

Elektrische und magnetische Wechselwirkung

Teil 3

Elektrisches Feld verteilter Ladungen

ORCID

Connecting Research
and Researchers

Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- ein Integral aufstellen, um das elektrische Feld an einem beliebigen Ort aufgrund einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu berechnen;
- analytische Näherungen für das elektrische Feld verschiedener Ladungsverteilungen korrekt anzuwenden;
- eine numerische Berechnung des elektrischen Feldes an einem einzigen Ort aufgrund einer kontinuierlichen Ladungsverteilung durchzuführen.

In vielen realen Situationen ist die elektrische Ladung über die Oberfläche eines makroskopischen Objekts verteilt. Dieses Kapitel befasst sich mit mathematischen Techniken zur Addition der Beiträge zum elektrischen Feld einer sehr großen Anzahl von Punktladungen, die über große Flächen verteilt sind. Die allgemeinste Technik besteht darin, die Ladungsverteilung in eine große, aber endliche Anzahl von Teilen zu zerlegen, jedes Teil durch eine Punktladung zu approximieren und die Beiträge mit Hilfe eines Computerprogramms zu addieren („numerische Integration“). Hierbei sind die in VPython vorhandenen *Listen* sehr nützlich, um viele Punktquellen und Beobachtungspunkte in *Loops* verwenden zu können. Eine solche Berechnung kann ebenfalls von Hand durchgeführt werden, ist aber dann meistens recht mühsam.

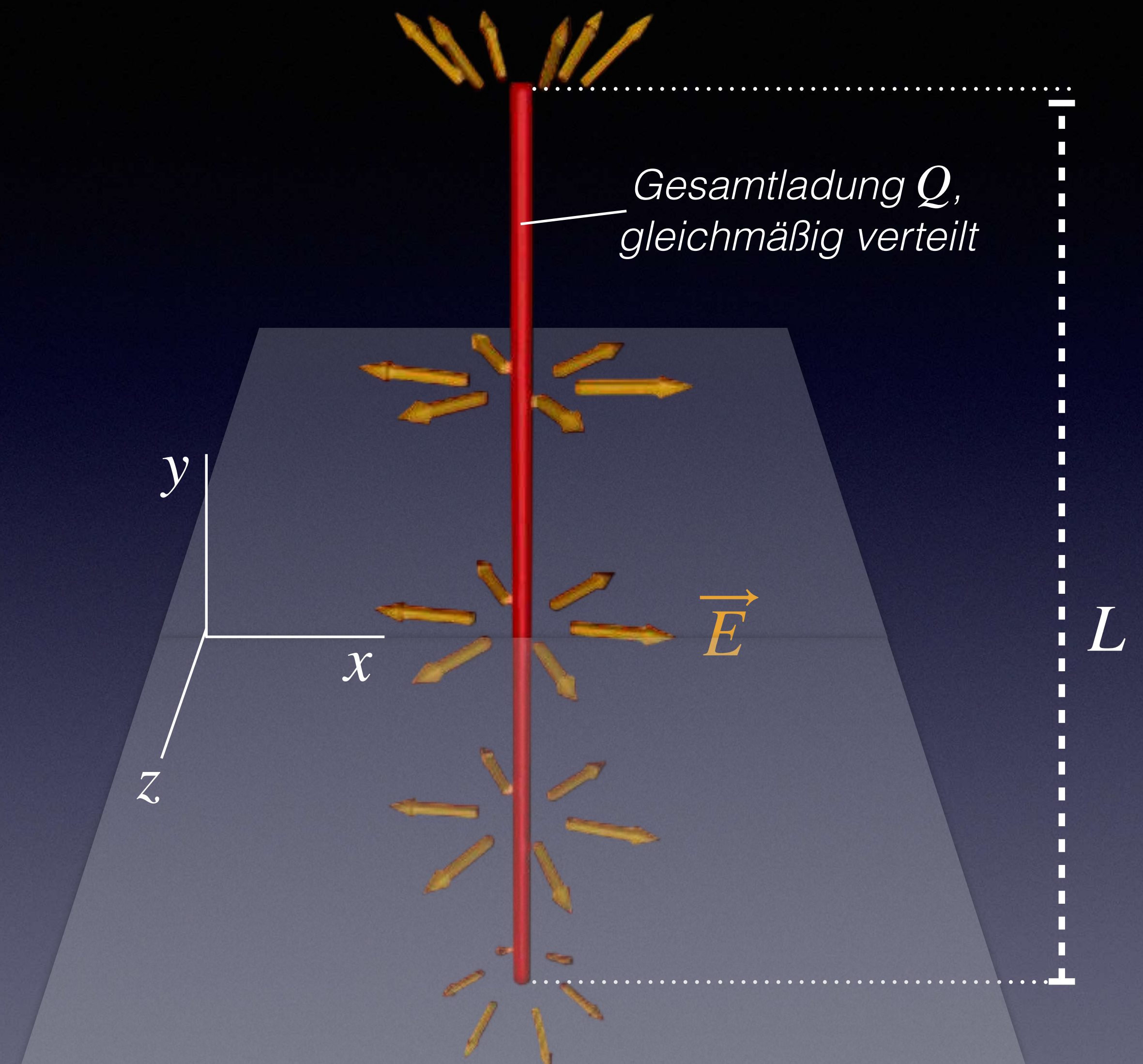
In einigen speziellen, aber wichtigen Fällen können wir eine analytische Lösung erhalten, indem wir die Integralrechnung anwenden, um die einzelnen Beiträge einer verteilten Ladung zu addieren. Wir können dies zum Beispiel für einige Positionen in der Nähe eines geladenen Stabes, Rings, einer Scheibe, eines Kondensators oder einer Kugel tun. Ein großer Vorteil des analytischen Ansatzes besteht darin, dass das Ergebnis zeigt, wie das Feld mit der Entfernung von der Ladungsverteilung variiert, was bei vielen Anwendungen wichtig ist. Diese Ergebnisse erweisen sich als flexibel verwendbar, da es oft möglich ist, gewöhnliche Objekte als Kombinationen von Kugeln, Stäben, Ringen und Scheiben zu modellieren und so ihre elektrischen Felder additiv (Superpositionsprinzip) abzuschätzen.

Übersicht

- Gleichmäßig geladener dünner Stab
- Ein gleichmäßig geladener 3/4-Hohlzylinder
- Ein gleichmäßig geladener dünner Ring
- Eine gleichmäßig geladene dünne Scheibe
- Zwei gleichmäßig geladene Scheiben: ein Kondensator
- Eine massive Kugel, die in ihrem gesamten Volumen homogen geladen ist
- Infinitesimalrechnung und Integrale in der Wissenschaft
- Numerische Integration mit einem Computer
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

Gleichmäßig geladener dünner Stab

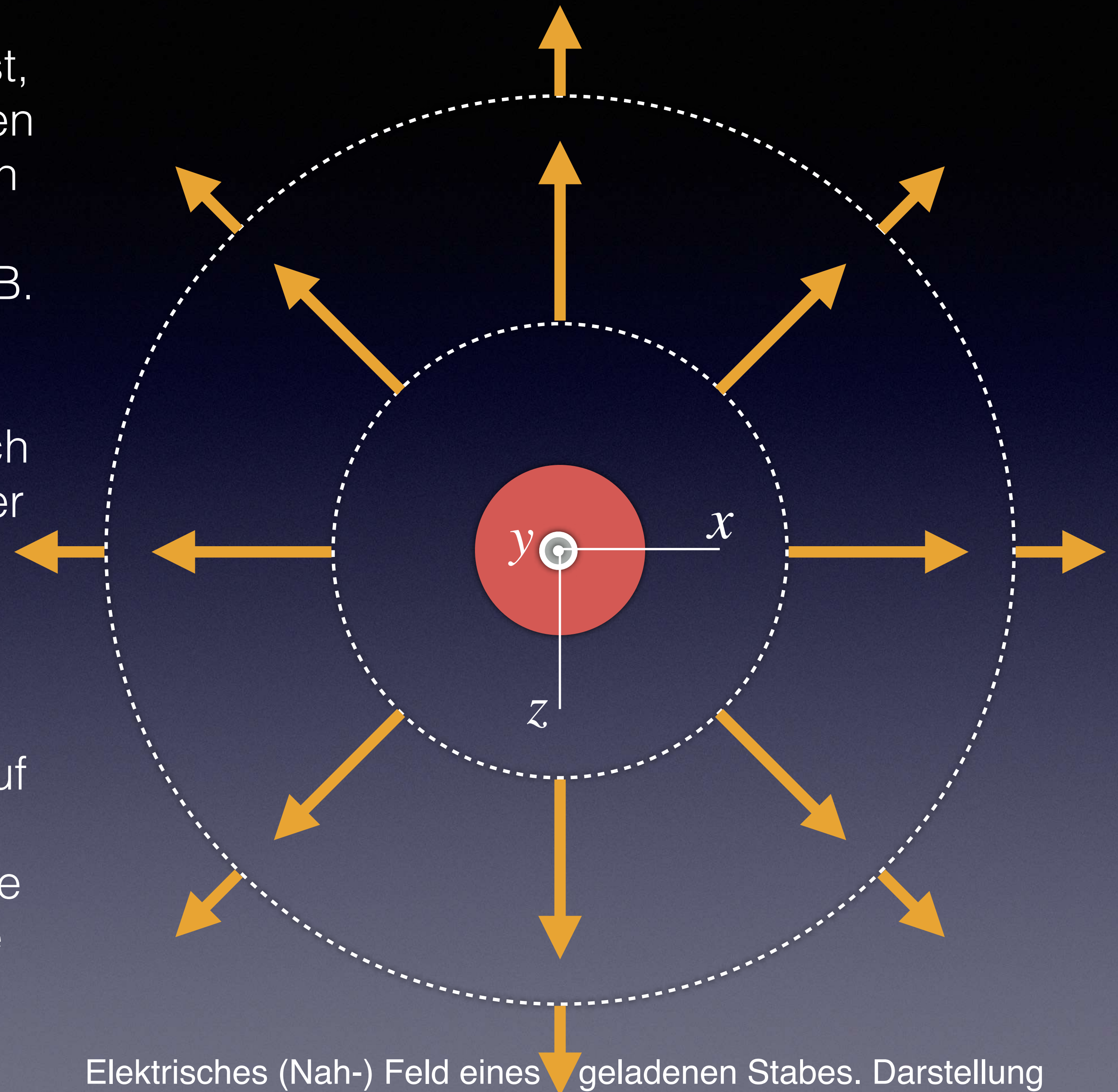
Als Beispiel für die Berechnung des elektrischen Feldes \vec{E} aufgrund einer großen Anzahl von Ladungen betrachten wir das elektrische Feld eines gleichmäßig geladenen dünnen Stabes (siehe nebenstehende Abbildung). Bei dem Stab könnte es sich beispielsweise um einen Metallstab handeln, der auf seiner Oberfläche eine nahezu gleichmäßige Verteilung positiver Ladungen aufweist. Wir betrachten einen dünnen Stab mit einer Länge L und einer positiven Gesamtladung Q . Zur Veranschaulichung des Vorgangs wählen wir einen Beobachtungsort auf der Mittelebene des Stabes (xz-Ebene senkrecht zum Stab), wodurch die Berechnung des elektrischen Feldes vereinfacht wird.



Das elektrische Feld in der Nähe eines positiv geladenen Stabes. In der Nähe der Mitte des Stabes liegen die Vektoren des elektrischen Feldes in der xz-Ebene senkrecht zum Stab.

Bevor du dich an die Berechnung machst, überlege, welches Muster des elektrischen Feldes du um einen Stab herum erwarten würdest. Wie würde es aussehen, wenn man das Feld vom Stabende aus, also z.B. in $-y$ -Richtung blickend, betrachtet?

Das Feld einer Punktladung war sphärisch symmetrisch. Da ein Stab wie ein Zylinder geformt ist, sollten wir eine zylindrische Symmetrie des elektrischen Feldes für einen gleichmäßig geladenen Stab erwarten (eine Rotation des Stabes um seine Längsachse bleibt ohne Einfluss auf das Feld). Wenn wir einen Schnitt senkrecht zum Stab in der Nähe der Mitte des Stabes machen, sollte das Feld wie nebenstehend dargestellt aussehen.



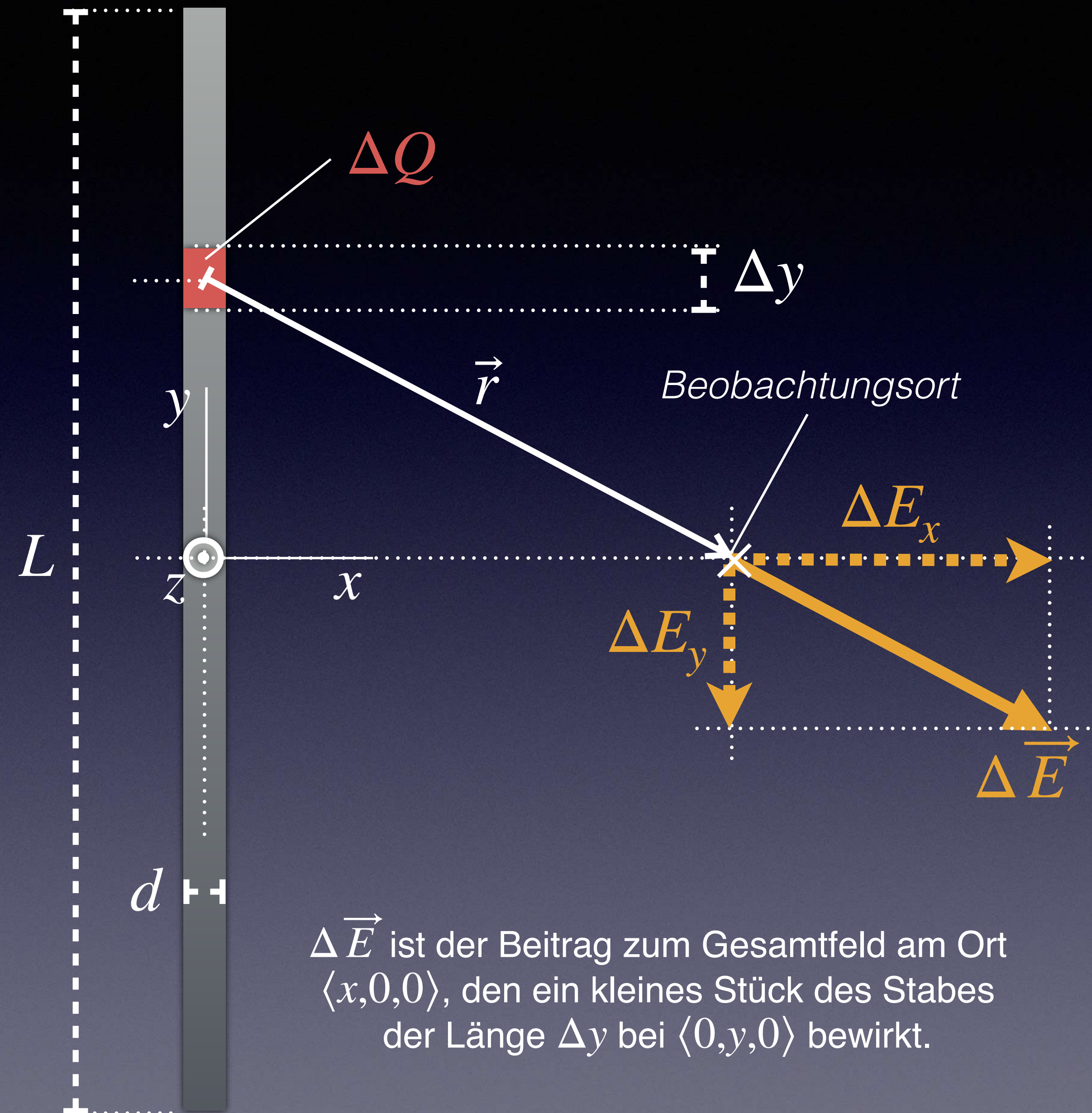
Elektrisches (Nah-) Feld eines geladenen Stabes. Darstellung des Feldes in der xz -Ebene in der Mitte des Stabes.

