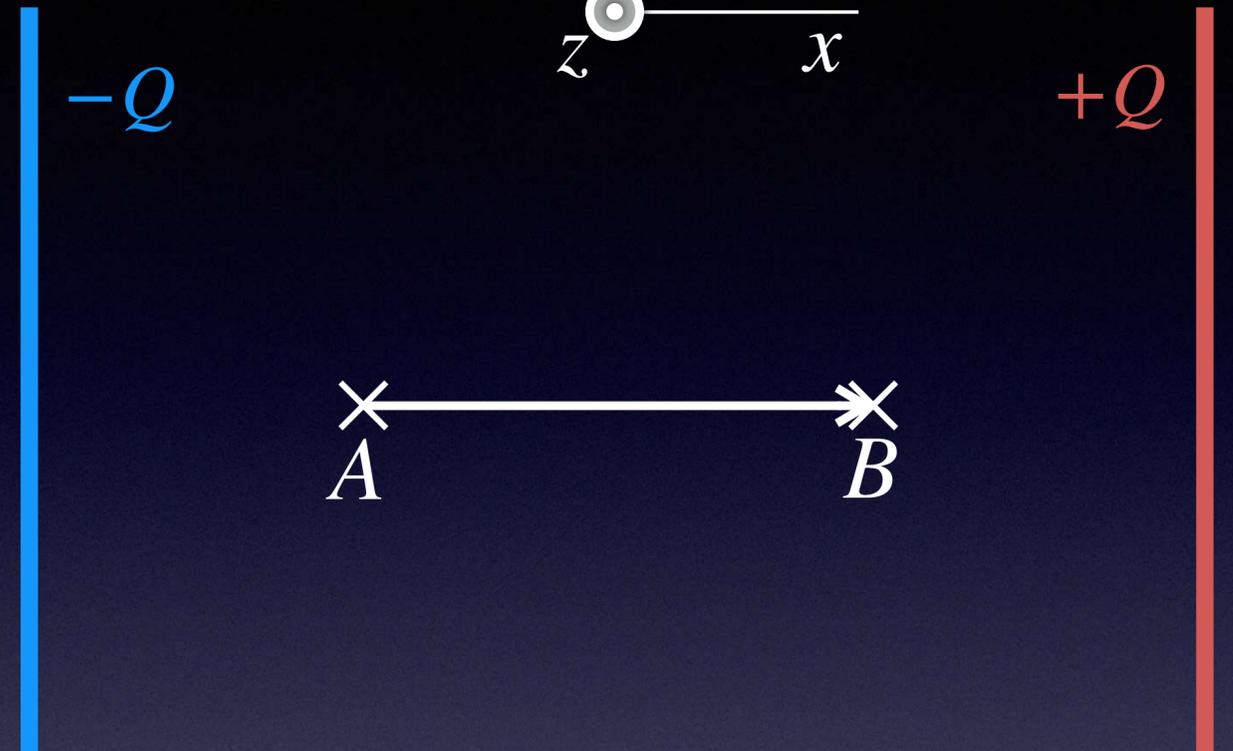
$$\Delta V_{c(A \rightarrow B)} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_{c,B} - V_{c,A}$$

- $\Delta V_c < 0$ :  $\vec{E}$  und  $d\vec{r}$  haben dieselbe Orientierung;
- $\Delta V_c > 0$ :  $\vec{E}$  und  $d\vec{r}$  weisen unterschiedliche Orientierungen auf;
- $\Delta V_c = 0$ :  $\vec{E}$  und  $d\vec{r}$  stehen senkrecht aufeinander ( $\vec{E} \perp d\vec{r}$ ).

# Kontrollpunkt 4

1. Für den **Kondensator**: (1) Was ist die Richtung des elektrischen Feldes? (2) Ist  $V_{c,B} - V_{c,A}$  positiv oder negativ? Weshalb?
2. Für den **Dipol**: (1) Was ist die Richtung des elektrischen Feldes? (2) Ist  $V_{c,B} - V_{c,A}$  positiv oder negativ? Weshalb?

Kondensator



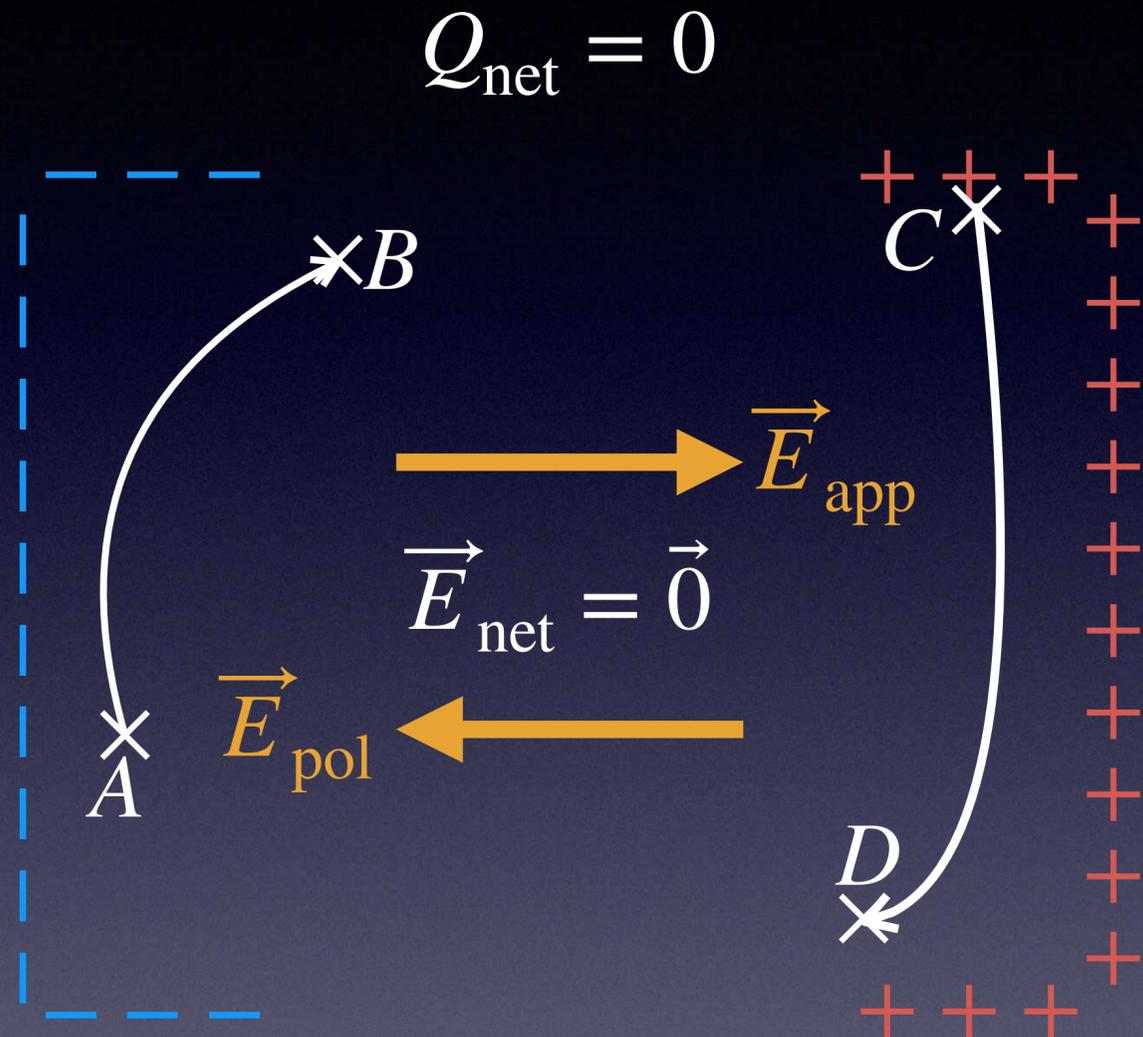
$$\Delta V_{c(A \rightarrow B)} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_{c,B} - V_{c,A}$$

elektrischer Dipol



# Weitere Beispiele zur Potenzialdifferenz

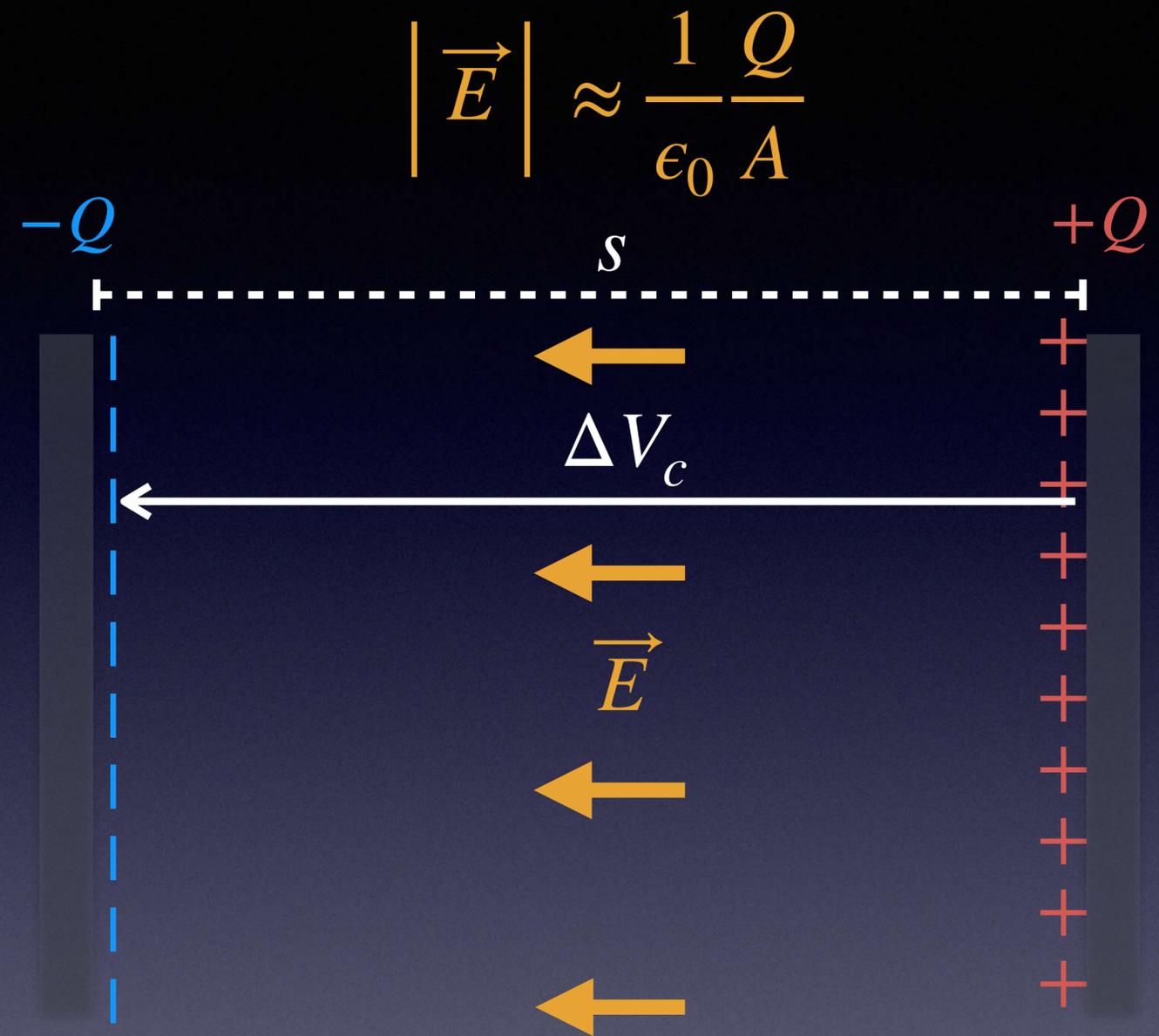
In Kapitel 2 haben wir gezeigt, dass in einem Leiter, z. B. einem Metallblock, im Gleichgewicht das elektrische Nettofeld gleich Null ist (weil sich sonst die beweglichen Ladungen so lange verschieben würden, bis sie ein Feld erzeugen, das groß genug ist, um das angelegte Feld aufzuheben). Daher muss das elektrische Nettofeld im Gleichgewicht an allen Stellen entlang eines beliebigen Pfades, z.B.  $A \rightarrow B$  oder  $C \rightarrow D$ , durch den Leiter gleich Null sein. Das bedeutet, dass die Potenzialdifferenz zwischen zwei Orten innerhalb des Metallblocks gleich Null ist.



Ein polarisierter Metallblock im Gleichgewicht.