Die Bestimmung des elektrischen Feldes aufgrund einer über ein makroskopisches Objekt verteilten Ladung erfolgt in vier Schritten:

1. Teile das geladene Objekt in kleine Stücke. Erstelle eine Grafik und zeichne das elektrische Feld $\Delta \vec{E}$, das von einem der Teile erzeugt wird.
2. Wähle einen Ursprung und Achsen. Ermittle einen algebraischen Ausdruck für das elektrische Feld $\Delta \vec{E}$ durch ein (Teil-) Stück des Objekts.
3. Addiere die Beiträge aller Teile, entweder numerisch oder symbolisch (analytische Lösung).
4. Prüfe, ob das Ergebnis physikalisch plausibel ist (Symmetrie, Näherungen für Nah- und Fernfeld).

Wir wenden dieses Verfahren an, um das elektrische Feld eines gleichmäßig geladenen dünnen Stabes an einer Stelle der xz -Ebene (Symmetrieebene) zu bestimmen.

Zur Anwendung des Superpositionsprinzips stellen wir uns vor, dass wir den dünnen Stab in sehr kurze Abschnitte Δy mit jeweils positiver Ladung ΔQ zerschneiden, wie nebenstehend dargestellt. ΔQ ist ein kleiner Teil der Gesamtladung Q des Stabes, der zum Nettopfeld \vec{E} am Beobachtungsort den Beitrag $\Delta \vec{E}$ liefert. Wir können das Stück so behandeln, als wäre es eine Punktladung, was eine recht gute Näherung sein sollte, solange $\Delta y \ll |\vec{r}|$ ist und die Dicke d des Stabes ebenfalls gegenüber $|\vec{r}|$ vernachlässigt werden kann.



Die Koordinaten $\vec{r}_o = \langle x, 0, 0 \rangle$ des Beobachtungsortes sollen beibehalten werden. Allerdings müssen wir über alle Teile des Stabes summieren (integrieren), also sollten die Koordinaten $\vec{r}_s = \langle 0, y, 0 \rangle$ des kurzen Abschnitts des Stabs variiert werden. In dem Ausdruck, den wir integrieren wollen, tauchen Variablen auf, die den Ort des Stabsegments darstellen; sie werden „Integrationsvariablen“ genannt und verschwinden, nachdem wir die Integration durchgeführt haben. Für \vec{r} , $|\vec{r}|$ und \hat{r} erhalten wir:

$$\vec{r} = \vec{r}_o - \vec{r}_s = \langle x, -y, 0 \rangle ; \quad |\vec{r}| = (x^2 + y^2)^{1/2} ;$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \langle x, -y, 0 \rangle .$$

Für den Beitrag $\Delta \vec{E}$ der Ladung ΔQ können wir schreiben:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \langle x, -y, 0 \rangle .$$

Oder komponentenweise für $\Delta \vec{E}$:

$$\Delta E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\Delta Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \Delta E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-y\Delta Q}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \Delta E_z = 0 .$$

Welche Größen sind Konstanten und welche Variablen in den Ausdrücken für ΔE_x und ΔE_y ? Als Variable ist y einfach zu identifizieren, da sie für jeden Abschnitt Δy unterschiedlich ist. Ferner müssen wir die Ladung ΔQ in Abhängigkeit von y ausdrücken. Der Stab ist gleichmäßig mit einer Gesamtladung Q (positiv oder negativ) geladen, so dass die Ladungsmenge ΔQ auf einem Abschnitt Δy gleich

$$\Delta Q = \frac{Q}{L} \Delta y$$

ist. Q/L ist darin die konstante Ladungsdichte in C/m des Stabes.

Mit dem Ergebnis aus der vorangehenden Folie erhalten wir:

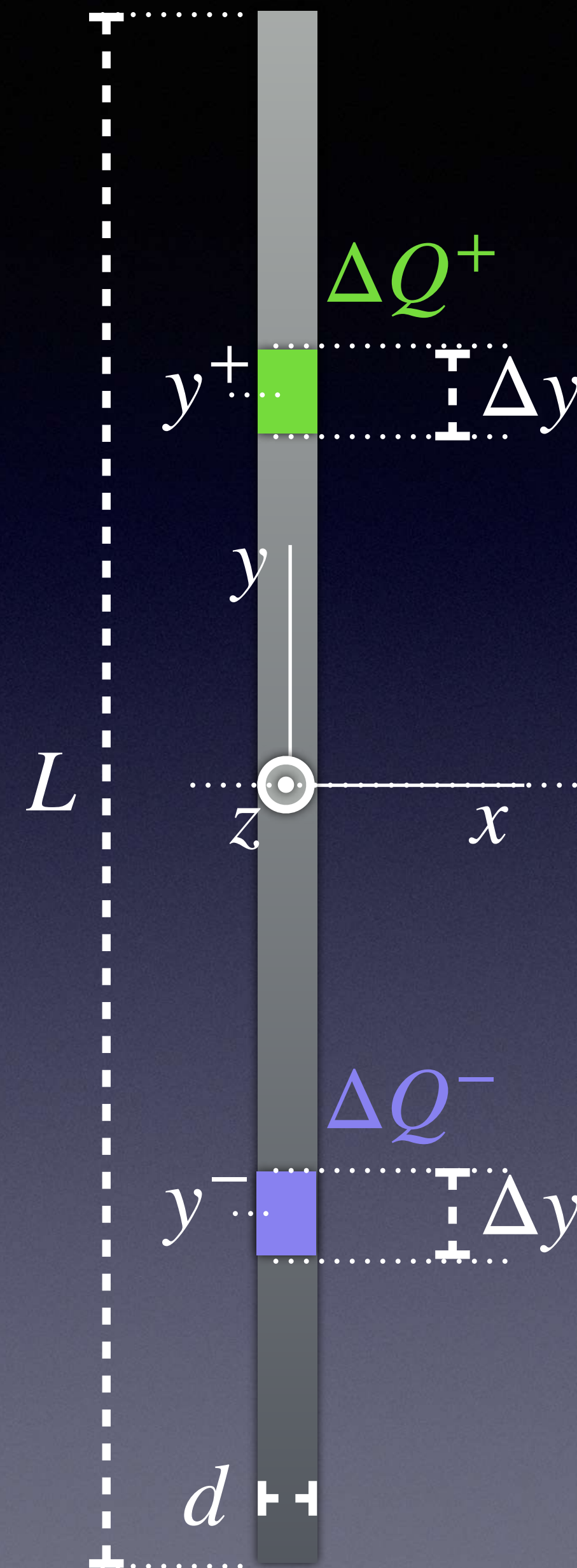
$$\Delta E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Delta y, \text{ und}$$

$$\Delta E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Delta y.$$

Damit verbleibt als einzige Variable y mit ihrer kleinen Änderung Δy .

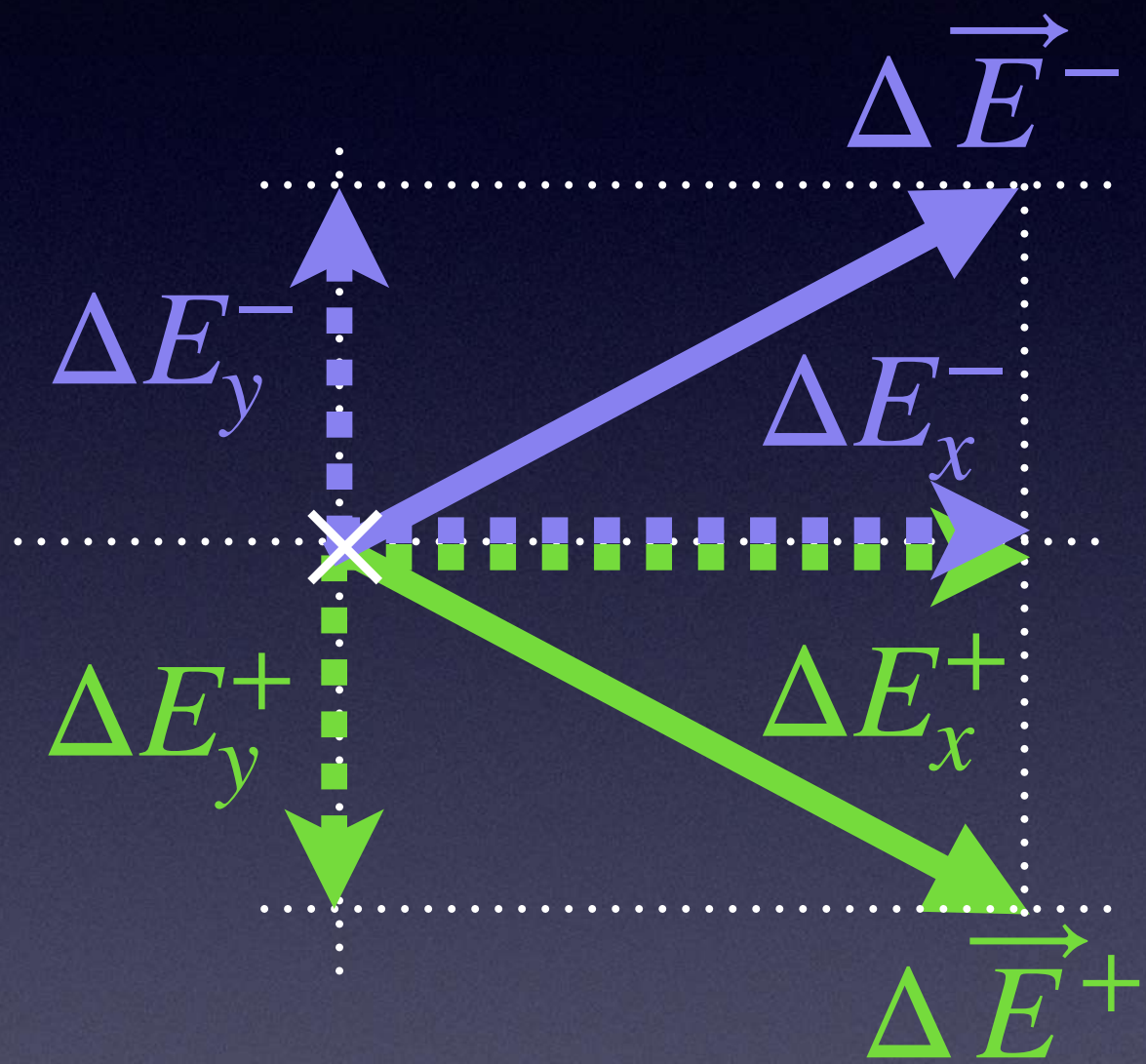
Bevor wir die eigentliche Summation durchführen, sollten wir uns überlegen, was wir als Ergebnis erwarten.

Da wir einen Beobachtungsort in der Mittelebene des Stabes gewählt haben, erwarten wir aus Gründen der Symmetrie, dass die Komponente E_y des elektrischen Feldes \vec{E} Null ist, wie aus der nebenstehenden Abbildung abgelesen werden kann.



$$|y^+| = |y^-|$$

$$\Delta Q^+ = \Delta Q^-$$



$$\Delta E_x^+ = \Delta E_x^-$$

$$\Delta E_y^- = -\Delta E_y^+$$

$$\Delta \vec{E} = \langle E_x^+ + E_x^-, 0, 0 \rangle$$

Die Komponenten E_x und E_y können wir wie folgt berechnen:

$$E_x = \sum_i \Delta E_{x,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \sum_i \frac{x}{(x^2 + y_i^2)^{3/2}} \Delta y_i, \text{ und}$$

$$E_y = \sum_i \Delta E_{y,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \sum_i \frac{-y_i}{(x^2 + y_i^2)^{3/2}} \Delta y_i.$$

Nun müssen wir entscheiden, wie wir diese Terme addieren wollen. Die einzelnen Summanden sind i.d.R. verschieden, allerdings können wir alle Abschnitte $\Delta y_i \equiv \Delta y$ gleich lang machen und Δy vor die Summe ziehen.

Eine Möglichkeit wäre, den Stab in zehn Abschnitte zu unterteilen, den Beitrag jedes Abschnitts zu berechnen und diese zehn Ergebnisse jeweils zu addieren. Natürlich wäre das nur ein angenähertes Ergebnis, weil jeder Abschnitt nicht wirklich als Punktquelle betrachtet werden kann, aber für viele Zwecke dürfte das ausreichen.

Nebenstehend siehst du das tabellarische Ergebnis für zehn Abschnitte mit $L = 1 \text{ m}$, $\Delta y = 0.1 \text{ m}$, $Q = 1 \text{ nC}$ und $x = 0.05 \text{ m}$. Wie erwartet, ist die Summe der Komponenten $\Delta E_{y,i}$ gleich Null.

y in m	$E_{x,i}$ in N/C	$E_{y,i}$ in N/C
0,45	0,484	-4,363
0,35	1,018	-7,127
0,25	2,715	-13,577
0,15	11,384	-34,153
0,05	127,279	-127,279
-0,05	127,279	127,279
-0,15	11,384	34,153
-0,25	2,715	13,577
-0,35	1,018	7,127
-0,45	0,484	4,363
<i>Summe</i>	285,764	0,000

Es wäre möglich, ein genaueres Ergebnis zu erhalten, indem man den Stab in weit mehr als zehn Abschnitte unterteilt, aber das ist natürlich bei Berechnungen von Hand mühsam. Die in der Tabelle zusammengefassten Ergebnisse zeigen, dass wir für zehn Abschnitte ein ungenaues Ergebnis erhalten haben. Die Verwendung von mehr als fünfzig Abschnitten macht, bei drei Stellen nach dem Komma, allerdings keinen Unterschied mehr.

Die Genauigkeit hängt i.W. davon ab, wie gut die Näherung ist, einen Abschnitt als Punktladung zu betrachten. Bei fünfzig Teilen ist jedes nur 2 cm lang, und ist damit kürzer als der Abstand $x = 5\text{ cm}$ des Beobachtungspunkts vom Stab.

Abschnitte	E_x in N/C
10	285,764
20	353,764
50	358,214
100	358,214

Ein großer Nachteil der numerischen Addition der Beiträge $\Delta E_{x,i}$ und $\Delta E_{y,i}$ ist, dass wir keine analytische (algebraische) Form für das elektrische Feld erhalten. Das bedeutet, dass wir Fragen wie „*Wie ändert sich das elektrische Feld in der Nähe eines Stabes?*“ nicht einfach beantworten können. Für eine Punktladung wissen wir, dass das Feld sich proportional zu $1/|\vec{r}|^2$ ändert, und weit entfernt von einem permanenten Dipol proportional zu $1/|\vec{r}|^3$. Gibt es eine Möglichkeit, die Summation durchzuführen, um eine analytische und nicht eine numerische Antwort für den Stab zu erhalten? Genau dafür wurde die Integralrechnung „erfunden“.

Der Schlüsselgedanke der Integralrechnung, der auf Probleme wie das unsere angewandt wird, besteht darin, sich vorzustellen, dass man nicht 10, 20, 50 oder 100 Abschnitte nimmt, sondern eine unendliche Anzahl von infinitesimalen Abschnitten. Wir lassen die Anzahl der Abschnitte unbegrenzt ansteigen, und die entsprechende Länge Δy eines Abschnitts zu (fast) Null hin abnehmen:

$$E_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} x \sum_i \frac{1}{(x^2 + y_i^2)^{3/2}} \Delta y .$$

Dieser Grenzwert wird als „bestimmtes Integral“ bezeichnet:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} x \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy .$$

Das Integralzeichen \int ist ein verzerrtes S, das für Summation steht, so wie das griechische Sigma Σ für Summation steht. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, dass du dir ein Integral als eine Summe (unendlich) vieler Beiträge vorstellst.

Die Integrationsvariable reicht von $y = -L/2$ bis $y = +L/2$, den Grenzen des bestimmten Integrals, oder Anfang und Ende des Stabes. Wenn du ein entsprechend beschriftetes Diagramm gezeichnet hast, solltest du die richtigen Grenzen für y daraus ablesen können.

Die (kleine) Länge Δy hat sich in ein „infinitesimales“ Inkrement dy verwandelt, das im Integranden erscheinen muss. Genau deshalb muss Δy in dem algebraischen Ausdruck für den Beitrag eines Abschnitts zum elektrischen Feld unbedingt vorhanden sein.

Der größte Teil „Physik“ bei diesem Problem bestand darin, das Integral aufzustellen. Die Auswertung des Integrals ist „nur“ Mathematik. In diesem speziellen Fall ist das Integral eher schwierig. Man findet das Ergebnis entweder in Tabellen von mathematischen Handbüchern, oder man kann ein Programm wie *Maple* oder *Mathematica* verwenden. Das Ergebnis lautet:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} x \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-L/2}^{+L/2},$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2x}\right)^2}}.$$

Die y -Komponente des elektrischen Feldes kann ebenfalls durch Integration ermittelt werden.

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy ,$$

$$E_y = 0 .$$

In diesem Fall ist das Ergebnis (erwartungsgemäß) gleich Null

Da es bei unserem Vorgehen viele Möglichkeiten gibt, Fehler zu machen, ist es äußerst wichtig, das Ergebnis auf unterschiedliche Weise zu überprüfen. Verschiedene Tests geben Aufschluss über verschiedene Arten von möglichen Fehlern.

Ist die Richtung qualitativ korrekt? Das elektrische Feld zeigt senkrecht vom Mittelpunkt des Stabes weg, was angesichts der Symmetrie der Situation richtig ist.

Hat das Ergebnis die richtige Einheit? Die Einheit sollte dieselbe sein wie für das elektrische Feld einer Punktladung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r}.$$

Dies ist der Fall, da in

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2x}\right)^2}}$$

der letzte Quotient dimensionslos ist.

Sehen wir uns das Ergebnis jetzt für einen Spezialfall an, für den wir die Antwort bereits kennen. Wenn x sehr viel größer als L ist, sollte das Feld E_x des Stabes näherungsweise wie das einer Punktladung aussehen. Tut es das?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2x}\right)^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} .$$

Ja, die Feldstärke nimmt für $x \gg L$ quadratisch mit dem Abstand ab, ganz wie für eine Punktladung.

Vergleich mit numerischer Berechnung: Einige Folien früher haben wir eine numerische Berechnung für den Fall eines homogen geladenen Stabes durchgeführt. Für fünfzig Abschnitte erhielten wir $E_x = 358,214 \text{ N/C}$. Mit Hilfe der analytischen Lösung erhalten wir für dieselbe Situation $E_x = 358,213 \text{ N/C}$. Die Ergebnisse sind zueinander konsistent, was zwar kein Beweis für deren (absolute) Richtigkeit ist, uns aber zeigt, dass wir sehr wahrscheinlich das korrekte Ergebnis erhalten haben.

Ähnliche Techniken können zur Überprüfung einer am Computer durchgeführten numerischen Integration verwendet werden. Setze beispielsweise für die Länge des Stabes einen sehr kleinen Wert und für den Abstand einen sehr großen Wert ein. Die numerische Integration sollte ein Ergebnis liefern, das dem entspricht, das du bei Handrechnung für eine Punktladung ermittelst.

Kontrollpunkt 1

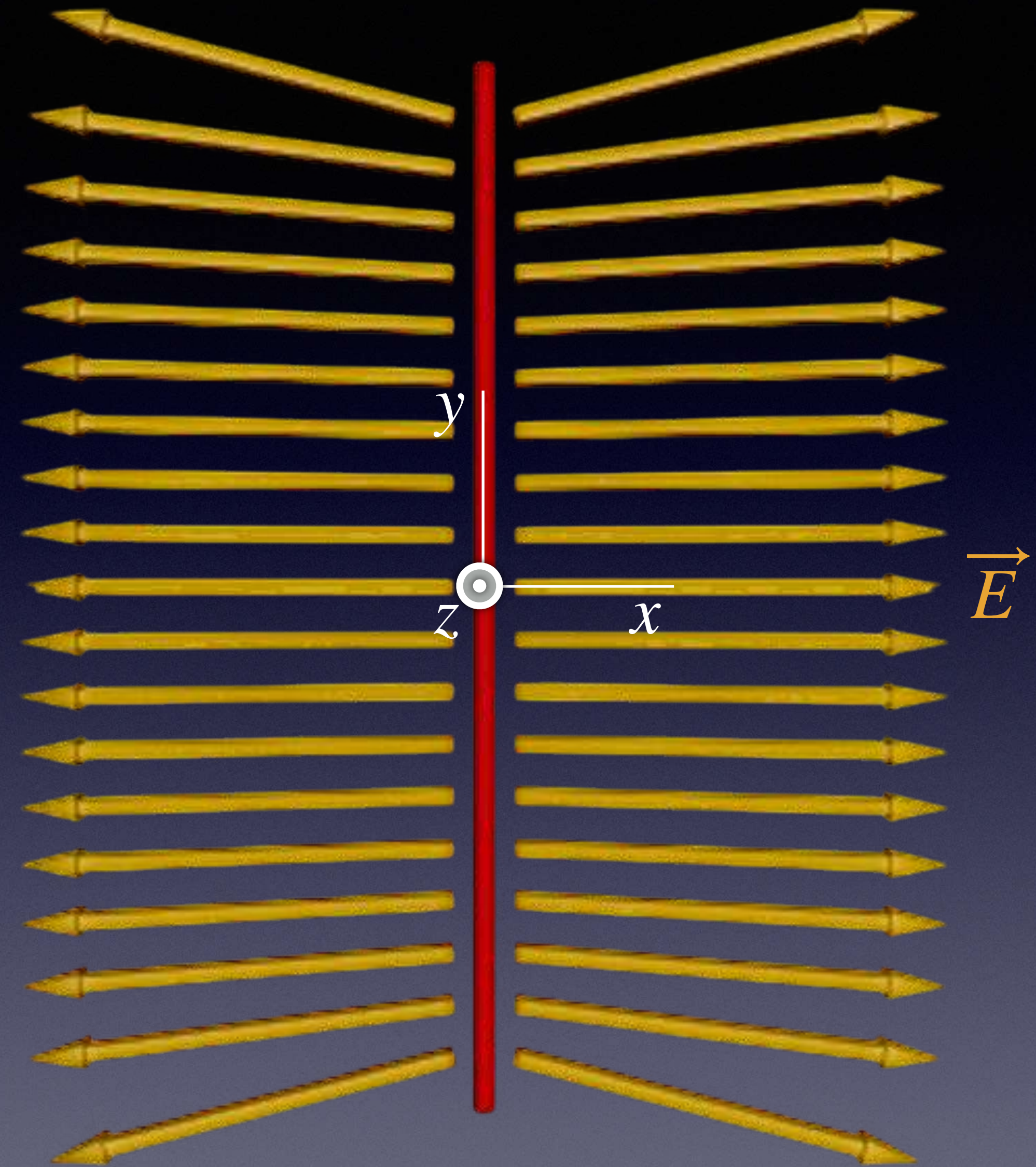
1. Auf einem dünnen Stab der Länge $L = 0.4 \text{ m}$ befinde sich die Gesamtladung $Q = 2.5 \text{ nC}$. (1) Wie groß ist E_x in der Mittelebene des Stabes für einen senkrechten Abstand $x = 1 \text{ cm}$?

Ein sehr wichtiger Sonderfall, auf den wir häufig zurückgreifen werden, ist der Fall eines sehr langen Stabes (oder eines Stabes, der sich sehr nahe am Beobachtungsort befindet). In beiden Fällen gilt $L \gg x$. Wir erhalten für E_x


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2x}\right)^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{L} \frac{1}{x}.$$

Wir sehen, dass für $x/L \ll 1$ die Feldstärke linear proportional zur Entfernung x abfällt, also langsamer als bei einer Punktladung.

Obwohl wir das auf der vorangehenden Folie dargestellte Ergebnis nur für Beobachtungspositionen in senkrechtem Abstand von der Mitte des Stabes bewiesen haben, ist das Ergebnis tatsächlich eine gute Näherung für alle Orte entlang des gesamten Stabes, solange man sich nicht zu nahe an dessen Enden befindet. In der nebenstehenden Abbildung, die das Ergebnis einer numerischen Integration ist, sehen wir, dass entlang des zentralen Bereichs des Stabes \vec{E} kaum variiert.



Ergebnis einer numerischen Integration des elektrischen Feldes in der Nähe eines gleichmäßig positiv geladenen Stabes.

A photograph of a power line tower at night. The tower is illuminated by a bright light source, possibly a street lamp, creating a strong glow. From the tower, a long, thin wire extends to the right. A bright, branching, and somewhat chaotic glow emanates from the wire, resembling a tree or a complex network of thin lines. This glow is the corona discharge, which makes the electric field visible. The background is dark, and the overall scene is captured in a low-light, high-contrast setting.

Koronaentladung an einem langen Draht macht das elektrische Feld „sichtbar“.
In der Natur wird das Phänomen vor allem bei Gewittern als **Elmsfeuer** bezeichnet und tritt dort beispielsweise an Schiffsmasten oder Turmspitzen auf.

Exkurs: Das Gravitationsfeld \vec{g} eines sehr dünnen Stabes mit konstanter Dichte hätten wir in genau derselben Weise wie für das elektrische Feld herleiten können. Wir ersetzen dabei $(Q/L) \Delta y$ durch $(M/L) \Delta y$, mit Gesamtmasse M des Stabes, und erhalten

$$g_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -G \frac{M}{L} x \sum_i \frac{1}{(x^2 + y_i^2)^{3/2}} \Delta y ,$$