Wir werden die Tatsache, dass die Potentialdifferenz im Inneren eines Leiters Null ist, nutzen, um eine Situation zu untersuchen, in der es um die Potentialdifferenz zwischen mehreren Bereichen geht, von denen sich einer im Inneren eines Metallobjekts befindet. Nehmen wir an, dass ein Kondensator mit großen Platten (Fläche  $A$ , Ladungen  $\pm Q$ ) und einem kleinen Abstand  $s = 3 \text{ mm}$  zunächst eine Potentialdifferenz  $\Delta V_c = 6 \text{ V}$  von einer Platte zur anderen hat. Die elektrische Feldstärke beträgt in diesem Fall

$$|\vec{E}| = 2000 \text{ V/m.}$$

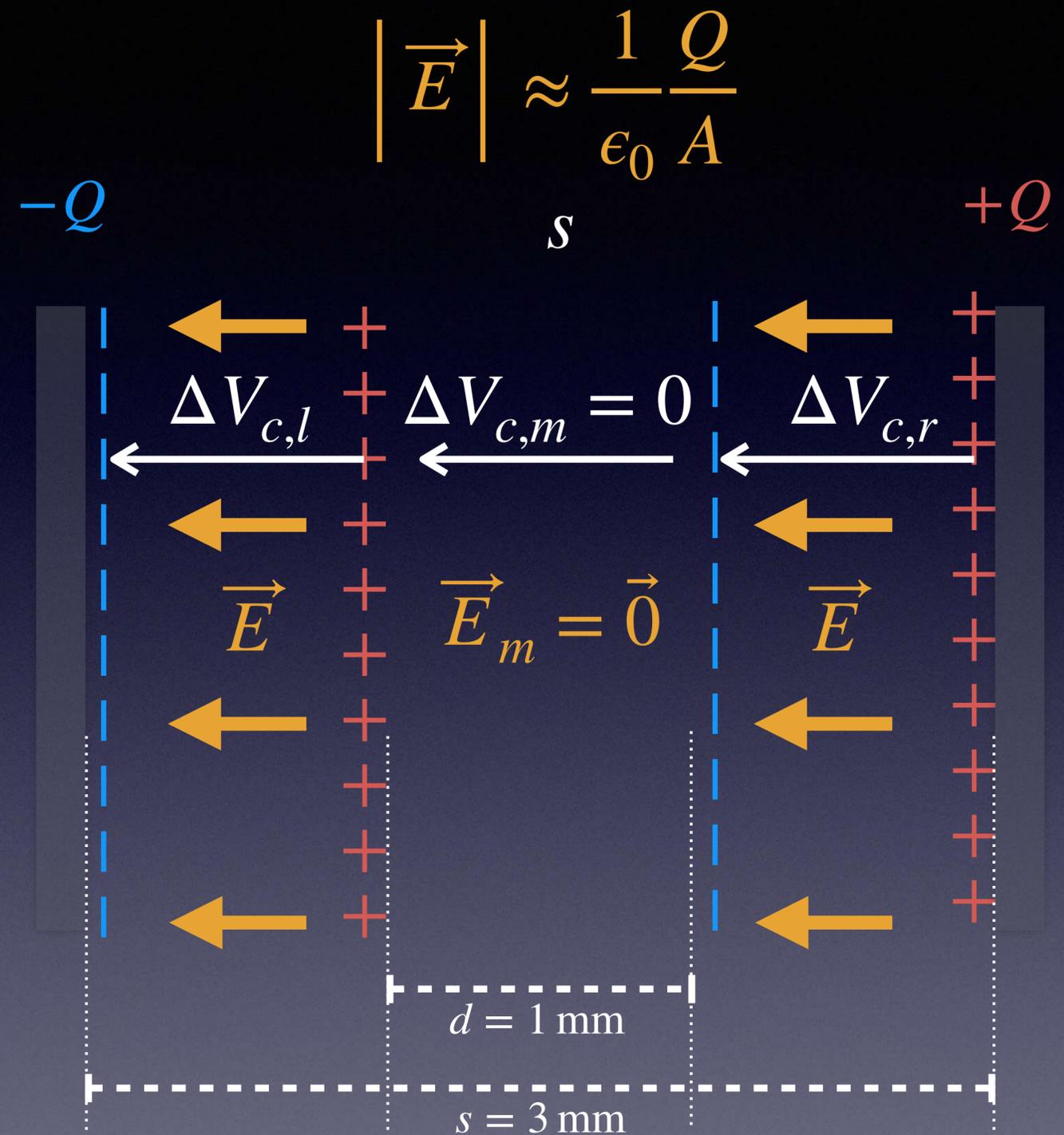


Kondensator mit sehr großen Platten und einem schmalen Spalt  $s$ .

Nehmen wir an, wir setzen in die Mitte des Spalts einen  $d = 1 \text{ mm}$  dicken Metallstreifen mit der gleichen Fläche wie die Kondensatorplatten ein. Wir achten darauf, dass wir die geladenen Kondensatorplatten nicht berühren, wenn wir den Metallstreifen einführen. Der Streifen wird so polarisiert, dass das Feld im Inneren des Streifens verschwindet. Die Potenzialdifferenz zwischen den beiden Platten beträgt dann:

$$\Delta V_c = \Delta V_{c,l} + \Delta V_{c,m} + \Delta V_{c,r},$$

$$\Delta V_c = 2 \text{ V} + 0 \text{ V} + 2 \text{ V} = 4 \text{ V}.$$

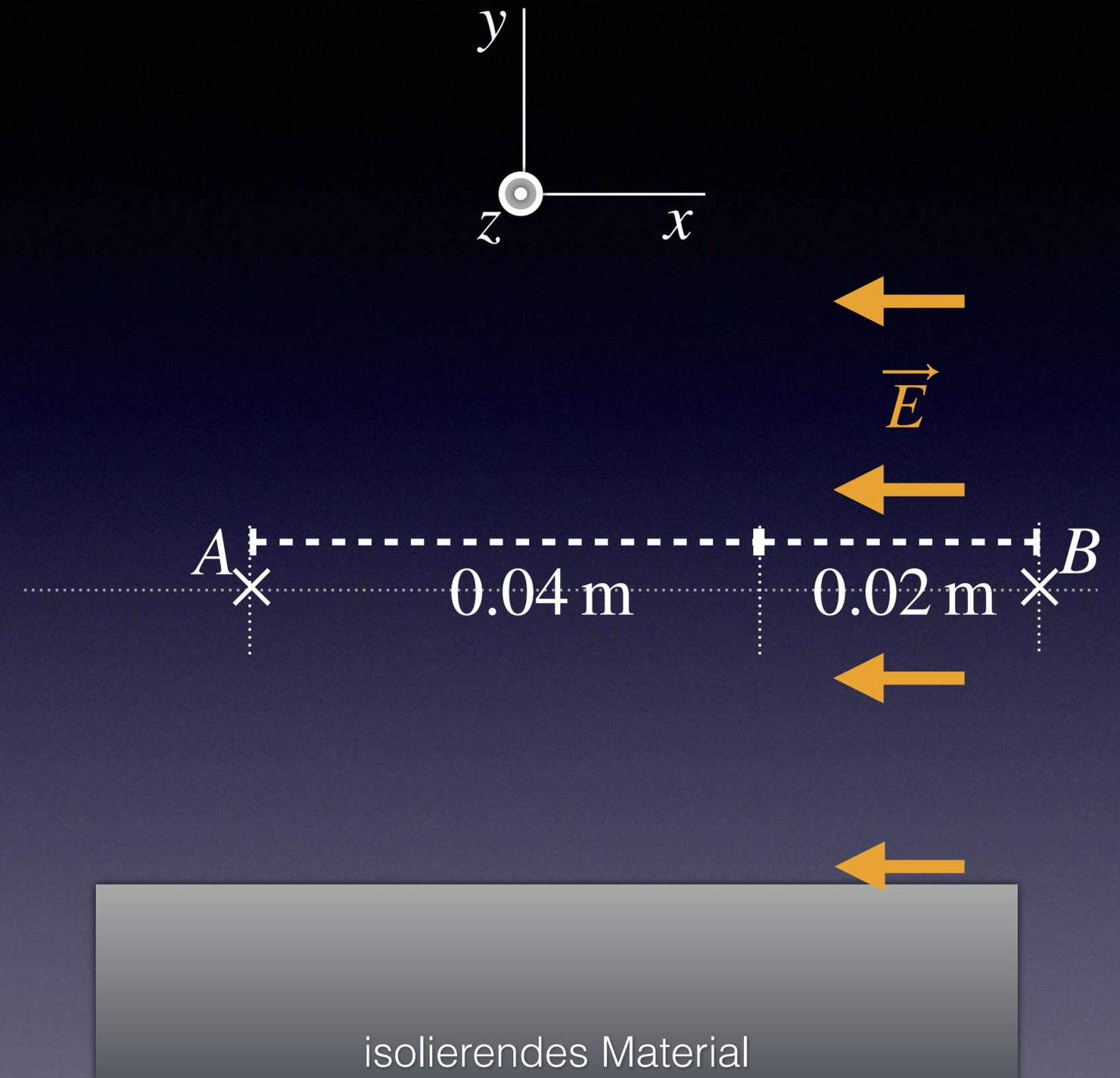


Kondensator mit sehr großen Platten, einem schmalen Spalt  $s$  und einem Metallstreifen der Dicke  $d$ .

# Kontrollpunkt 5

In der nebenstehenden Abbildung befindet sich der Ort  $A$  innerhalb eines geladenen Metallblocks und der Ort  $B$  außerhalb des Blocks. Der Metallblock befindet sich auf einer isolierenden Oberfläche und hat keinen Kontakt mit anderen Objekten. Das elektrische Feld außerhalb des Blocks beträgt

$\vec{E} = \langle -50, 0, 0 \rangle \text{ V/m}$ . (1) Berechne  $\Delta V_c$  entlang des Pfades  $A \rightarrow B$ . (2) Berechne  $\Delta V_c$  entlang des Pfades  $B \rightarrow A$ . Hinweis: Begründe jeweils kurz das Ergebnis.



Die Position  $A$  befindet sich innerhalb eines geladenen Metallblocks. Die Position  $B$  befindet sich dagegen außerhalb des Blocks.

Im vorangegangenen Kapitel haben wir das elektrische Feld, das von verteilten Ladungen (Stab, Ring, Scheibe, Kugel) erzeugt wird, durch Aufsummieren der Beiträge von Teilen der Verteilung ermittelt. Um zum Beispiel das elektrische Feld eines gleichmäßig geladenen Stabes zu bestimmen, haben wir den Stab in kurze Stücke geteilt, das Feld jedes kurzen Stücks durch das Feld einer Punktladung angenähert und alle diese Beiträge entweder numerisch oder, wenn möglich, analytisch durch Auswertung eines Integrals addiert. Je mehr Stücke und je kürzer jedes Stück, desto genauer war das Ergebnis, und im Falle eines Integrals gab es eine unendliche Anzahl von unendlich kurzen Stücken des Stabes.

Wir können einen ähnlichen Ansatz verwenden, um elektrische Potenzialdifferenzen zwischen zwei Orten in einem Gebiet mit variierendem elektrischem Feld zu berechnen. Die Grundidee besteht darin, einen Pfad vom Ausgangsort  $\vec{r}_i$  zum Zielort  $\vec{r}_f$  zu wählen, diesen Pfad in kurze Stücke  $\Delta\vec{r}_l$  zu zerlegen, für jedes Stück  $\Delta V_{c,l}$  zu berechnen, anschließend zu addieren

$$\Delta V_{c(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} = \sum_l \Delta V_{c,l}$$

und abschließend das Ergebnis zu überprüfen.

Im Prinzip können wir jede Ladungsverteilung durch Punktladungen  $q_m$  approximieren. Für jeden Abschnitt  $l$  können wir dann schreiben:

$$\Delta V_{c,l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta \vec{r}_l \sum_m \frac{q_m}{|\vec{r}_l - \vec{r}_m|^2}, \text{ und}$$

$$\Delta V_{c(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} = \sum_l \Delta V_{c,l} \text{ (Potenzialdifferenz } \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f \text{)}.$$

Da für eine Punktladung eine analytische Lösung existiert, können wir die Potenzialdifferenz mit deren Hilfe genauer berechnen.