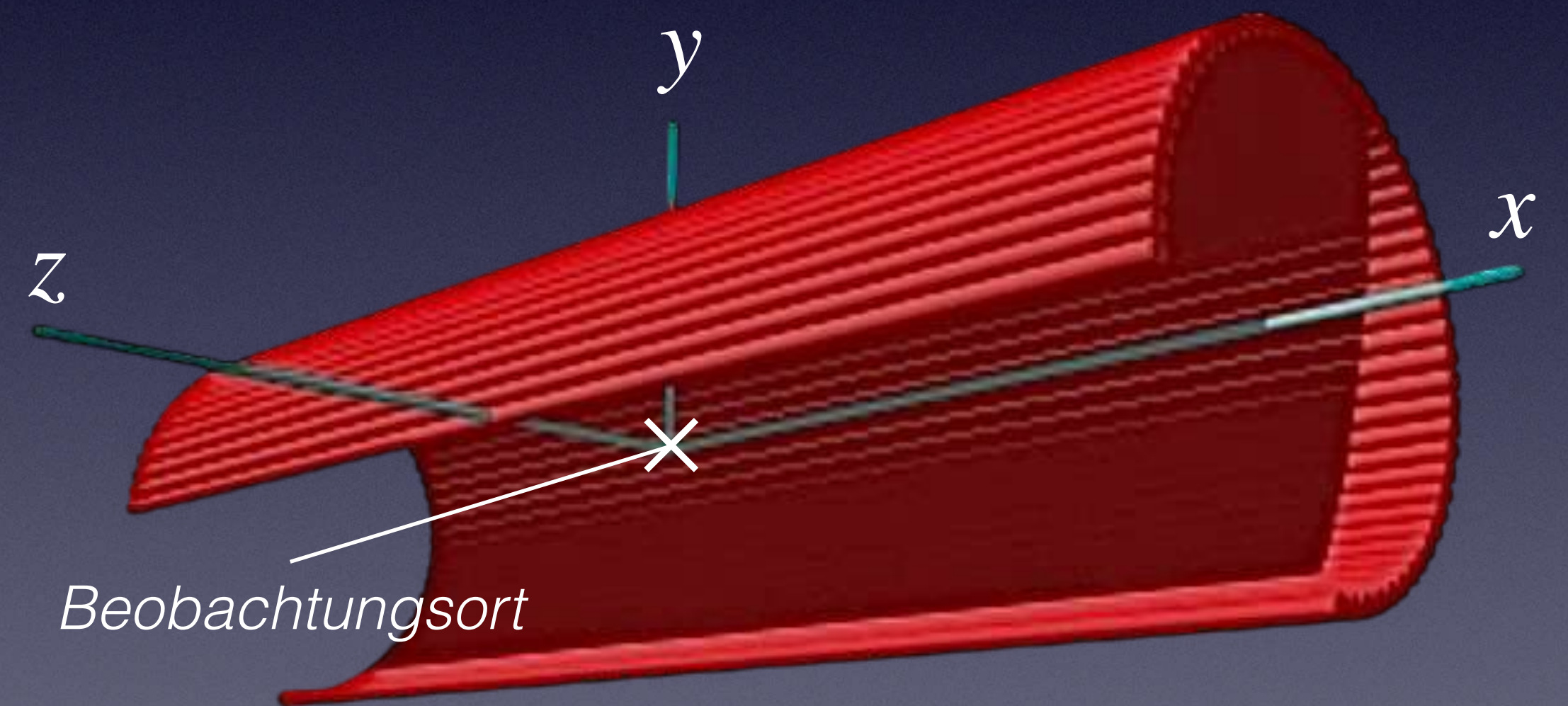
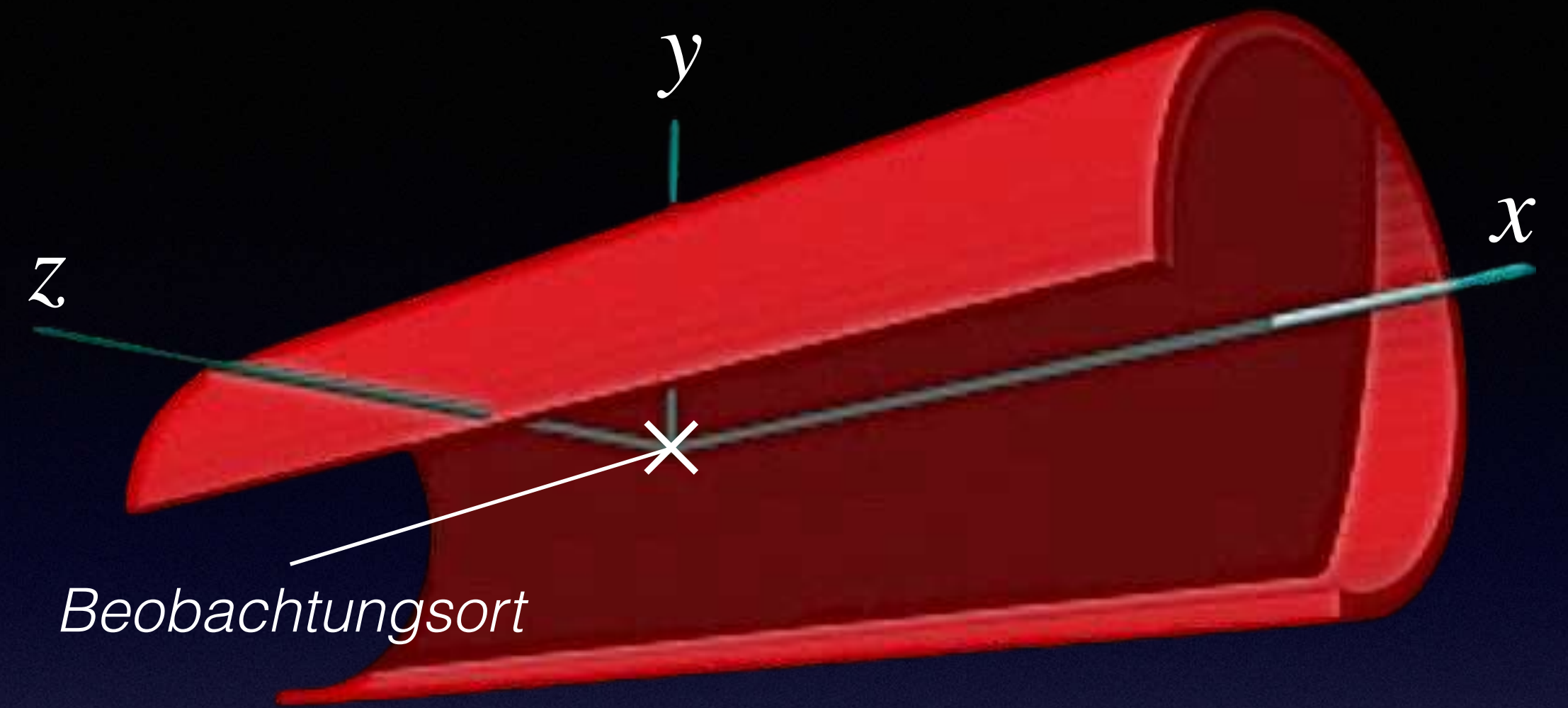
$$g_x = -G \frac{M}{L} x \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy .$$

Übrigens: Für ein 3D-Objekt würde man $(M/V) \Delta x \Delta y \Delta z \equiv \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ benutzen.

Ein gleichmäßig geladener
 $3/4$ -Hohlzylinder

Ein 3/4-Hohlzylinder (siehe nebenstehende Abbildung) trägt eine positive Ladung Q , die gleichmäßig über seine Oberfläche verteilt ist. Der Radius des Zylinders ist R , und seine Länge ist L , wobei $L \gg R$ ist. Berechne das elektrische Feld in der Mitte (Beobachtungsort) des Zylinders.

Da wir das elektrische Feld in der Nähe des Zentrums eines langen Stabes kennen, können wir den Zylinder als aus vielen dünnen geladenen Stäben bestehend betrachten. Wir legen den Ursprung an den Beobachtungsort. Jeder Stab soll $\Delta \vec{E}$ zum Gesamtfeld beitragen.



Oben: Ein geladener Hohlzylinder. Der Beobachtungsort befindet sich in der Mitte des Zylinders. Unten: Wir können uns den Zylinder als aus einer großen Anzahl sehr dünner geladener Stäbe zusammengesetzt vorstellen.

Für die Vektoren \vec{r} und \hat{r} können wir mit Hilfe von R und θ wie folgt schreiben:

$$\vec{r} = R \langle 0, -\sin \theta, -\cos \theta \rangle \text{ und}$$

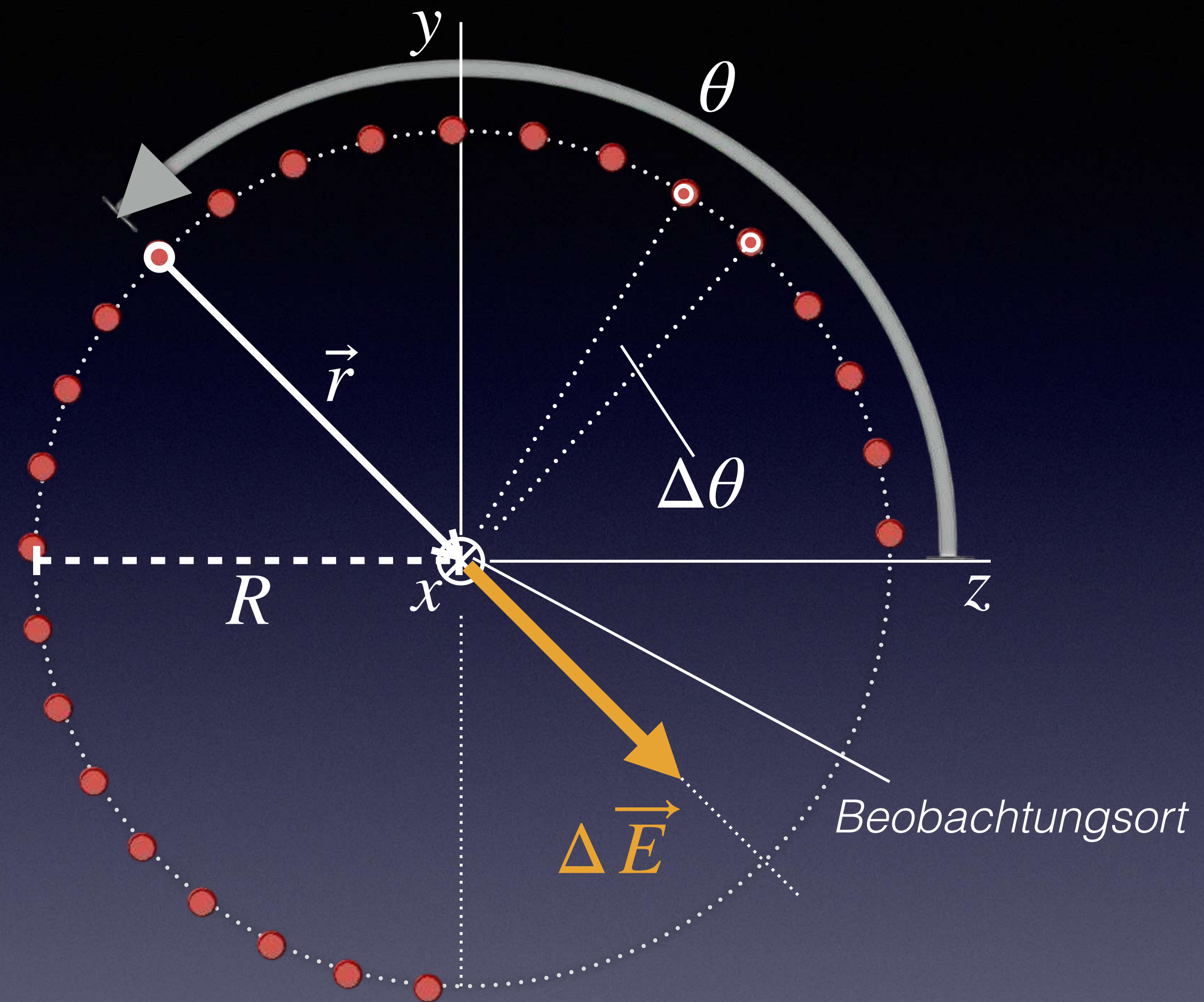
$$\hat{r} = \langle 0, -\sin \theta, -\cos \theta \rangle .$$

Ladung eines Stabes:

$$\Delta Q = Q \frac{2\Delta\theta}{3\pi} .$$

Beitrag ($R \ll L$) eines Stabes zu \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\Delta Q}{L} \frac{1}{R} \langle 0, -\sin \theta, -\cos \theta \rangle$$



Seitenansicht in Richtung der x -Achse.

Einsetzen des Ausdrucks für ΔQ in denjenigen für $\Delta \vec{E}$:

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\pi} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \langle 0, -\sin \theta, -\cos \theta \rangle \Delta \theta .$$

Lassen wir nun $\Delta \theta$ infinitesimal klein werden, so schreiben wir:

$$d\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\pi} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \langle 0, -\sin \theta, -\cos \theta \rangle d\theta .$$

Um \vec{E} zu erhalten müssen wir von $\theta = 0$ bis $\theta = 3\pi/2$ integrieren.

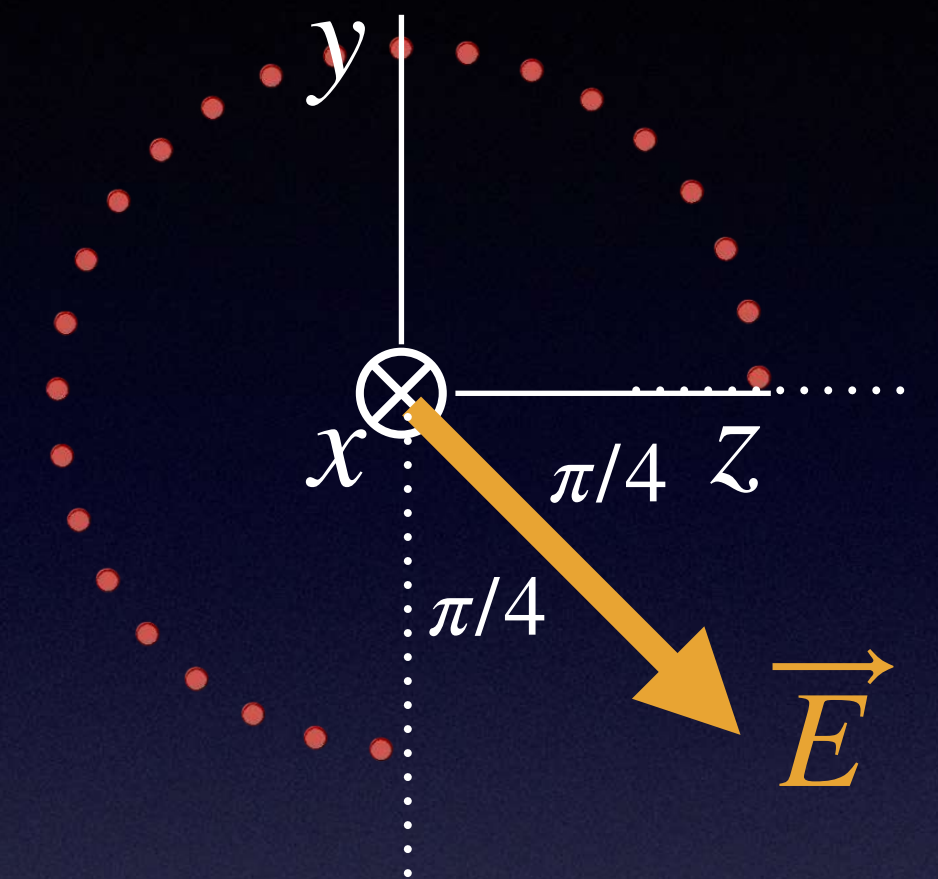
$$E_x \approx \frac{1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \int_0^{3\pi/2} 0 \, d\theta = 0$$

$$E_y \approx \frac{1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \int_0^{3\pi/2} (-\sin \theta) \, d\theta = \frac{1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} [\cos \theta]_0^{3\pi/2}$$

$$E_z \approx \frac{1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \int_0^{3\pi/2} (-\cos \theta) \, d\theta = \frac{-1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} [\sin \theta]_0^{3\pi/2}$$

Damit erhalten wir für das elektrische (Netto-) Feld:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{R} \langle 0, -1, 1 \rangle .$$



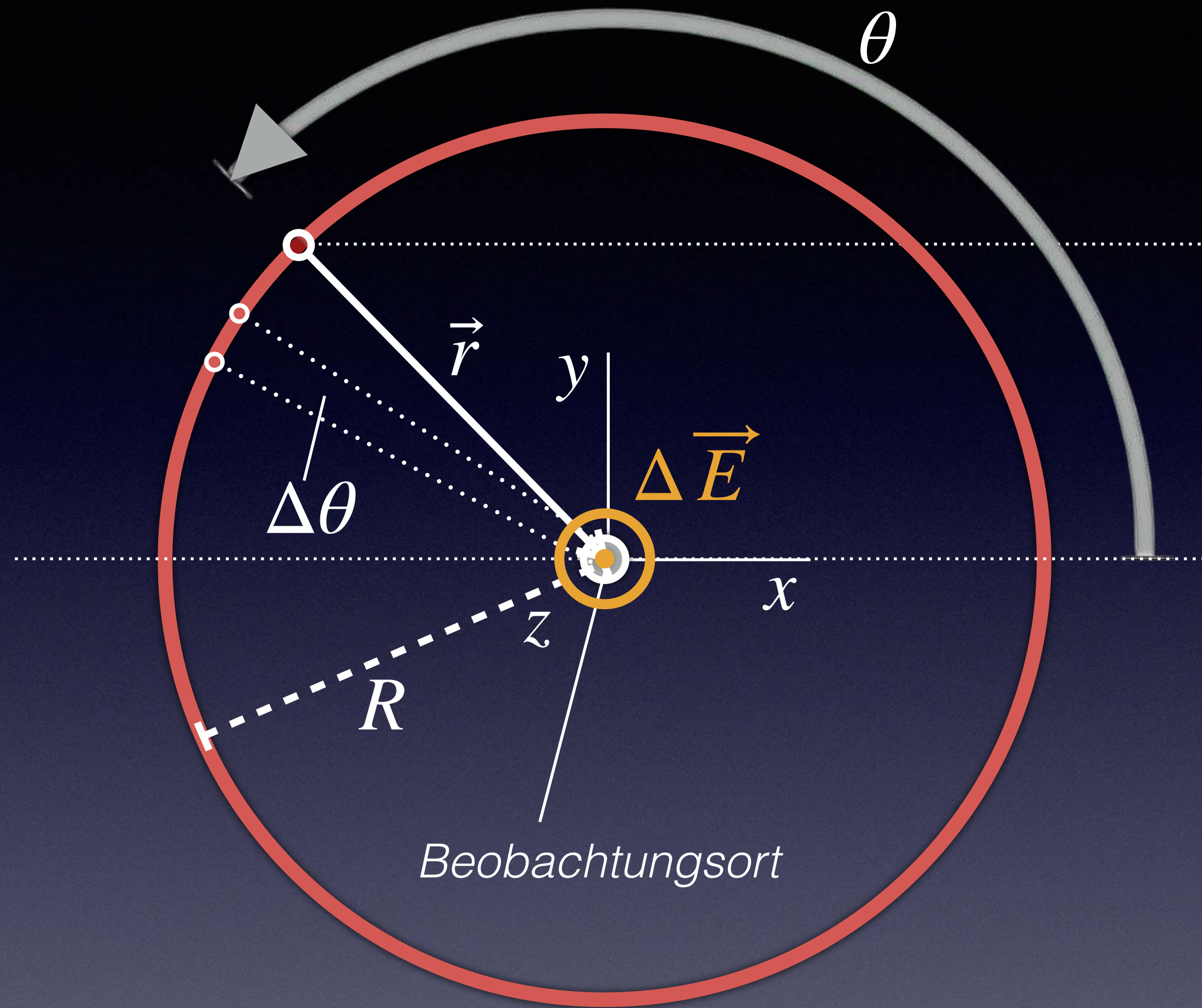
Die Richtung des Feldes ist plausibel, da es in Richtung der Mitte der Öffnung des 3/4-Hohlzylinders weist.

Auch die Einheiten sind korrekt, wie ein Vergleich mit dem Ergebnis für das Feld einer Punktladung zeigt.

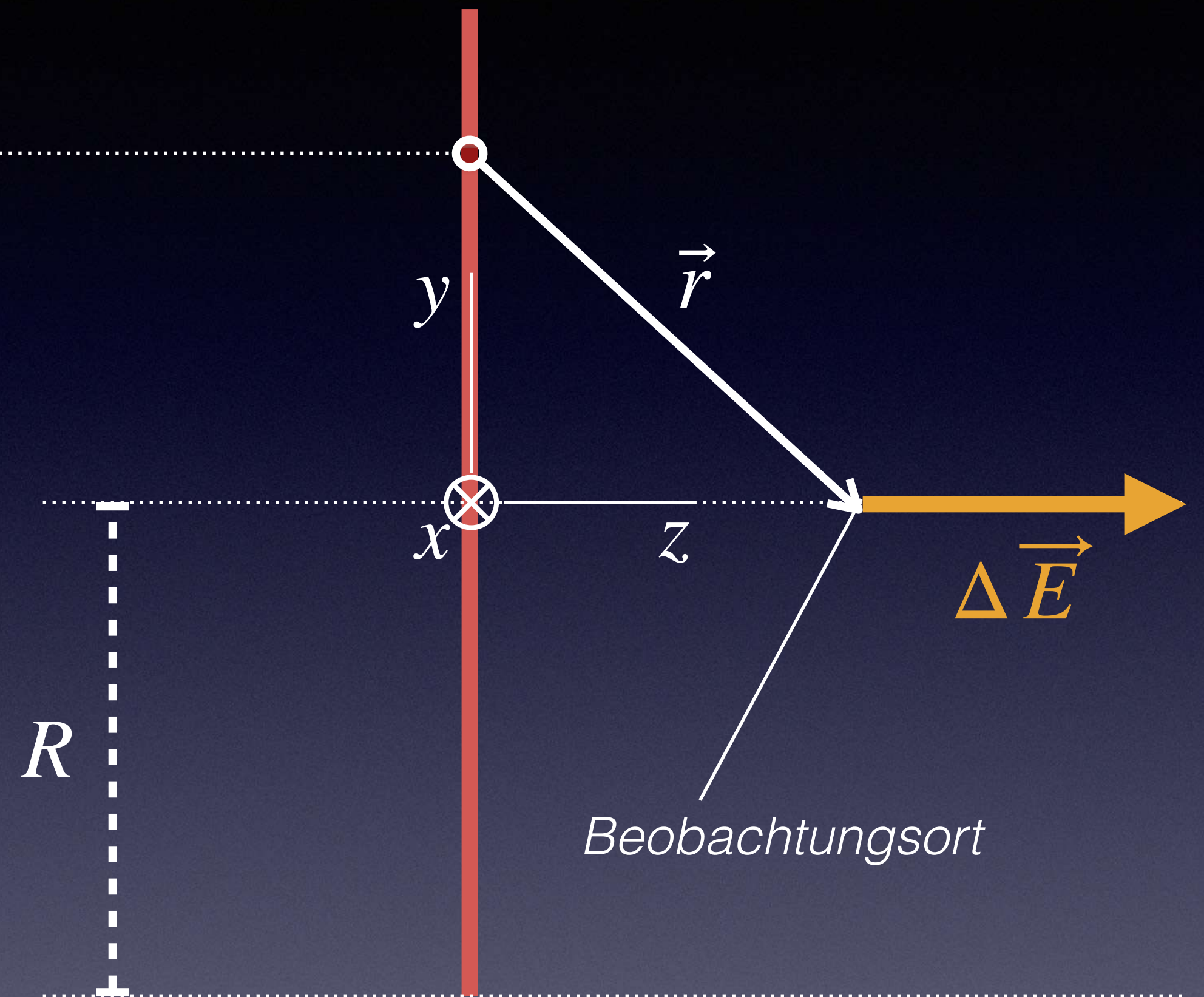
Ein gleichmäßig geladener
dünner Ring

Als Nächstes werden wir das elektrische Feld eines gleichmäßig geladenen dünnen Rings berechnen. Geladene Objekte vom Typ „Ring“ werden uns später noch häufiger begegnen, wenn wir uns mit elektrischen Schaltkreisen beschäftigen. Wir werden die Ergebnisse für einen Ring auch verwenden, um das elektrische Feld einer dünnen Scheibe später in diesem Kapitel zu bestimmen.

Wir berechnen das elektrische Feld, das von einem gleichmäßig geladenen Ring mit Radius R und positiver Gesamtladung Q erzeugt wird. Wir beschränken uns dabei allerdings auf den einfachsten Fall, nämlich das Feld an einer Stelle entlang der Achse des Rings, also entlang einer Linie, die durch den Mittelpunkt und senkrecht zum Ring verläuft, zu berechnen. Die Bestimmung des elektrischen Feldes an anderen Positionen ist deutlich aufwändiger.



Frontansicht entgegengesetzt zur Richtung der z -Achse.



Seitenansicht in Richtung der x -Achse.

Für \vec{r} und \hat{r} können wir mit Hilfe von R und θ wie folgt schreiben:

$$\vec{r} = \langle -R \cos \theta, -R \sin \theta, z \rangle \text{ und}$$

$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \langle -R \cos \theta, -R \sin \theta, z \rangle .$$

Ladung ΔQ eines Ringabschnitts $\Delta\theta$:

$$\Delta Q = Q \frac{\Delta\theta}{2\pi} .$$

Beitrag (Punktladung) eines Ringabschnitts $\Delta\theta$ zu \vec{E} :

$$\Delta\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{R^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \langle -R \cos \theta, -R \sin \theta, z \rangle .$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für ΔQ folgt:

$$\Delta\vec{E} \approx \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \langle -R \cos \theta, -R \sin \theta, z \rangle \Delta\theta .$$

Lassen wir $\Delta\theta$ sehr klein werden, so können wir schließlich schreiben:

$$d\vec{E} \approx \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \langle -R \cos \theta, -R \sin \theta, z \rangle d\theta .$$

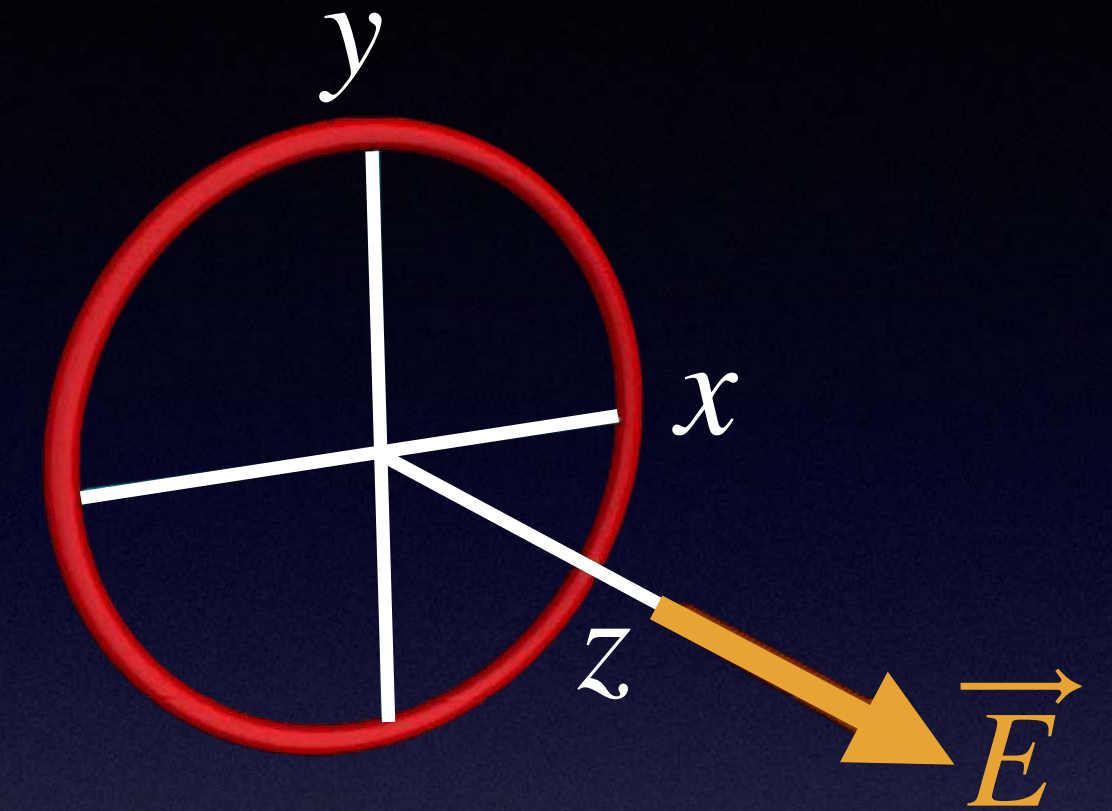
$$E_x \approx \frac{-1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{QR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$$

$$E_y \approx \frac{-1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{QR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$$

$$E_z \approx \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Damit erhalten wir für das elektrische (Netto-) Feld

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle .$$



Die Richtung des Feldes in z-Richtung ist aus Gründen der Symmetrie plausibel.