Potenzialdifferenz  $\Delta V_{c,m}$  zwischen  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_f$  mit analytischem Potenzial:

$$\Delta V_{c,m} = V_{c,m}(\vec{r}_f) - V_{c,m}(\vec{r}_i), \text{ ausgeschrieben}$$

$$\Delta V_{c,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_m \left( \frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_m|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_m|} \right), \text{ und summiert}$$

$$\Delta V_{c(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} = \sum_m \Delta V_{c,m}.$$

# Kontrollpunkt 6

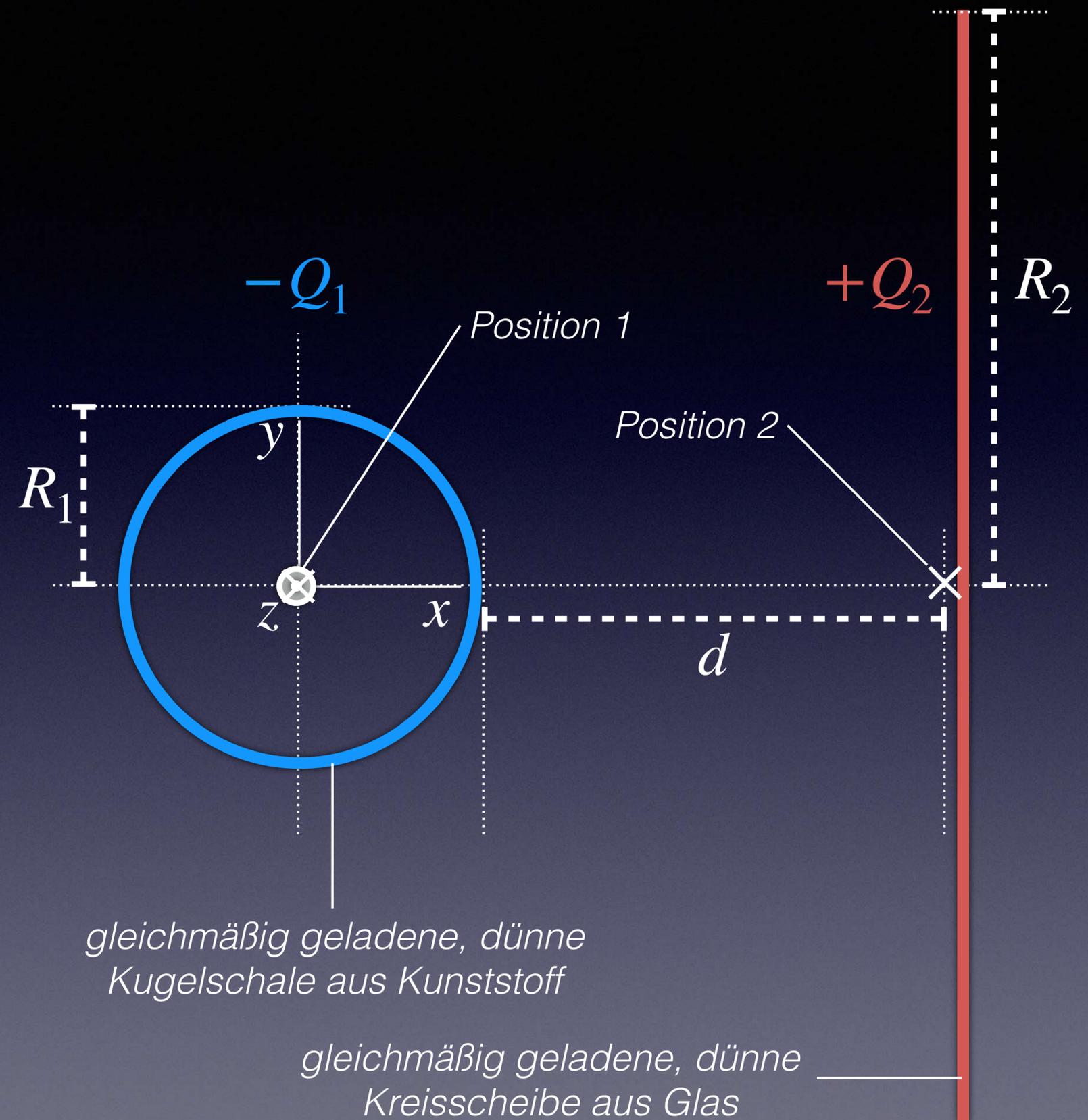
1. Ein Proton befindet sich im Ursprung. Der Ort  $C$  befindet sich vom Proton aus in einem Abstand von  $1 \times 10^{-10} \text{ m}$  und der Ort  $D$  in einem Abstand von  $2 \times 10^{-8} \text{ m}$  entlang einer Linie, die radial nach außen verläuft. (1) Wie groß ist die Potentialdifferenz  $V_D - V_C$  zwischen den Orten  $C$  und  $D$ ? (2) Wie viel (externe) Arbeit  $W_{\text{ext}}$  muss aufgewendet werden, um ein Elektron von  $C$  nach  $D$  zu bewegen? Hinweis: Das Proton ruht im Ursprung und die kinetische Energie des Elektrons sei konstant.

# Kontrollpunkt 7

Eine dünne Kugelschale aus Kunststoff trägt eine gleichmäßig verteilte negative Ladung  $-Q_1$  und eine dünne Kreisscheibe aus Glas eine gleichmäßig verteilte positive Ladung  $+Q_2$ . Der Radius  $R_1$  der

Kunststoffkugelschale ist sehr klein im Vergleich zu dem großen Radius  $R_2$  der Glasscheibe. Der Abstand zwischen der Oberfläche der Kugelschale und der Glasscheibe beträgt  $d$ , wobei  $d \ll R_2$  gilt.

(1) Ermittle die Potentialdifferenz  $V_{c,2} - V_{c,1}$  zwischen den Positionen 1 (Zentrum der Kunststoffkugel) und der Position 2 (knapp außerhalb der Glasscheibe). Gib an, welche Näherungen oder vereinfachenden Annahmen du dabei machst.

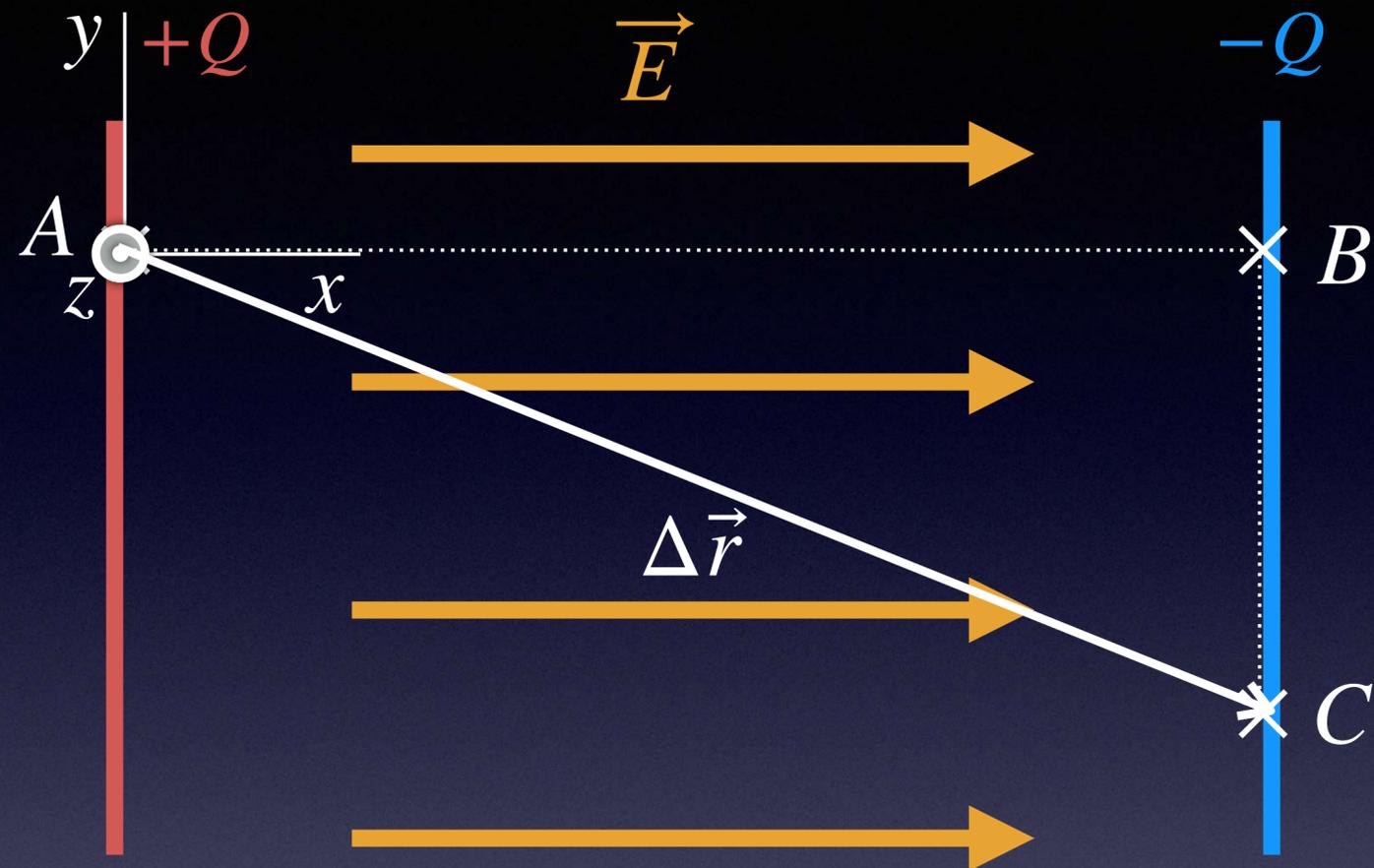


# Pfadunabhängigkeit

In Kapitel 6 der Folien-Serie „*Moderne Mechanik*“ haben wir gezeigt, dass potenzielle Energiedifferenzen nur vom Anfangs- und Endzustand eines Systems abhängen und unabhängig vom Weg sind: anderer Weg, anderer Prozess, aber gleiche Zustandsänderung. In ähnlicher Weise hängt die (elektrische) Potenzialdifferenz

$$\Delta V_{c(A \rightarrow B)} = V_{c,B} - V_{c,A}$$

zwischen zwei Orten nicht von dem zwischen den Orten  $A$  und  $B$  zurückgelegten Weg ab. Um die Potenzialdifferenz zwischen zwei Orten auf der Grundlage des elektrischen Feldes in der Region zu berechnen, muss man einen Weg wählen. Es steht uns jedoch frei, einen solchen Weg zu wählen, der unsere Berechnungen vereinfacht.