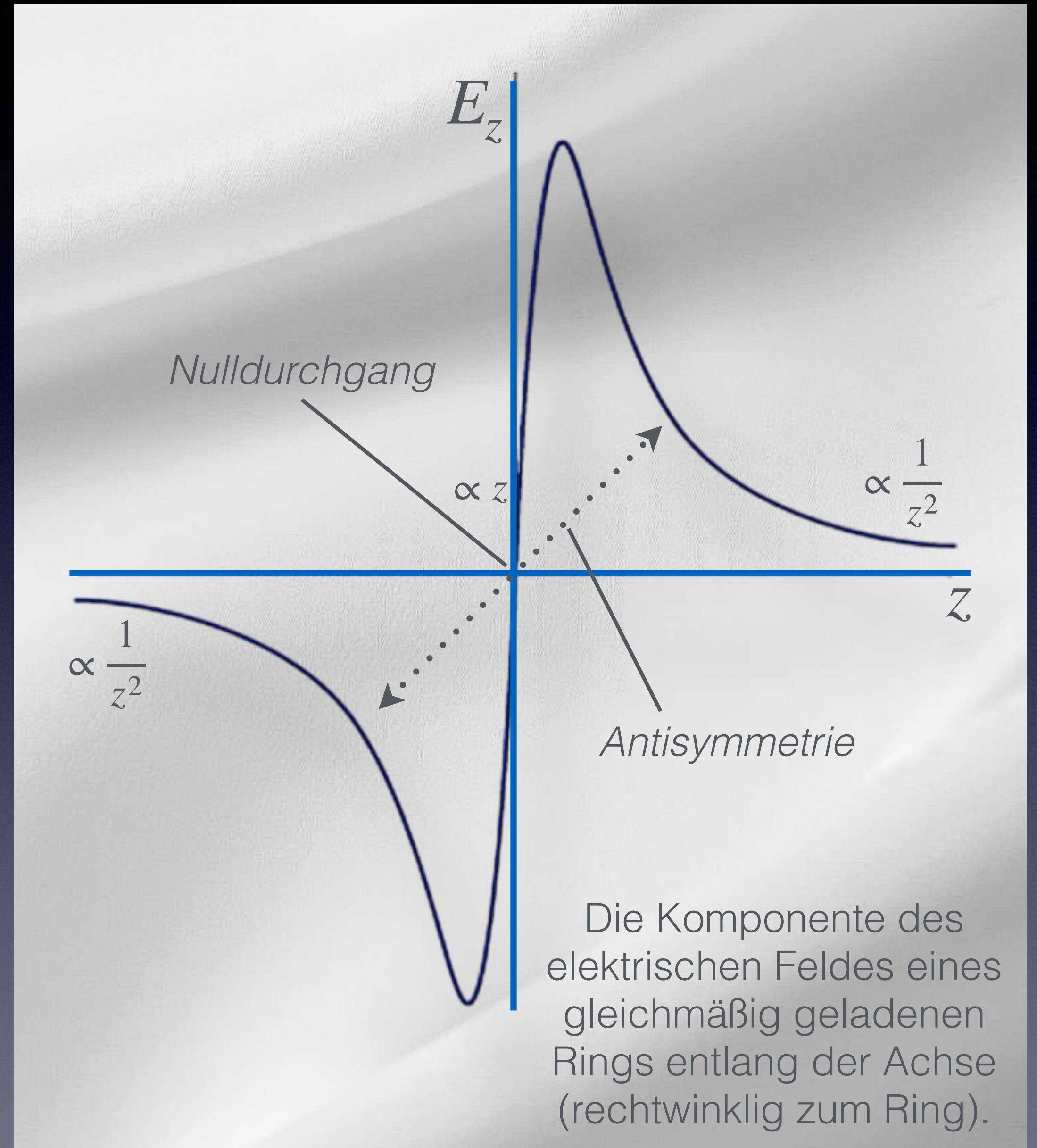
Auch die Einheiten sind korrekt, wie ein Vergleich mit dem Ergebnis für das Feld einer Punktladung zeigt.

In sehr großen Abständen $z \gg R$ nähert sich das elektrische Feld dem einer Punktladung an:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \langle 0,0,1 \rangle$$

Für $z = 0$ ist $\vec{E} = \vec{0}$.

\vec{E} ist antisymmetrisch zum Ursprung.



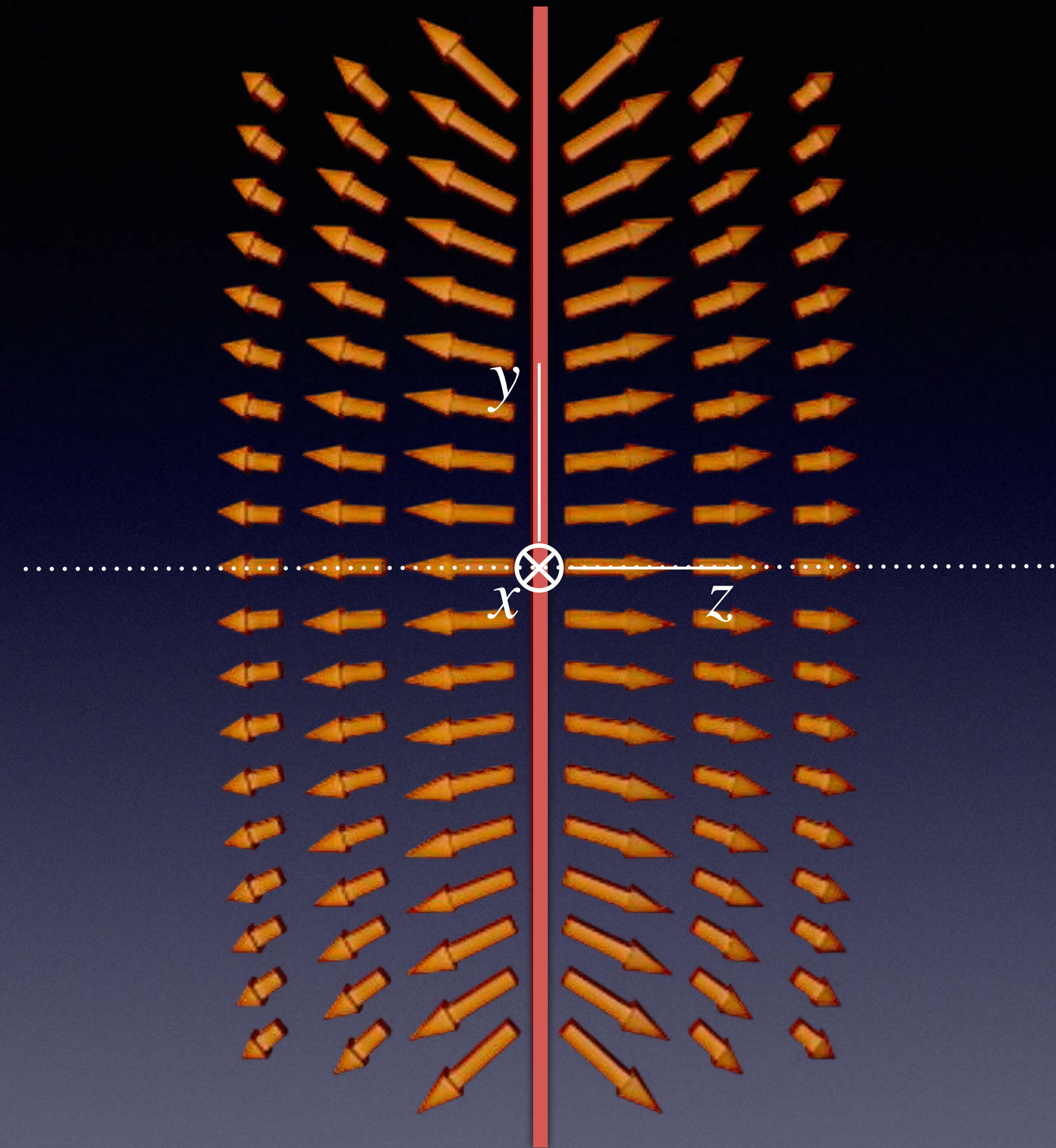
Kontrollpunkt 2

1. Zwei identische Ringe mit $R = 5 \text{ cm}$ sind $d = 20 \text{ cm}$ voneinander entfernt und haben eine gemeinsame horizontale Achse. Der linke Ring trägt eine gleichmäßig verteilte Ladung von $+35 \text{ nC}$, und der rechte Ring trägt eine gleichmäßig verteilte Ladung von -35 nC . (1) Wie groß sind Betrag und Richtung des elektrischen Feldes auf der Achse in der Mitte zwischen den beiden Ringen? (2) Wenn eine Punktladung von -5 nC in der Mitte zwischen den Ringen platziert würde, wie groß wäre die Kraft, die von den Ringen auf diese Ladung ausgeübt würde, und welche Richtung hätte sie? (3) Wie groß sind Betrag und Richtung des elektrischen Feldes in der Mitte zwischen den Ringen, wenn beide Ringe eine Ladung von $+35 \text{ nC}$ aufweisen würden?

Eine gleichmäßig geladene
dünne Scheibe

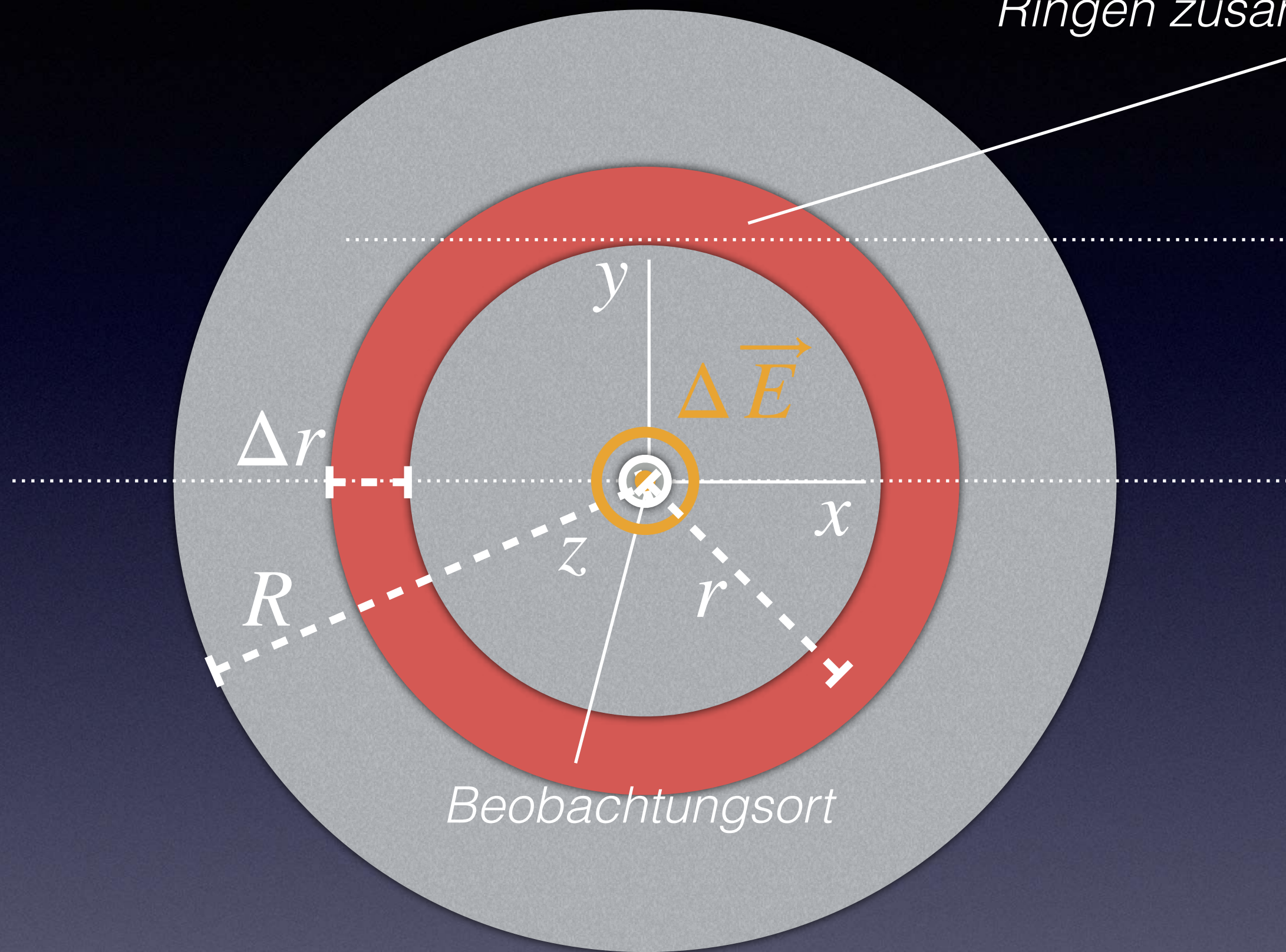
Eine gleichmäßig geladene Scheibe ist unter anderem deshalb wichtig, weil zwei entgegengesetzt geladene Metallscheiben einen „Kondensator“ bilden können, der in elektrischen Schaltkreisen wichtig ist.

Das elektrische Feld einer gleichmäßig geladenen Scheibe variiert natürlich nach Betrag und Richtung in der Nähe der Scheibe (siehe nebenstehende Abbildung), die das numerisch berechnete elektrische Feld an verschiedenen Orten in der Nähe einer gleichmäßig geladenen Scheibe zeigt. Man beachte jedoch, dass das Feld in der Nähe des Zentrums für einen bestimmten Abstand von der Scheibe recht gleichmäßig ist. Selbst in der Nähe des Randes der Scheibe ist die Größe des elektrischen Feldes noch immer vergleichbar zur Mitte.

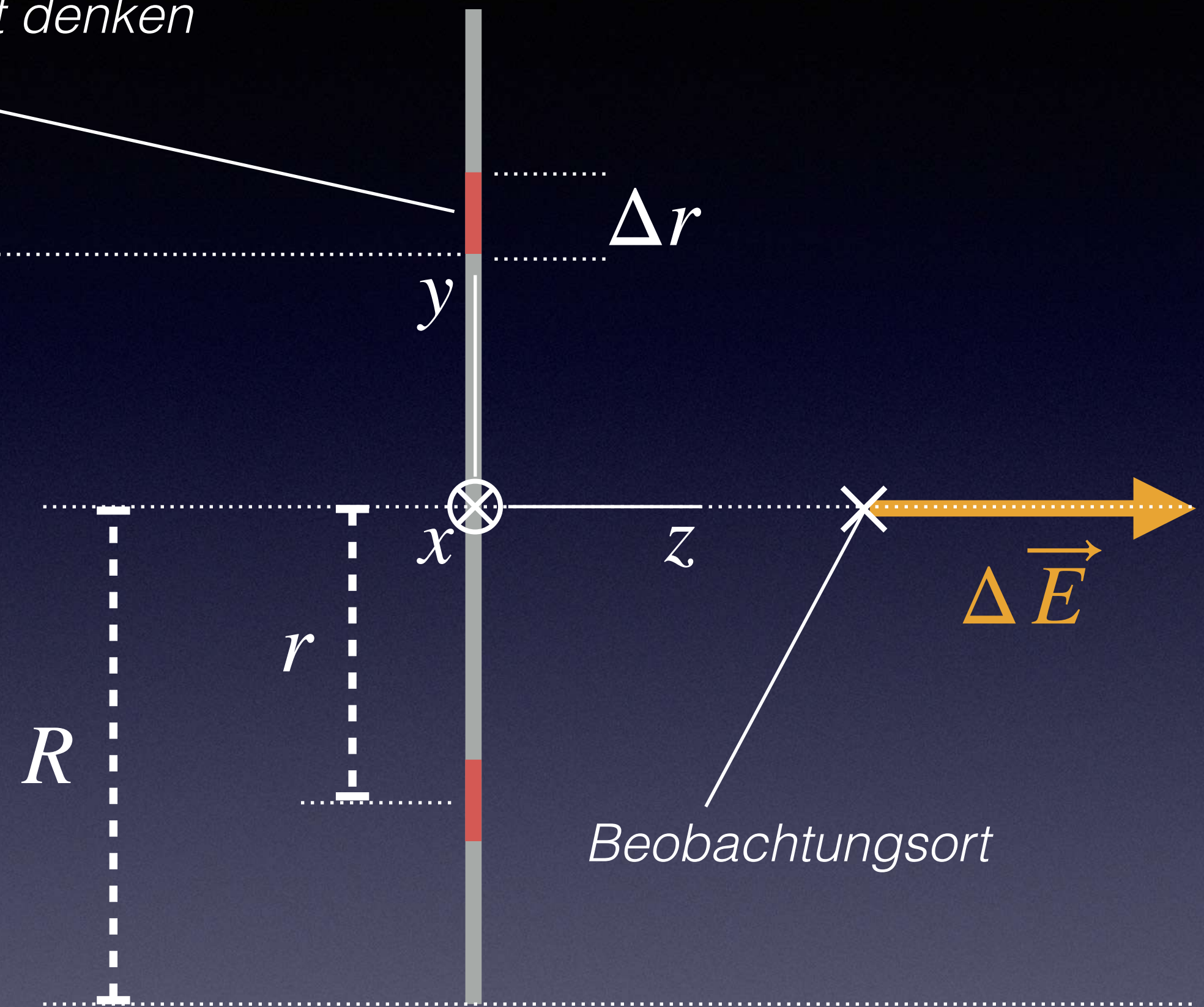


Seitenansicht des elektrischen Feldes einer gleichmäßig geladenen Scheibe. Beachte insbesondere die Gleichmäßigkeit des Feldes in der Nähe des zentralen Bereichs der Scheibe bei konstantem Abstand von der Scheibe.

dünnere Ring - die gesamte Scheibe kann man sich aus mehreren dünnen Ringen zusammengesetzt denken



Frontansicht entgegengesetzt zur Richtung der z-Achse.



Seitenansicht in Richtung der x-Achse.

Auch bei diesem Problem wählen wir eine einfache Position für eine analytische Lösung: das Feld an einer beliebigen Stelle entlang der zentralen Achse der Scheibe, welche eine Linie ist, die durch den Mittelpunkt und senkrecht zur Scheibe verläuft, wie in der Abbildung auf der vorangehenden Folie gezeigt. Diese Wahl ist zweckmäßiger als man erwarten würde, da sich das Feld in den Regionen weit weg vom Rand der Scheibe als nahezu gleichförmig erweist. Unser Ergebnis wird auf eine Vielzahl von Situationen anwendbar sein.

Der Beitrag eines jeden dünnen Rings zum (Netto-) Feld ist:

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\Delta Q}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle$$

Ladung ΔQ für einen dünnen Ring der Dicke Δr im Abstand r vom Scheibenzentrum:

$$\Delta Q \approx Q \frac{2\pi r \Delta r}{\pi R^2} = \frac{2Qr}{R^2} \Delta r .$$

Beitrag $\Delta \vec{E}$ eines dünnen Rings im Abstand r am Ort $\langle 0,0,z \rangle$:

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\Delta Q}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle .$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für ΔQ folgt:

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle \Delta r .$$

Lassen wir Δr sehr klein werden, so können wir schließlich schreiben:

$$d\vec{E} \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle dr .$$

$$E_x = 0 ,$$

$$E_y = 0 ,$$

$$E_z \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} z \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Damit erhalten wir für das elektrische (Netto-) Feld

$$E_z \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \right].$$

Die Richtung des Feldes in z-Richtung ist aus Gründen der Symmetrie plausibel.

Auch die Einheiten sind korrekt, wie ein Vergleich mit dem Ergebnis für das Feld einer Punktladung zeigt.

Für $z \gg R$ können wir $\left(1 + (R/z)^2\right)^{-1/2}$ als Reihenentwicklung schreiben.

Wir erhalten:

$$\left(1 + (R/z)^2\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2}.$$

Damit erhalten wir für das (Fern-) Feld der Scheibe:

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}.$$

Also erneut das Feld einer Punktladung.

Für $z \ll R$ gilt $\left(1 + (R/z)^2\right)^{-1/2} \approx z/R$. Damit erhalten wir für das (Nah-) Feld der Scheibe

$$E_z \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \frac{z}{R}\right].$$

In diesem Bereich nimmt die Größe (Betrag) des elektrischen Feldes einer dünnen Scheibe also (näherungsweise) linear mit dem Abstand z ab. Obwohl wir dieses Ergebnis nur für Beobachtungsorte entlang der vom Zentrum der Scheibe ausgehenden (z -) Achse bewiesen haben, ist das Ergebnis tatsächlich eine gute Näherung, solange man sich nicht zu nahe am Rand der Scheibe befindet.

Rücken wir noch näher an die Scheibe heran, wobei z fast Null wird, so können wir das elektrische Feld praktisch als konstant betrachten:

$$E_z \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2}.$$

Mit Hilfe der Flächenladungsdichte $\sigma = Q/(\pi R^2)$ folgt schließlich:

$$E_z \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

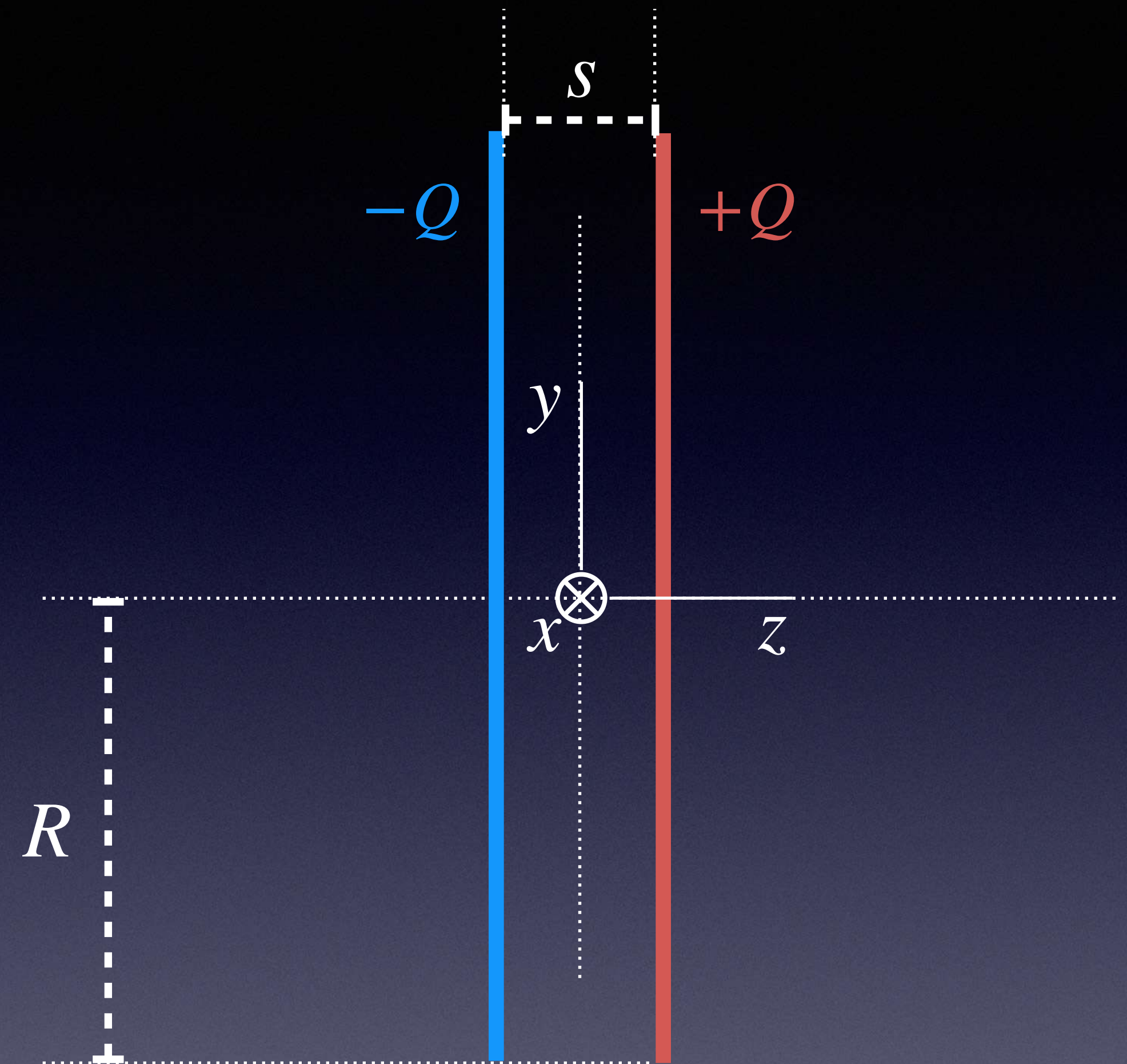
Dies ist auch das Ergebnis für eine unendlich große Scheibe.

Kontrollpunkt 3

1. Angenommen, der Radius einer Scheibe beträgt $R = 20 \text{ cm}$, und die Gesamtladung $Q = 6 \mu\text{C}$ ist gleichmäßig über die Scheibe verteilt. (1) Berechne anhand des exakten Ergebnisses das elektrische Feld E_z in 1 mm Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe. (2) In 3 mm Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe. (3) In 3 mm Abstand mit der Näherung für $z \ll R$. (4) In 3 mm Abstand mit der Näherung für „ z fast Null“.

Zwei gleichmäßig geladene
Scheiben: ein Kondensator

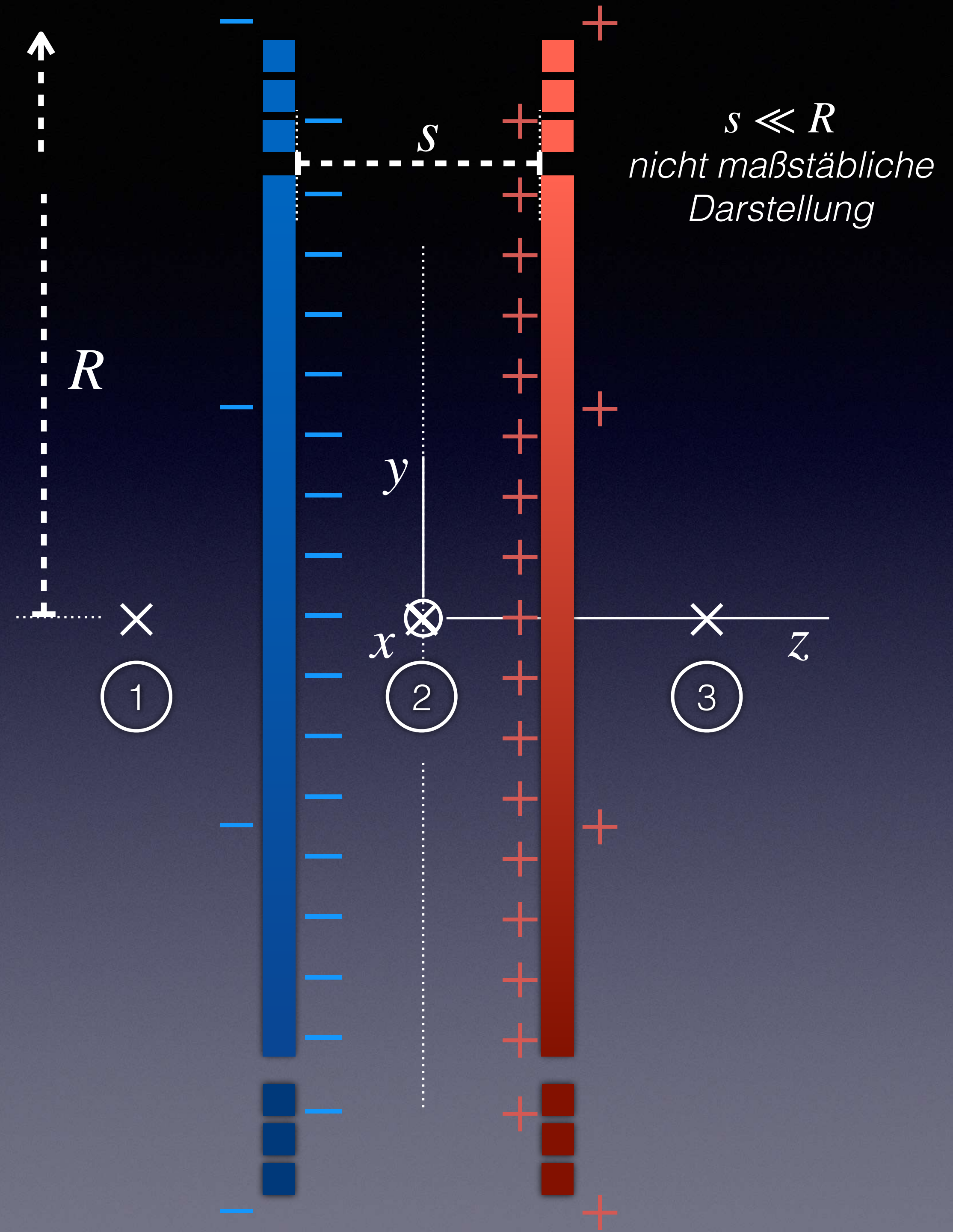
Betrachten wir zwei gleichmäßig geladene, gleich große Scheiben mit Radius R aus Metall, die sich sehr nahe gegenüber stehen, also einen sehr geringen Abstand s voneinander haben - s ist der Abstand zwischen den Innenseiten der Scheiben. Beide Scheiben seien gleichmäßig geladen und tragen die Ladungen $+Q$ und $-Q$. Diese Anordnung wird als Kondensator bezeichnet. Wir werden später solche Objekte in elektrischen Schaltkreisen wiederfinden.