$$\Delta V_c = - \vec{E} \cdot \Delta r$$

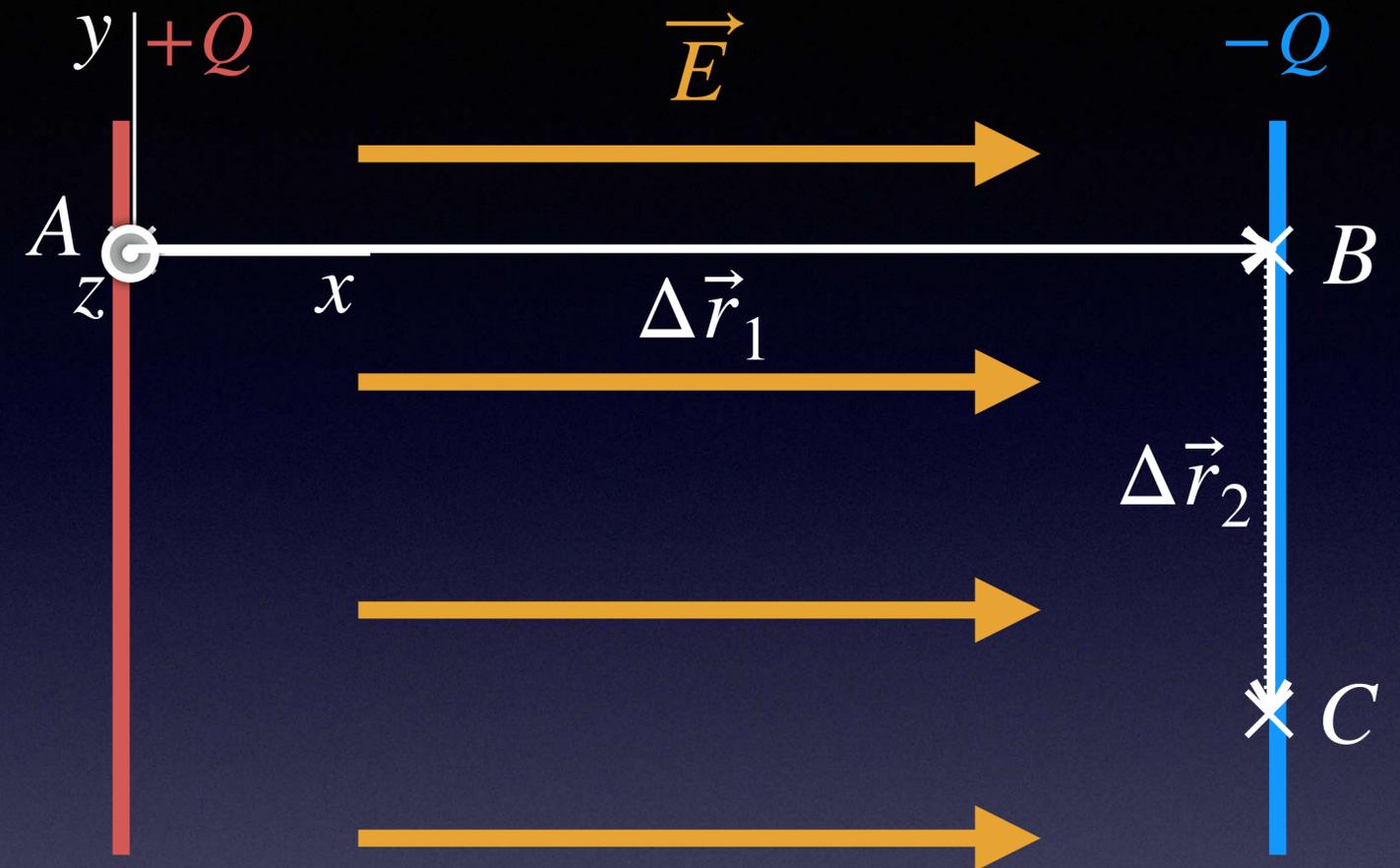
$$\Delta V_c = - E_x \Delta x$$

$$\vec{E} = \langle E_x, 0, 0 \rangle$$

$$\Delta r = \langle \Delta x, -\Delta y, 0 \rangle$$

$$\Delta r_1 = \langle \Delta x, 0, 0 \rangle$$

$$\Delta r_2 = \langle 0, -\Delta y, 0 \rangle$$



$$\Delta V_c = - \vec{E} \cdot (\Delta r_1 + \Delta r_2)$$

$$\Delta V_c = - E_x \Delta x$$

Das Ergebnis macht Sinn: So wie für eine Bewegung im rechten Winkel zu einer Kraft keine Arbeit erforderlich ist, ändert sich auch das elektrische Potenzial nicht entlang eines Pfades, der senkrecht zum elektrischen Feld verläuft. Ausschließlich die zum Feld parallele Komponente des Pfades ist relevant (Skalarprodukt).

$\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$  entlang Kreisbogen

Pfad 1

$\vec{E} \cdot d\vec{r} < 0$ , Weg und Feld entgegengesetzt orientiert

$\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$ , Weg und Feld gleich orientiert

End-Position B

Pfad 2

$\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$ , Weg und Feld gleich orientiert

$\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$  entlang Kreisbogen

$$-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

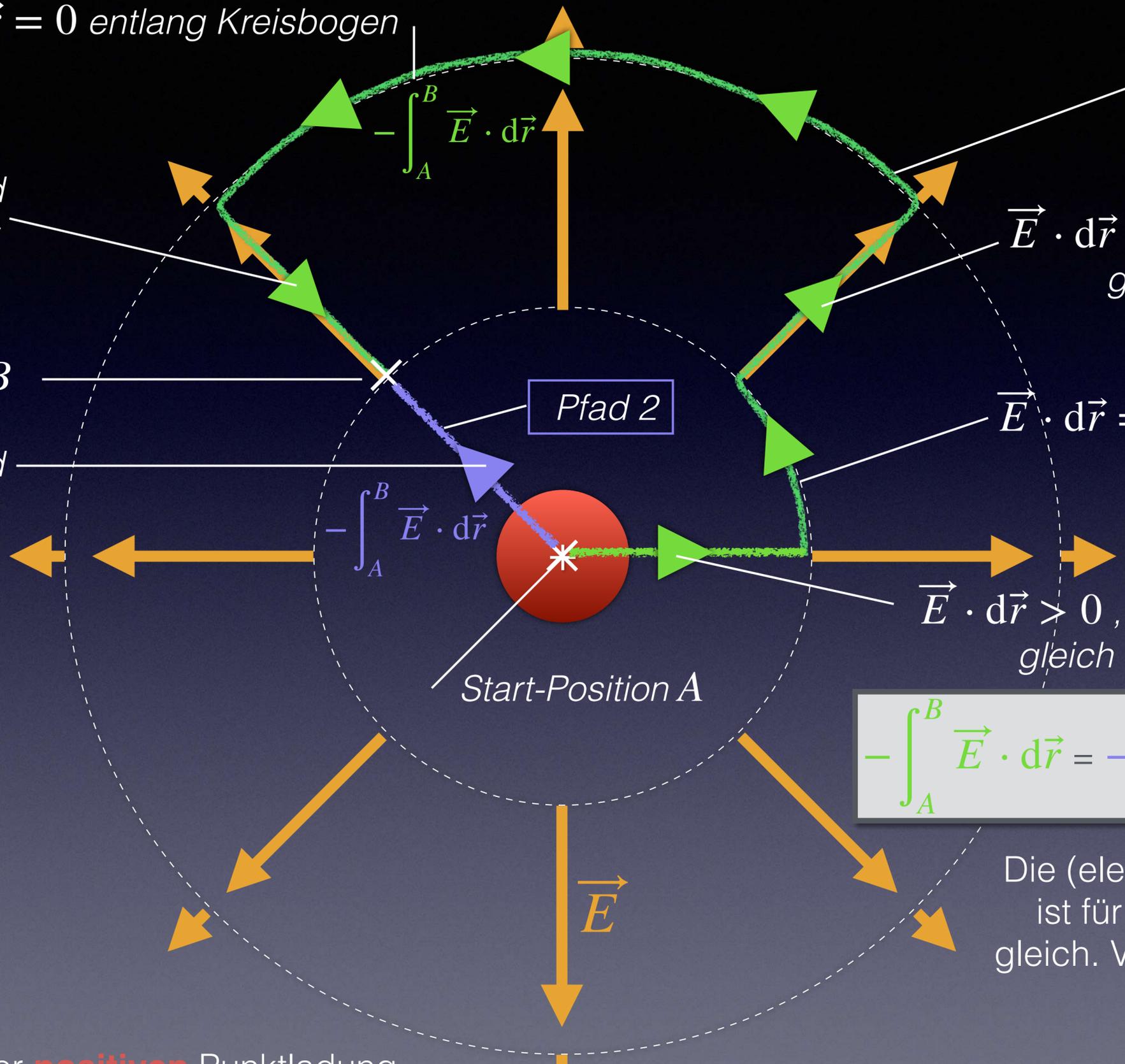
$\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$ , Weg und Feld gleich orientiert

Start-Position A

$$-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_c(B) - V_c(A)$$

Die (elektrische) **Potenzialdifferenz** ist für beide dargestellten Wege gleich. Verallgemeinert heißt dies, sie ist **pfadunabhängig**.

radialsymmetrisches Feld einer **positiven** Punktladung

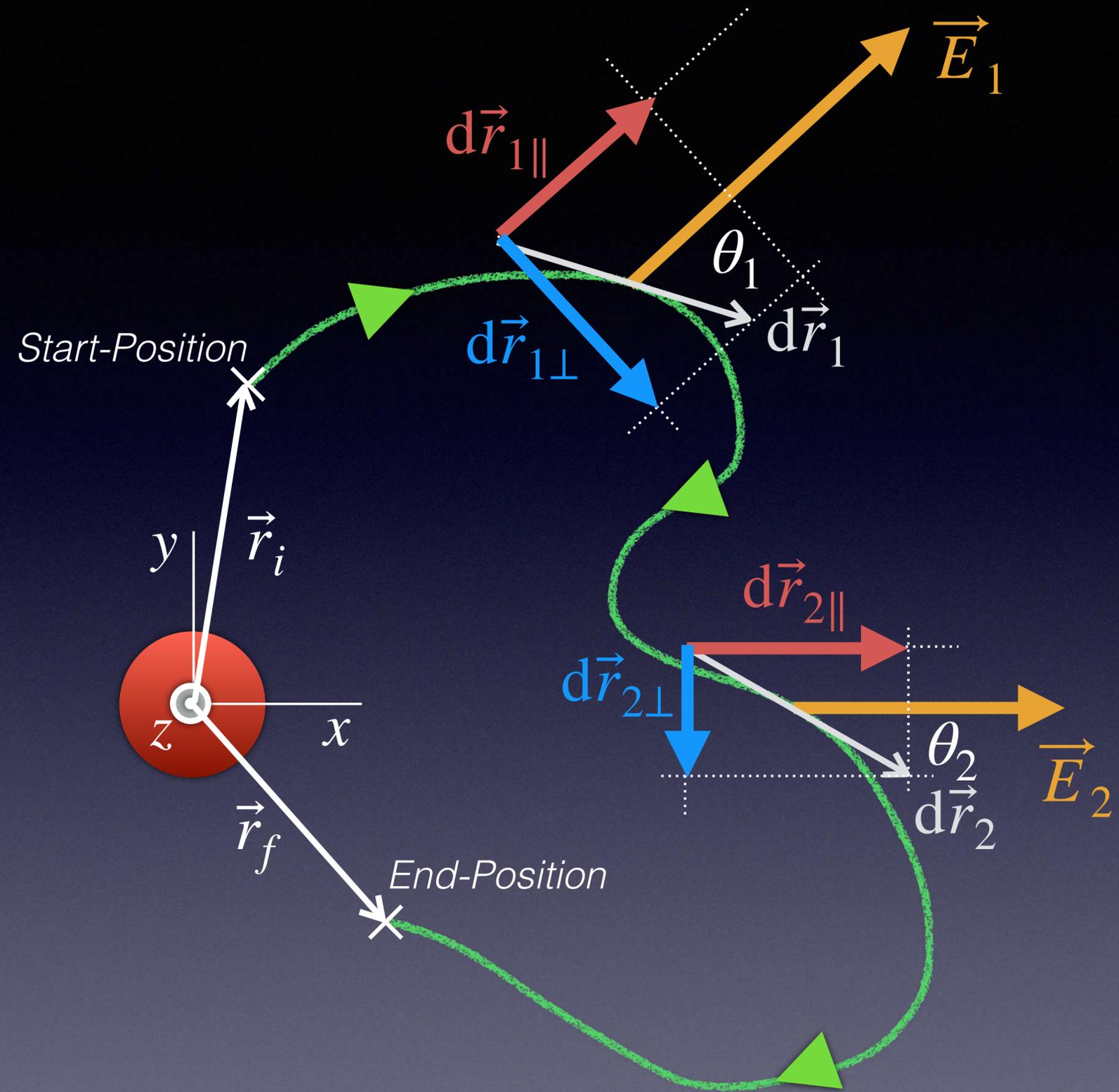


Wir können allgemeiner sehen, wie dies für jeden Pfad in der Nähe einer stationären Punktladung funktioniert. Verfolge einen beliebigen Pfad vom Ausgangsort  $\vec{r}_i$  zum Zielort  $\vec{r}_f$ .

$$\vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = |\vec{E}_i| |d\vec{r}_i| \cos\angle(\vec{E}_i, d\vec{r}_i)$$

$$d\vec{r}_{i\parallel} = |d\vec{r}_i| \cos\angle(\vec{E}_i, d\vec{r}_i) \hat{E}.$$

Für eine Punktladung entspricht  $d\vec{r}_{i\parallel}$  der radialen Komponente von  $d\vec{r}$ , also der Änderung des Abstands von der Punktladung. Für das Endergebnis spielt somit nur die Abstandsänderung von der Start- zur End-Position eine Rolle.



Daher integrieren wir entlang eines beliebigen Pfades einfach  $-\vec{E} \cdot d\vec{r}_{\parallel}$ , und erhalten das (vertraute) Ergebnis

$$\Delta V_c = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{|\vec{r}_f|} - \frac{1}{|\vec{r}_i|} \right).$$

Alles, was zählt, sind die anfänglichen und endgültigen Entfernungen von der Ladung, nicht der Weg, den wir „zufällig“ (eher „pragmatisch“) wählen. Mathematisch ausgedrückt: für ein rotationsfreies Feld ist das Linienintegral unabhängig vom Pfad. Für einen geschlossenen Weg ist es Null.

Da die Potenzialdifferenz als Integral des elektrischen Feldes berechnet werden kann und das elektrische Feld die Summe aller Beiträge vieler stationärer Punktladungen ist, ist die Potenzialdifferenz die Summe der Beiträge aller Punktladungen.

Das Integral der Potenzialdifferenz ist unabhängig vom Weg für eine einzelne Punktladung. Da alle Ladungsverteilungen aus atomaren Punktladungen bestehen, muss die Potenzialdifferenz auf dem Hin- und Rückweg für jede beliebige Konfiguration stationärer Ladungen gleich Null sein.

Die Tatsache, dass  $\Delta V_c$  für eine beliebige „Rundreise“ den Wert Null hat, ist auf fundamentale Weise mit dem Prinzip Energie (der Energieerhaltung) verbunden.

Nehmen wir an, dass es möglich ist, eine Ansammlung stationärer geladener Teilchen in einer solchen Konfiguration zu installieren, dass eine „Rundreise“ eine Potenzialdifferenz  $\Delta V_c$  größer als Null ergäbe. Ein Elektron könnte diesen geschlossenen Pfad viele Male zurücklegen, und jedes Mal wäre die Änderung der potenziellen Energie  $\Delta U_c = -e\Delta V_c$  negativ. Daher würde die kinetische Energie des Systems (Elektron plus elektrisches Feld) jedes Mal zunehmen, obwohl keine externe Energiezufuhr erfolgt. Wir hätten ein Perpetuum Mobile erfunden! Da dieses Ergebnis gegen das Prinzip Energie verstoßen würde, können wir daraus schließen, dass unsere Annahme

$$\Delta V_c = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$$

falsch gewesen sein muss (Beweis durch Widerspruch).

$\Delta V_c$  ist unabhängig vom gewählten Weg.

Für einen geschlossenen Weg ist  $\Delta V_c = 0$ .

### **Pfadunabhängigkeit**

*Limitierung der Gültigkeit: Im nächsten Kapitel werden wir Magnetfelder untersuchen, die durch bewegte Ladungen erzeugt werden können. Später, wenn wir das Faradaysche Gesetz behandeln, werden wir sehen, dass bei zeitlich veränderlichen Magnetfeldern das Ringintegral (geschlossener Pfad) des elektrischen Feldes ungleich Null sein kann. In diesem Kapitel haben wir angenommen, dass es keine zeitlich veränderlichen Magnetfelder gibt.*

Die Pfadunabhängigkeit ist ein äußerst wichtiges Ergebnis, und wir werden in Zukunft häufig Gelegenheit haben, uns auf diese Eigenschaften des elektrischen Potentials zu beziehen.

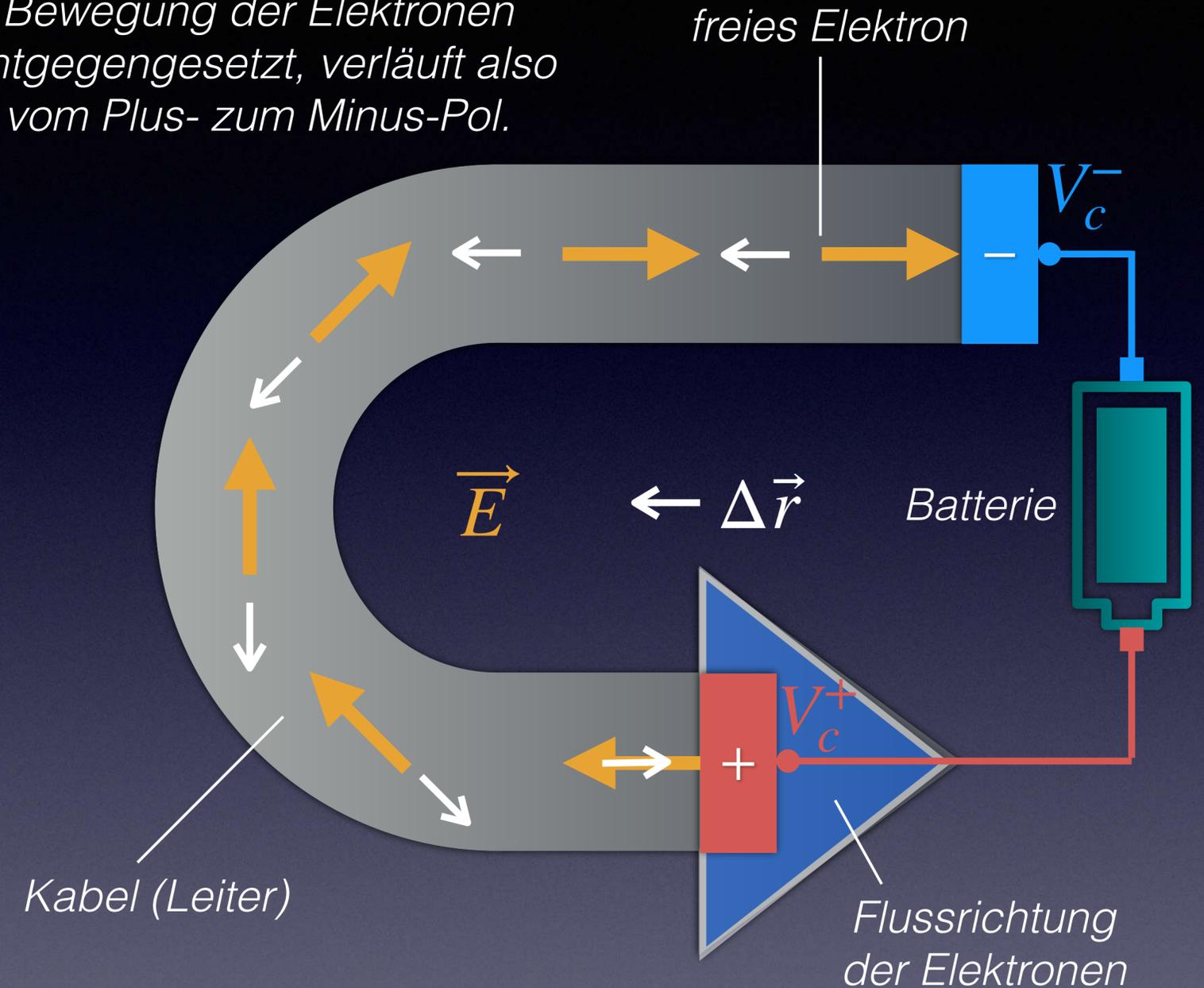
Die Pfadunabhängigkeit ist wichtig, denn wenn wir das Potential verwenden, denken wir über die Beziehung zwischen Anfangs- und Endzustand nach, unabhängig von dem dazwischen liegenden Prozess. Es steht uns frei, den günstigsten Prozess zu analysieren, der das System vom Anfangszustand in den Endzustand überführt.

Wenn sich ein metallischer Leiter nicht im Gleichgewicht befindet.

Während der (extrem) kurzen Zeit, in der ein Metall durch eine äußere Ladung polarisiert wird, gibt es im Inneren des Metalls ein elektrisches Feld ungleich Null, bevor das Gleichgewicht erreicht ist.

Wie wir in einem späteren Kapitel lernen werden, hält die Batterie in einem Stromkreis ein elektrisches Feld ungleich Null im Inneren eines Leiters aufrecht. Das elektrische Feld treibt das „Meer“ aus beweglichen Elektronen ständig an. Die Ladungen ruhen in dieser Situation nicht statisch.

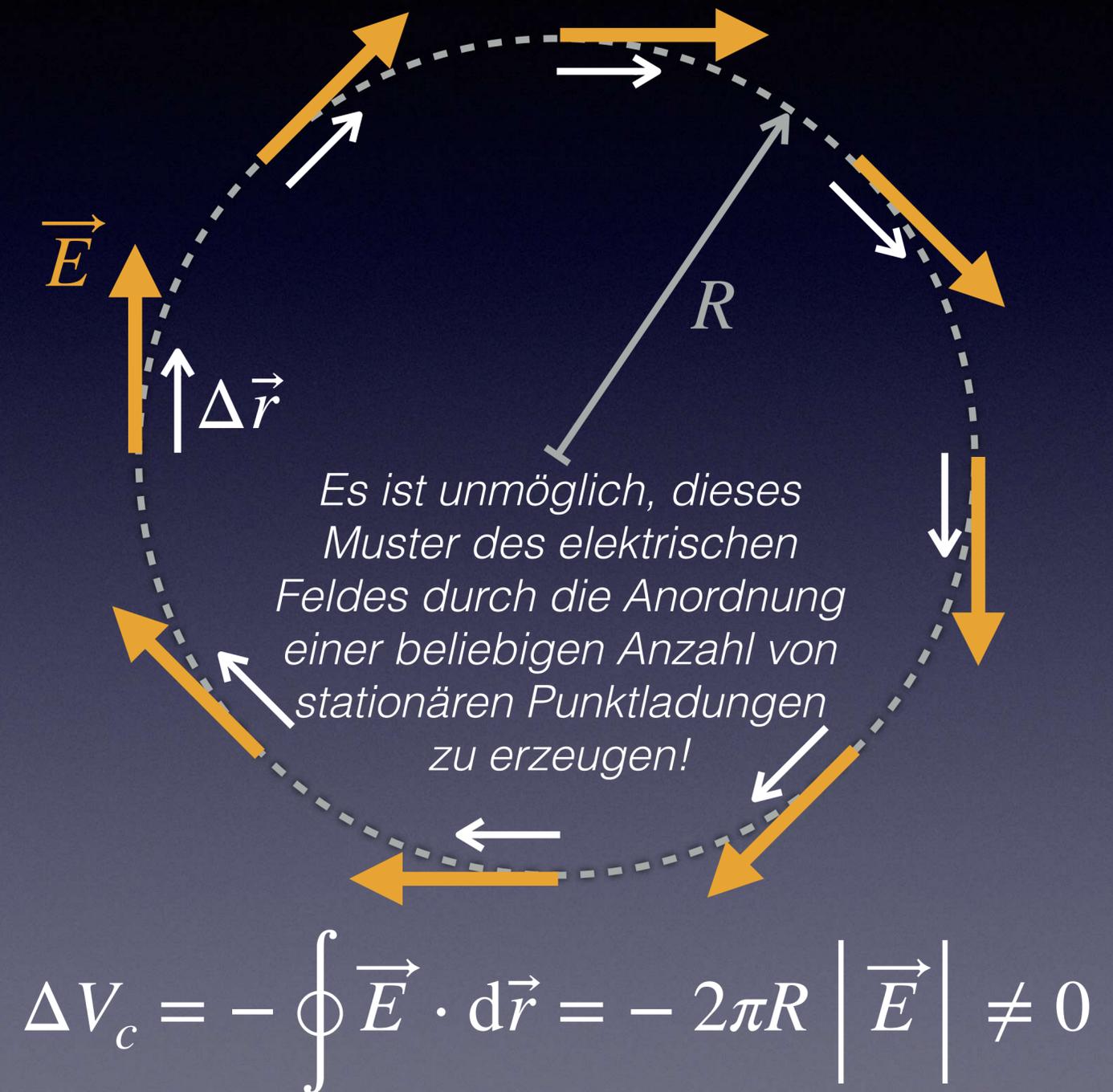
*Hinweis: die technische Stromrichtung ist der Bewegung der Elektronen entgegengesetzt, verläuft also vom Plus- zum Minus-Pol.*



$$\Delta V_c = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_c^+ - V_c^- > 0$$

Wir können die Tatsache, dass die Potenzialdifferenz auf einem geschlossenen Pfad gleich Null sein muss, nutzen, um über bestimmte Muster des elektrischen Feldes nachzudenken. Interessanter Weise können wir zu dem Schluss kommen, dass bestimmte Muster des elektrischen Feldes niemals von einer Ansammlung stationärer geladener Teilchen (ohne zeitvariables magnetisches Feld) erzeugt werden können. Betrachten wir zum Beispiel das nebenstehend gezeigte Muster des elektrischen Feldes, bei dem das elektrische Feld den Kreis an jedem Punkt des Kreises tangiert.

*Hinweis: zur leichteren Lesbarkeit wurden die Vektoren versetzt zueinander eingezeichnet.*



Das Potenzial an einer  
bestimmten Position

Normalerweise interessieren wir uns für die Potentialdifferenz zwischen zwei Orten, z. B.  $\Delta V_c = V_c(B) - V_c(A)$ . Manchmal ist es jedoch sinnvoll, das Potential an nur einem Ort  $A$  zu betrachten. Das Potential am Ort  $A$  ist definiert als die Potentialdifferenz zwischen einem Ort, der unendlich weit von allen geladenen Teilchen entfernt ist, und dem Ort  $A$  von Interesse:

$$V_c(A) \equiv \Delta V_c(A) = V_c(A) - V_{c,\infty} .$$

Das Potential am Ort  $A$ , manchmal auch als „Potential relativ zum Unendlichen“ bezeichnet, ist die Potentialdifferenz zwischen  $A$  und einem Ort, der unendlich weit von allen Ladungsträgern entfernt ist.

Natürlich macht die vorangehende Gleichung nur dann Sinn, falls  $V_{c,\infty} = 0$ . Dies steht im Einklang mit der Tatsache, dass die potenzielle Energie eines Systems aus zwei geladenen Teilchen, die unendlich weit voneinander entfernt sind, gleich Null sein muss.

Für eine Punktladung  $q$  im Ursprung erhalten wir am Ort  $\vec{r}_A$ :

$$V_c(\vec{r}_A) = V_c(\vec{r}_A) - V_{c,\infty} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}_A} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}_A|}.$$

Falls  $q > 0$  ist auch  $V_c > 0$ . Falls  $q < 0$  ist auch  $V_c < 0$ .

Wenn wir den Wert des Potentials  $V_c(\vec{r})$  an einem Ort  $\vec{r}$  kennen, können wir damit herausfinden, wie hoch die potenzielle Energie  $U_c(\vec{r})$  des Systems wäre, wenn wir ein geladenes Objekt  $q$  an diesem Ort platzieren würden:

$$U_c(\vec{r}) = qV_c(\vec{r}) .$$

Wird das Potenzial beispielsweise durch eine im Ursprung ruhende Punktladung  $Q$  erzeugt, so erhalten wir unter Verwendung des Ergebnisses von der vorangehenden Folie

$$U_c(\vec{r}) = q \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|} \right) .$$

Wir können das Potenzial aufgrund einer Ladungsverteilung auf zwei verschiedenen Arten berechnen:

1. Entweder durch Aufteilung der Ladungsverteilung in punktförmige Ladungen und Addition des Potenzials für jede Punktladung, oder
2. durch Berechnung des Integrals  $-\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , wofür die Kenntnis des elektrischen Feldes der Ladungsverteilung erforderlich ist.

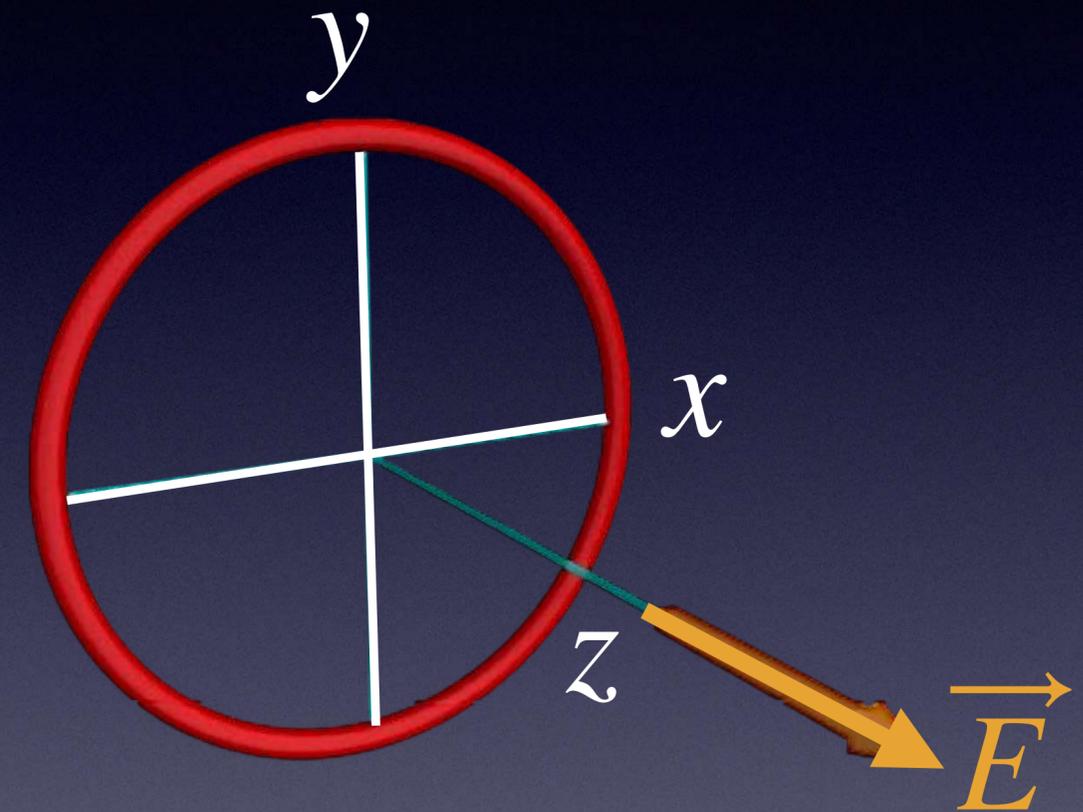
Im vorangehenden Kapitel haben wir gezeigt, dass für einen gleichmäßig geladenen Ring  $\vec{E}$  an  $\langle 0,0,z \rangle$  durch

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle$$

gegeben ist. Für das Potenzial  $V_c$  an der genannten Position erhält man

$$V_c \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Aus einer Summation der Potenziale endlich vieler Punktladungen, welche den Ring repräsentieren.



Man kann einerseits zeigen, dass (für  $E_z$ )

$$-\int_{\infty}^z \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

ist, und umgekehrt

$$E_z = -\frac{\partial V_c}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

ist. Das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potentials.

In einem der vorangehenden Abschnitte haben wir festgestellt, dass die Potenzialdifferenz  $\Delta V_c$  zwischen zwei beliebigen Stellen im Inneren des Metalls gleich Null sein muss, da das elektrische Feld in einem Metallobjekt im Gleichgewicht gleich Null ist. Wir können daraus schließen, dass das Potenzial an jedem Ort im Metall gleich dem Potenzial an jedem anderen Ort im Metallobjekt sein muss.

Bedeutet dies, dass das Potenzial an jedem Ort innerhalb eines Metalls im Gleichgewicht gleich Null ist? Nein. Das Potenzial im Inneren eines Metallgegenstands im Gleichgewicht ist zwar konstant, aber es muss nicht gleich Null sein. Ladungen auf der Oberfläche des Metallgegenstandes oder auf anderen Gegenständen können zu einem gleichmäßigen, von Null verschiedenen Potenzial im Inneren des Metalls beitragen.

Eine feste Metallkugel mit dem Radius  $R$  hat eine gleichmäßig über ihre Oberfläche verteilte Ladung  $Q$ . Wie groß ist das Potenzial (relativ zum Unendlichen) innerhalb der Kugel? Das Potenzial innerhalb der Kugel entspricht demjenigen auf der Oberfläche der Kugel. Also gilt:

$$V_{c,\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} .$$

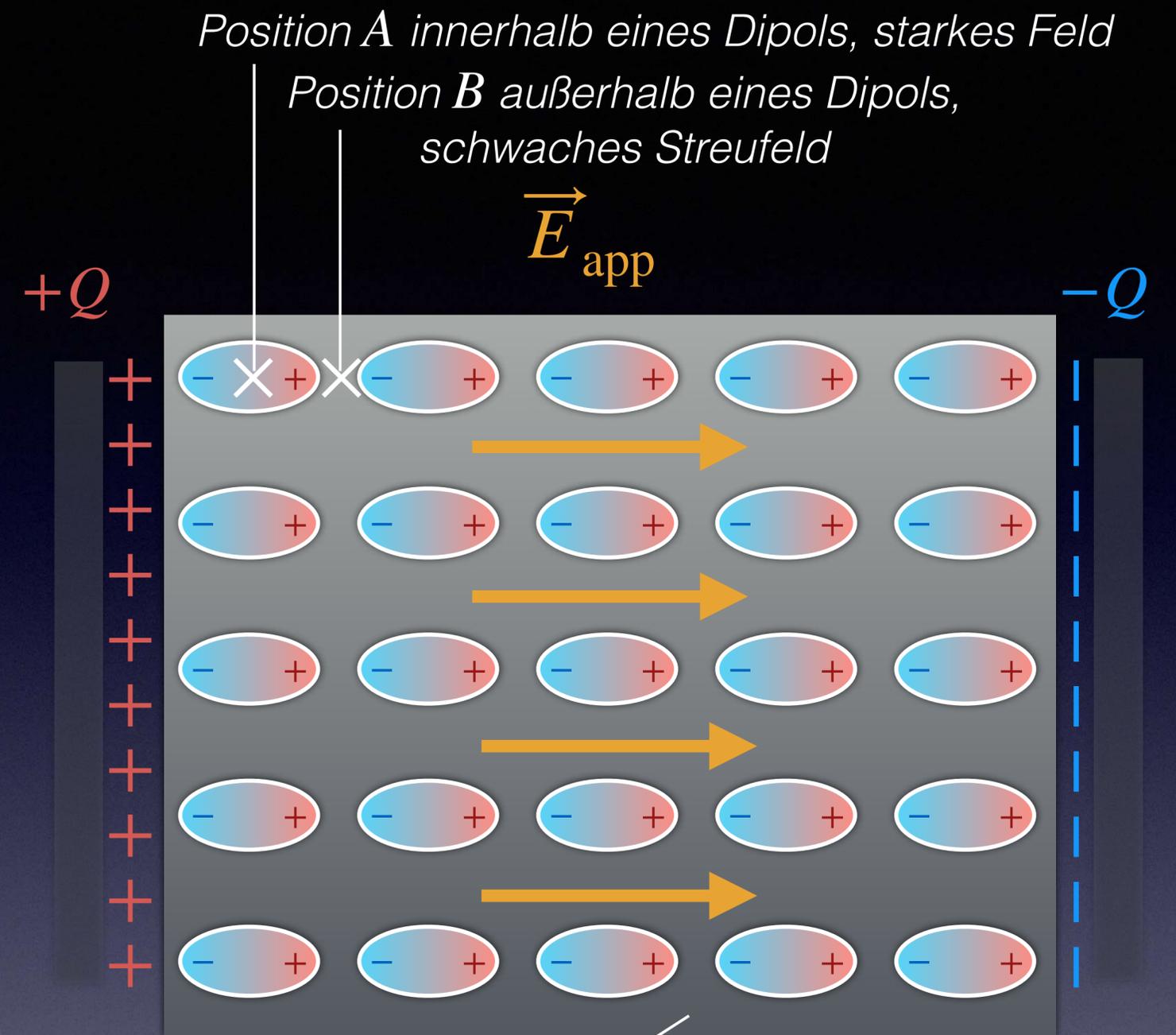
Diese Situation ist ein gutes Beispiel für die indirekte Beziehung zwischen Feld und Potenzial. Im Inneren der Kugel ist das elektrische Feld überall gleich Null, das elektrische Potenzial aber ungleich Null.

Wie wir in Kapitel 6 des Teils „*Moderne Mechanik*“ gesehen haben, muss die elektrische potenzielle Energie (und damit das Potenzial) bei großen Entfernungen gegen Null gehen, um die Anforderungen der Relativitätstheorie zu erfüllen. Dennoch sind wir oft nur an Differenzen des Potenzials oder der potenziellen Energie interessiert, und in diesem Fall können wir der Einfachheit halber einen anderen Nullpunkt wählen. Das ist genau so, als würde man für die Änderung der potenziellen Gravitationsenergie in der Nähe der Erdoberfläche  $\Delta V_g = \Delta (-GMm/r) \approx m \left| \vec{g} \right| y$  einen Nullpunkt an oder nahe der Erdoberfläche und nicht im Unendlichen auswählen.

# Potenzialdifferenzen in einem Isolator

Aus der Definition des Gleichgewichts und dem Vorhandensein eines „Meeres“ von beweglichen Elektronen in einem Metall konnten wir schließen, dass im Gleichgewicht das elektrische Feld überall im Inneren eines Metalls gleich Null ist. Daraus folgt, dass die Potenzialdifferenz zwischen zwei beliebigen Stellen in einem Metallobjekt im Gleichgewicht gleich Null sein muss.

Die Situation im Inneren eines polarisierten Isolators ist komplexer. Ein angelegtes Feld  $\vec{E}_{\text{app}}$ , z.B. das eines Kondensators, polarisiert die Moleküle im Isolator. Diese polarisierten Moleküle tragen ihrerseits zum Nettopfeld im Inneren des Materials bei, welches von Ort zu Ort variieren sollte, wie z.B. zwischen *A* und *B*.



Isolator mit durch das elektrische Feld  $\vec{E}_{\text{app}}$  des Kondensators polarisierten Molekülen.

$$\vec{E}_{\text{dip,int}} = ?$$



$B$

$A$

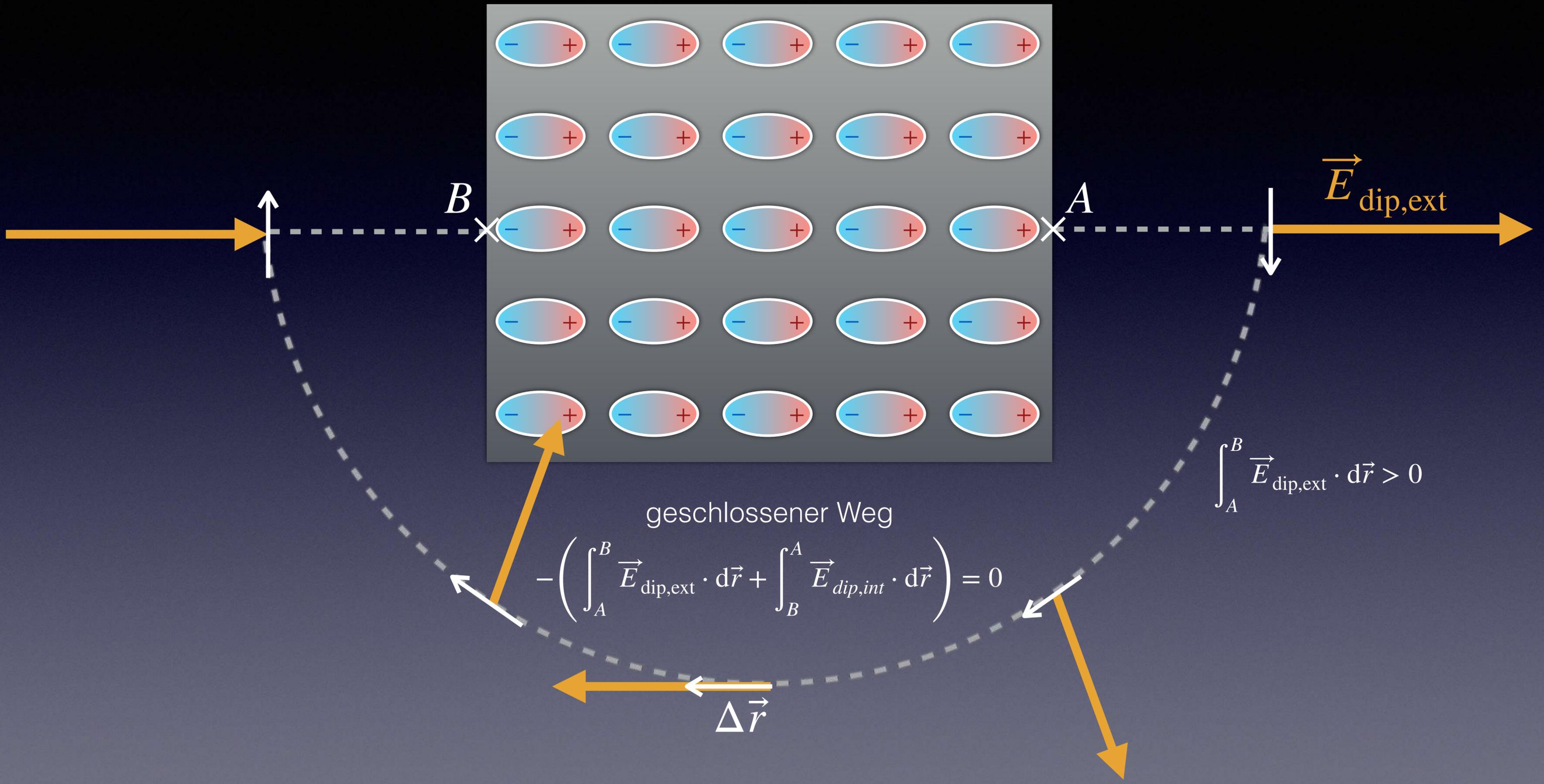
$$\vec{E}_{\text{dip,ext}}$$

$$\int_A^B \vec{E}_{\text{dip,ext}} \cdot d\vec{r} > 0$$

geschlossener Weg

$$-\left( \int_A^B \vec{E}_{\text{dip,ext}} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E}_{\text{dip,int}} \cdot d\vec{r} \right) = 0$$

$$\Delta \vec{r}$$

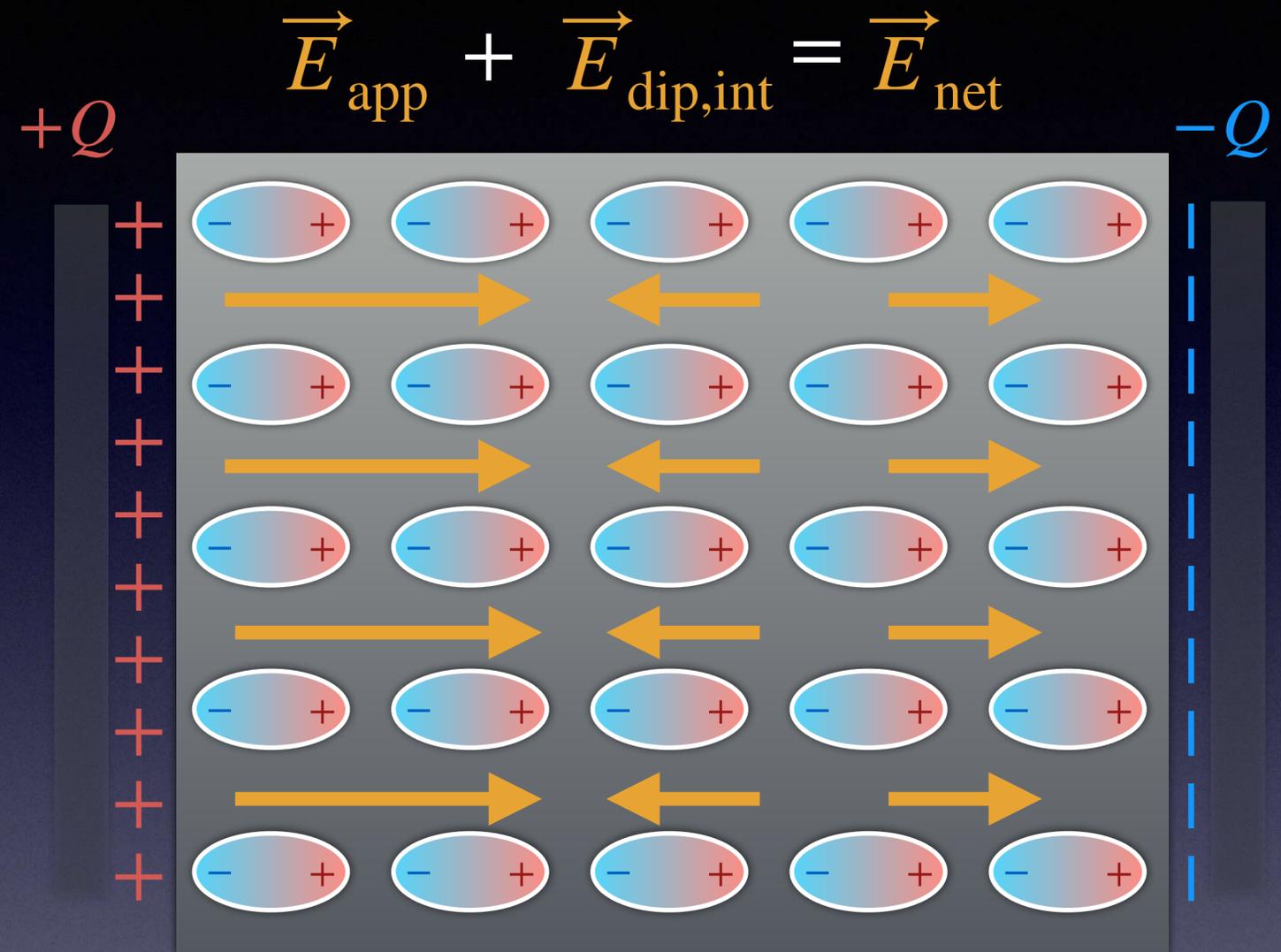


Da das Wegintegral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

entlang des geschlossenen Weges  $A \rightarrow B \rightarrow A$  Null sein muss, können wir hinsichtlich der Orientierung des internen elektrischen Feldes  $\vec{E}_{\text{dip,int}}$  unmittelbar ableiten, dass dieses von rechts nach links, also entgegen der Orientierung des Feldes des Kondensators, gerichtet sein muss. Diese sehr allgemeine Eigenschaft des elektrischen Feldes lässt uns also die Richtung des durchschnittlichen Feldes im Inneren des Isolators ableiten.

Das elektrische Nettopfeld  $\vec{E}_{\text{net}}$  im Isolator ist die Summe des Feldes  $\vec{E}_{\text{app}}$ , das von den Kondensatorplatten ausgeht, und des Feldes  $\vec{E}_{\text{dip,int}}$ , das von den induzierten Dipolen im Isolator ausgeht, welches, wie wir gerade gezeigt haben, in eine dem Kondensatorfeld entgegengesetzte Richtung zeigt. Das Nettopfeld innerhalb des Kunststoffes ist daher kleiner als das Feld des Kondensators allein. Qualitativ kann man sagen, dass das elektrische Feld im Inneren eines Isolators „geschwächt“ ist. Beachte, dass das Nettopfeld in dieselbe Richtung wie das von dem Kondensator erzeugte Feld geht, aber eine geringere Stärke aufweist.



Den Zusammenhang zwischen  $\vec{E}_{\text{app}}$  und dem Feld  $\vec{E}_{\text{net}}$  im Isolator (Dielektrikum) können wir wie folgt ausdrücken:

$$\vec{E}_{\text{net}} \equiv \frac{\vec{E}_{\text{app}}}{\epsilon_r} .$$

Darin ist  $\epsilon_r$  (dimensionslos) die Permittivitätszahl (früher relative Permittivität) des jeweiligen Materials. Für das Vakuum ist  $\epsilon_r = 1$ . Im Allgemeinen ist  $\epsilon_r$  ein Tensor zweiter Stufe (Richtungsabhängigkeit) oder gar eine komplexe Größe (Frequenzabhängigkeit). Für Luft gilt  $\epsilon_r = 1.00059$ . Stets gilt  $\epsilon_r \geq 1$ .

Weitere Werte: [https://de.wikipedia.org/wiki/Permittivität#Werte\\_für\\_ausgewählte\\_Materialien](https://de.wikipedia.org/wiki/Permittivität#Werte_für_ausgewählte_Materialien)

Da wir das Feld im Isolator nicht direkt messen können, bestimmen wir für einen bestimmten Isolator (Material) die Auswirkung auf die Potenzialdifferenz  $\Delta V_c$  zwischen den Platten bei einer bekannten Aufladung  $Q$  des Kondensators.

Wenn der Isolator den Spalt nicht ausfüllt, wird das elektrische Feld im Inneren des Isolators um den Faktor  $\epsilon_r$  verringert, aber das elektrische Feld an anderen Stellen im Spalt wird kaum beeinflusst, weil das elektrische Feld des Isolators an diesen Stellen im Vergleich zu dem von den Platten des Kondensators erzeugten Feld klein ist. Außerhalb des Kondensators ist dessen Streufeld jedoch sehr klein, und das kleine, vom Isolator herrührende Feld, reduziert dort das Nettopfeld erheblich.

# Kontrollpunkt 8

1. Ein Kondensator mit einem Abstand der Platten  $s = 3 \text{ mm}$  hat eine Potentialdifferenz von  $\Delta V_c = 6 \text{ V}$ . Eine Scheibe aus  $d = 1 \text{ mm}$  dickem Glas, deren Querschnittsfläche mit den Flächen der Kondensatorplatten übereinstimmt, hat eine relative Permittivität von  $\epsilon_r = 2,5$ . Die Glasplatte wird in der Mitte des Spalts zwischen den Metallplatten eingesetzt. (1) Wie groß ist nun die Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallplatten?

# Energiedichte und elektrisches Feld

Bisher haben wir Energie (d. h. die elektrische potenzielle Energie  $U_c$ ) mit wechselwirkenden geladenen Teilchen in Verbindung gebracht. Es gibt jedoch eine alternative Sichtweise, bei der die Energie in den elektrischen Feldern selbst gespeichert ist. Um zu sehen, wie sich diese Sichtweise quantitativ auswirkt, betrachten wir die Bewegung einer Platte eines Kondensators.

Die Kraft  $\vec{F}_c$ , die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt, ist gleich der Ladung  $Q$  auf der einen Platte multipliziert mit dem von der anderen Platte erzeugten Feld, das der Hälfte des Gesamtfeldes im Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten entspricht.

Feld im Kondensator (kleiner Abstand zwischen den Platten):

$$\left| E_{\text{tot}} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} .$$

Feld einer Platte:

$$\left| E_{\text{one}} \right| = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} .$$

Kraft der einen auf die andere Platte:

$$\left| F_c \right| = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{A} .$$

Externe Arbeit  $\Delta W_{\text{ext}}$ , die zum (langsamen) Verschieben der anderen Platte um die kleine Strecke  $\Delta s$  aufgewendet werden muss:

$$\Delta U_c = \Delta W_{\text{ext}} \approx \frac{1}{2} Q \left( \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \right) \Delta s .$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\Delta U_c \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \right)^2 A \Delta s , \text{ oder mit } \Delta V = A \Delta s$$

$$\Delta U_c \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 \left| \vec{E}_{\text{tot}} \right|^2 \Delta V .$$

$$\frac{\Delta U_c}{\Delta V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left| \vec{E}_{\text{tot}} \right|^2$$

Wir können also dem elektrischen Feld eine Energiedichte (in  $\text{J/m}^3$ ) zuschreiben. Durch das Auseinanderziehen der Kondensatorplatten haben wir das Raumvolumen vergrößert, in dem nun ein beträchtliches elektrisches Feld vorhanden ist. Wir sagen, dass **die von uns aufgewendete Energie in Energie umgewandelt wurde, die in dem elektrischen Feld gespeichert ist.**

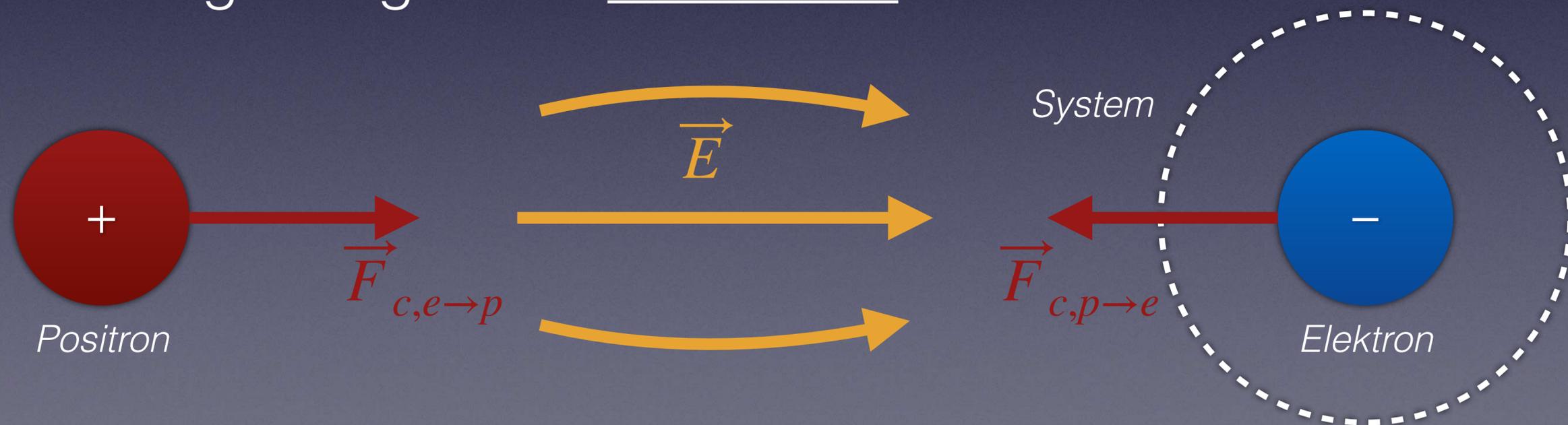
Diese Sichtweise ist äquivalent zu unserer früheren Sichtweise der elektrischen potenziellen Energie, aber sie erweist sich als grundlegendere Sichtweise. So lässt sich beispielsweise die Energie, die von elektromagnetischer Strahlung transportiert wird, die sich weit entfernt von Ladungen durch den Raum ausbreitet, am besten durch die mit dem Feld verbundene Energiedichte ausdrücken.

# Kontrollpunkt 9

1. Die Energiedichte im Inneren eines bestimmten Kondensators beträgt  $w = 10 \text{ J/m}^3$ . (1) Wie groß ist das elektrische Feld im Inneren des Kondensators? (2) Wie groß ist die Energiedichte bei einem elektrischen Feld von  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ? (groß genug, um einen Funken zu erzeugen)? (3) Welches Volumen müsste ein Kondensator haben, um bei einer Feldstärke von  $3,6 \times 10^5 \text{ V/m}$  eine Energie von  $1 \text{ kWh}$  speichern zu können. Anmerkung: Bei dem Tesla Model 3 können ca.  $75 \text{ kWh}$  in einem Lithium-Akku mit ca.  $480 \text{ kg}$  Gewicht gespeichert werden.

In Kapitel 6 des Teils „Moderne Mechanik“ haben wir den Grundsatz der Energieerhaltung folgendermaßen formuliert: Die Energieänderung eines Systems plus die Energieänderung seiner Umgebung muss gleich Null sein. Im folgenden Beispiel werden wir sehen, dass es für das Verständnis der Energieerhaltung in einer recht einfachen Situation notwendig ist, die Idee aufzugreifen, dass Energie in Feldern gespeichert wird.

Betrachten wir ein Elektron und ein Positron, die in einiger Entfernung voneinander aus der Ruhelage entlassen werden. Wir werden das Elektron als das System betrachten, so dass das Positron und alles andere im Universum die „Umgebung“ sind. Aufgrund der elektrischen Anziehungskraft zwischen den Teilchen beschleunigt das Elektron auf das Positron zu und gewinnt dabei an kinetischer Energie. Nach dem Grundsatz der Energieerhaltung muss die Energie der Umgebung daher abnehmen.



Allerdings steigt auch die Energie des Positrons an, da es sich auf das Elektron zubewegt und dabei an kinetischer Energie gewinnt. Es ist daher naheliegend, dass die in den Feldern um die beiden Teilchen gespeicherte Energie abnehmen muss. Es ist klar, dass sich das elektrische Feld an jedem Ort im Raum ändert, wenn sich die Positionen der Teilchen ändern. Das elektrische Feld in der Region zwischen den Teilchen wird größer, aber das elektrische Feld überall sonst im Raum nimmt ab (das Dipolfeld ist proportional zu  $s$ , dem Abstand zwischen den Teilchen). Mit

$$\Delta E_{\text{feld}} + \Delta E_{\text{kin,p}} + \Delta E_{\text{kin,e}} = 0 \text{ folgt}$$

$$\Delta E_{\text{feld}} = - \left( \Delta E_{\text{kin,p}} + \Delta E_{\text{kin,e}} \right) .$$

In diesem Beispiel führt uns der Grundsatz der Energieerhaltung direkt zu der Idee, dass Energie in elektrischen Feldern gespeichert sein muss, da es keine andere Möglichkeit gibt, die Energieabnahme in der Umgebung zu erklären.

Wenn wir das Elektron und das Positron als System gewählt hätten, hätten wir herausgefunden, dass die potentielle Energieänderung für das Zwei-Teilchen-System

$$\Delta U_{c,p\leftrightarrow e} = - \left( \Delta E_{\text{kin},p} + \Delta E_{\text{kin},e} \right)$$

die gleiche ist wie die Änderung  $\Delta E_{\text{feld}}$  der Feldenergie. In einem Mehrteilchensystem können wir entweder eine Änderung der potentiellen Energie oder eine Änderung der Feldenergie betrachten (aber nicht beides). Die Größen sind gleich.

Der Gedanke von in Feldern gespeicherter Energie ist von allgemeiner Natur. Nicht nur elektrische Felder sind Energieträger, sondern auch magnetische Felder und Gravitationsfelder.

Antworten  
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: (1)  $\Delta U_{\text{sys}} = -W_{\text{int}} = -\vec{F}_c \cdot \Delta \vec{r} = -e \vec{E} \Delta \vec{r}$ , Ergebnis:  
 $\Delta U_{\text{sys}} \approx -1.68 \times 10^{-18} \text{ J}$ . (2)  $\Delta E_{\text{kin,sys}} = -\Delta U_{\text{sys}}$ . (3)  
 $\frac{1}{2} m_p |\vec{v}_p|^2 \approx E_{\text{kin,sys}}$ ,  $|\vec{v}_p| \approx \sqrt{2E_{\text{kin,sys}}/m_p}$ , Ergebnis:  
 $|\vec{v}_p| \approx 4.48 \times 10^4 \text{ m/s}$ . (4)  $\Delta U_{\text{sys,e}} = -\Delta U_{\text{sys,e}}$ .

K2.1: (1)  $\Delta V_{c,B \rightarrow A} = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ , Ergebnis:  $\Delta V_{c,B \rightarrow A} = 300 \text{ V}$   
(2)  $\Delta U_{c,p} \approx +4.8 \times 10^{-17} \text{ J}$ . (3)  $\Delta U_{c,e} = -\Delta U_{c,p}$ . (4)  $0 \text{ V}$ . (5) und  
(6) jeweils  $0 \text{ J}$ .

K3.1: (1)  $\Delta V_c = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$ ,  $\vec{E} = -\Delta V_c / |\Delta \vec{r}| \hat{r}$ , Ergebnis:  
 $\vec{E} = \langle 0, -150, 0 \rangle$  N/C oder  $\vec{E} = \langle 0, -150, 0 \rangle$  V/m.

K4.1: (1) Von rechts nach links. (2) Positiv.

K4.2: (1) Von links nach rechts. (2) Negativ.

K5.1: (1)  $\Delta V_{c,A \rightarrow B} = -\left(\vec{E}_{\text{int}} \cdot \Delta \vec{r}_{\text{int}} + \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \Delta \vec{r}_{\text{ext}}\right)$ , Ergebnis:

$$\Delta V_{c,A \rightarrow B} = \left(-\langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0.04, 0, 0 \rangle - \langle -50, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0.02, 0, 0 \rangle\right) \text{ V},$$

$$\Delta V_{c,A \rightarrow B} = +1 \text{ V}. (2) \Delta V_{c,B \rightarrow A} = -\Delta V_{c,A \rightarrow B}.$$

K6.1:  $V_c = 1/(4\pi\epsilon_0) q/|\vec{r}|$ . (1)  $V_{c,C} \approx 14,4 \text{ V}$ ,  $V_{c,D} \approx 0,072 \text{ V}$ ,  
 $\Delta V_{c,C \rightarrow D} \approx -14,3 \text{ V}$ . (2)  $\Delta U_c = W_{\text{ext}} = -e\Delta V_{c,C \rightarrow D}$ . Ergebnis:  
 $W_{\text{ext}} \approx +2,29 \times 10^{-18} \text{ J}$ .

K7.1: Wir betrachten nur  $E_x$  auf der x-Achse. Kugel: Index 1. Platte: Index 2. Alle Angaben für  $x \geq 0$ . Ladungspolarisierung wird vernachlässigt.

$$E_{1,x} = 0 \text{ innerhalb und } E_{1,x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{x^2} \text{ außerhalb.}$$

$$E_{2,x} \approx -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q_2}{\pi R_2^2}.$$

Durch Superposition erhalten wir das Gesamtfeld  $E_{\text{int},x} = E_{2,x}$  innerhalb der Kugel und  $E_{\text{ext},x} = E_{1,x} + E_{2,x}$ .

$$\Delta V_c = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \equiv \Delta V_{c,\text{int}} + \Delta V_{c,\text{ext}}$$

$$\Delta V_{c,\text{int}} \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q_2}{\pi R_2^2} R_1$$

$$\Delta V_{c,\text{ext}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-Q_1}{R_1 + d} - \frac{-Q_1}{R_1} \right) + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q_2}{\pi R_2^2} d$$

$$\Delta V_c \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-Q_1}{R_1 + d} - \frac{-Q_1}{R_1} \right) + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q_2}{\pi R_2^2} (R_1 + d)$$

Betrachten wir kurz das Ergebnis

$$\Delta V_c \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-Q_1}{R_1 + d} - \frac{-Q_1}{R_1} \right) + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q_2}{\pi R_2^2} (R_1 + d) .$$

Wenn wir uns vom Zentrum der Kugel zur Platte hin, also in  $x$ -Richtung bewegen, wächst das Potenzial  $V_c$  an, da das (Netto-) Feld stets entgegen der  $x$ -Richtung orientiert ist. Somit ist das Vorzeichen des Ergebnisses plausibel.

$$\underline{\text{K8.1:}} \text{ (1) } \Delta V_c = \frac{6}{0.003} \left( 1 + \frac{1}{2.5} + 1 \right) \text{ V} = 4.8 \text{ V}.$$

$$\underline{\text{K9.1:}} \text{ (1) } \left| \vec{E} \right| \approx 1.5 \times 10^6 \text{ V/m. (2) } w \approx 39.8 \text{ J/m}^3. \text{ (3)}$$

$\Delta V \approx 6.3 \times 10^6 \text{ m}^3$ . Anmerkung: Das Ergebnis zeigt deutlich, weshalb wir unbedingt Batterien benötigen.

# Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

# Ende

*Folien zusammengestellt von Günther Lang*

Es folgt: Teil 5 - Magnetisches Feld