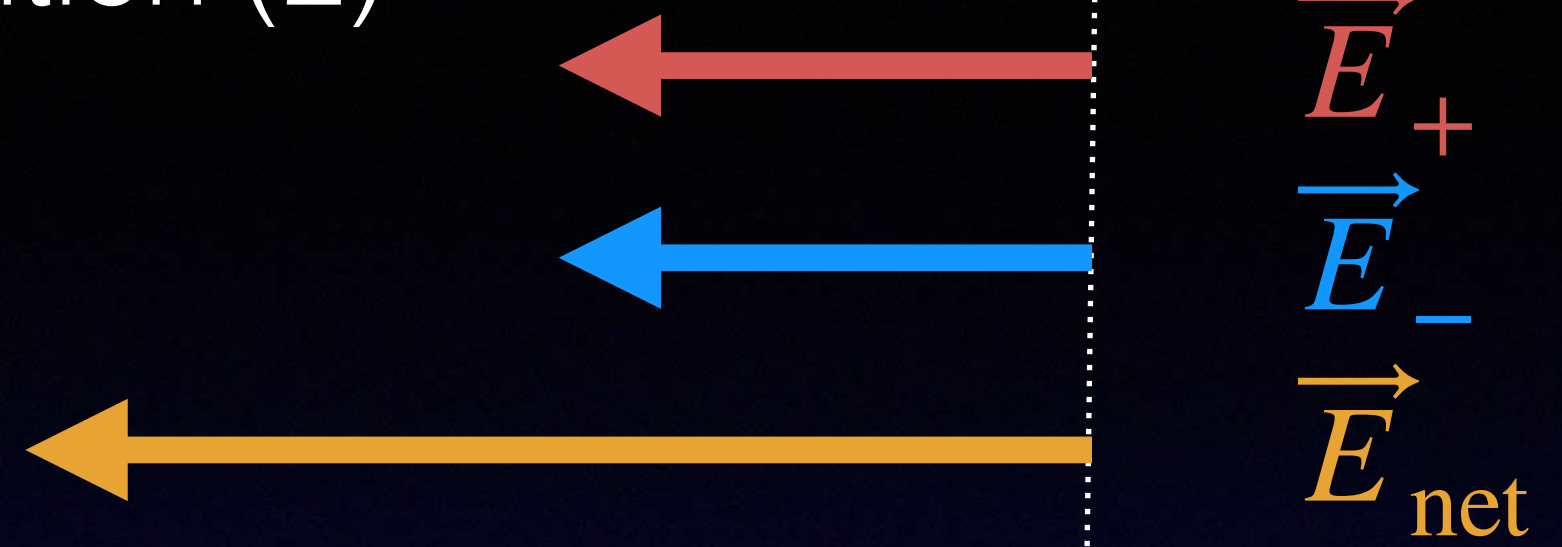
$s \ll R$ - nicht maßstäbliche Darstellung. Die Ladungen sitzen im Wesentlichen an den Innenseiten der Scheiben.

Eine einzelne geladene Scheibe aus Metall kann keine wirklich gleichmäßige Ladungsdichte haben, da die beweglichen Ladungen dazu neigen, sich gegenseitig an den Rand der Scheibe abzustößen. Dennoch sind unsere Ergebnisse für Scheiben aus isolierendem Material für Scheiben aus Metall annähernd korrekt, insbesondere in der für einen Kondensator typischen Zwei-Scheiben-Konfiguration, wenn die Scheiben sehr nahe beieinander liegen. Aufgrund der Anziehung durch die entgegengesetzte Ladung der benachbarten Scheibe verteilt sich die gesamte Ladung fast gleichmäßig auf den Innenflächen der Scheiben, während sich auf den Außenflächen der Scheiben nur relativ wenig Ladung befindet.

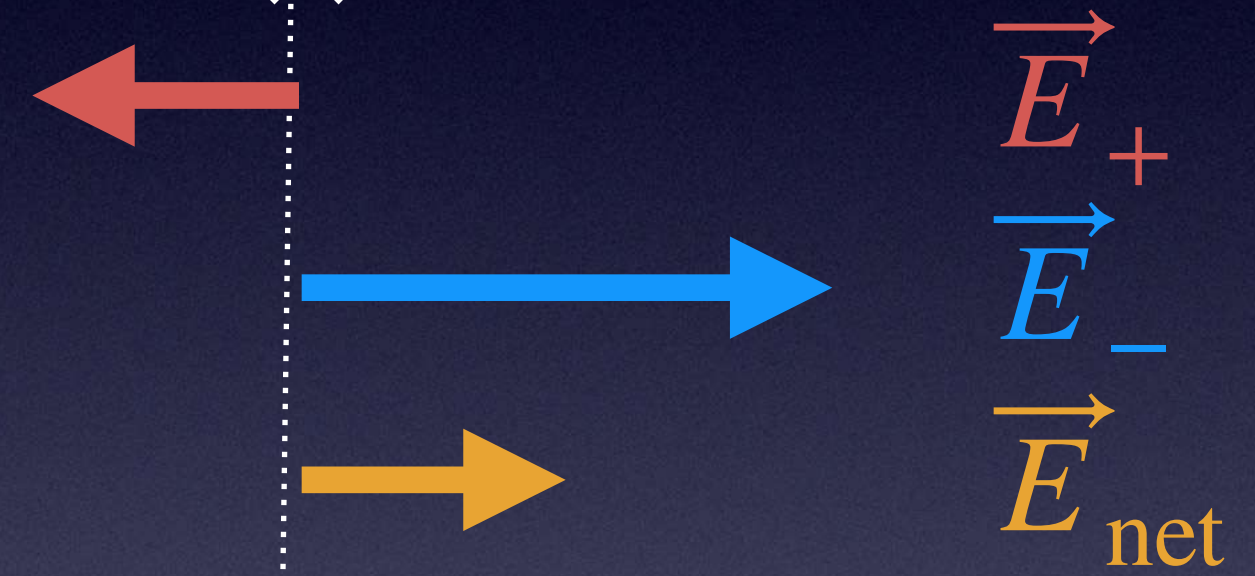
Wir kennen das elektrische Feld, das von einer einzelnen, gleichmäßig geladenen Scheibe erzeugt wird, also können wir dieses Resultat als einen Baustein für das Feld im Nahbereich eines Kondensators verwenden. Betrachte die mit 1, 2 und 3 gekennzeichneten Positionen in der nebenstehenden Abbildung. Dargestellt ist eine vergrößerte Seitenansicht eines Bereichs nahe des Zentrums der Scheiben. Die Scheiben liegen sehr dicht beieinander, $s \ll R$, und reichen in der Realität nach oben und unten weit über die Grenzen der Grafik hinaus. Man beachte auch die inhomogene Verteilung der Ladung zwischen Innen und Außen.



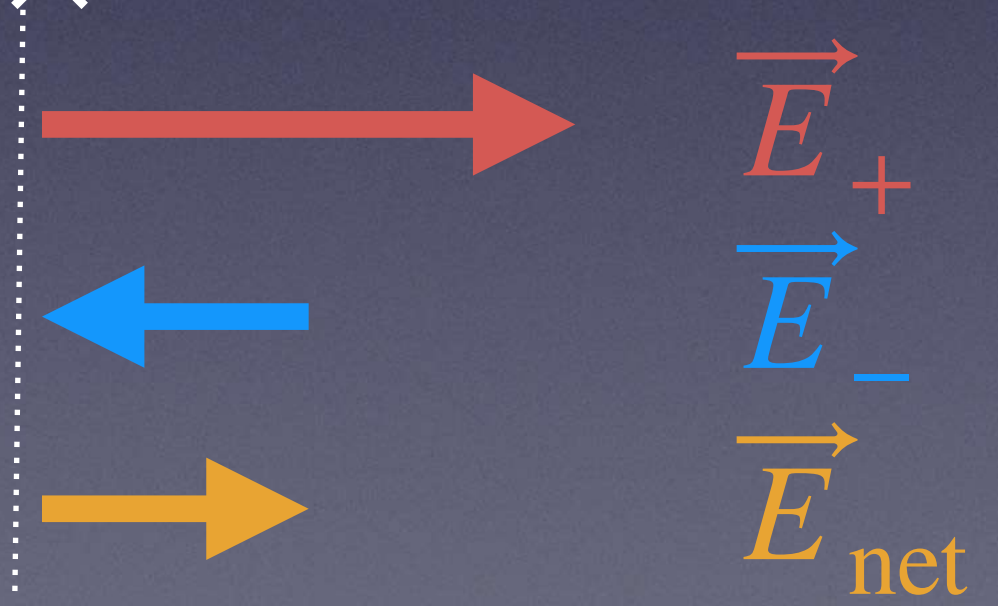
Position (2)



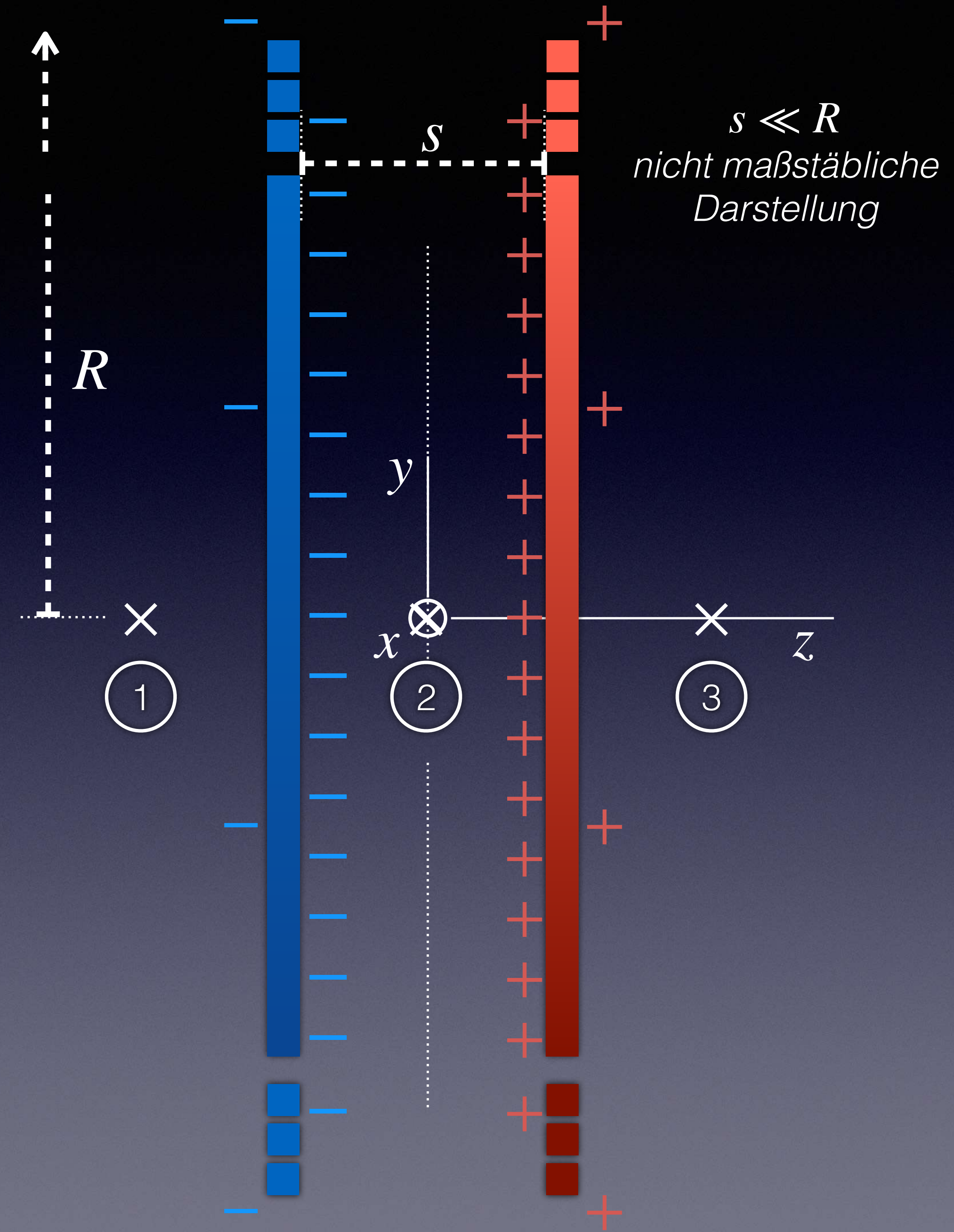
Position (1)



Position (3)



qualitative Darstellung der elektrischen Felder



Wir beschreiben das elektrische Feld in Abhängigkeit von z , so dass die Ausdrücke an allen Positionen 1 bis 3 gültig sind. Dabei nehmen wir an, dass sich die Ladung auf der Innenfläche jeder Scheibe gleichmäßig verteilt und die geringe Ladung auf den Außenflächen der Scheiben vernachlässigt werden kann.

Position (2), $z = 0$:

$$E_{2,z} \approx -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \left(1 - \frac{s/2}{R} \right).$$

Falls $s \ll R$, so können wir weiter vereinfachen zu

$$E_{2,z} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}.$$

Das elektrische Feld ist im Wesentlichen doppelt so groß wie das Feld, das von einer Platte ausgeht. Sein Betrag ist praktisch konstant.

Position (1), $z < -s/2$:

$$E_{1,z} \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \left(\left(1 - \frac{|z| - s/2}{R} \right) - \left(1 - \frac{|z| + s/2}{R} \right) \right).$$

Diesen Ausdruck können wir weiter zusammenfassen zu

$$E_{1,z} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \frac{s}{R}.$$

Das elektrische Feld außerhalb des Kondensators wird als „Streufeld“ bezeichnet. Dieses ist sehr klein im Vergleich zum Innenfeld eines Kondensators.

Position (3), $z > +s/2$:

$$E_{3,z} \approx \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \left(\left(1 - \frac{z - s/2}{R} \right) - \left(1 - \frac{z + s/2}{R} \right) \right).$$

Diesen Ausdruck können wir weiter zusammenfassen zu

$$E_{3,z} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \frac{s}{R} \quad \left[= E_{1,z} \right].$$

Das elektrische Feld außerhalb des Kondensators wird als „Streufeld“ bezeichnet. Dieses ist sehr klein im Vergleich zum Innenfeld eines Kondensators.

In welchem Verhältnis f steht das Streufeld zum inneren Feld eines Kondensators, falls $s \ll R$ gilt?

$$f \equiv \frac{E_{1,z}}{E_{2,z}} \approx \frac{\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \frac{s}{R}}{\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}} = \frac{s}{2R}.$$

Dies gilt für das Streufeld außerhalb, aber nur für einen sehr nahe beim Kondensator liegenden Ort. Wenn man jedoch sehr weit entfernt ist, also $|z| \gg R$ gilt, erscheint uns der Kondensator wie ein elektrischer Dipol, und das Streufeld fällt dann proportional zu $1/|z|^3$ ab.

Kontrollpunkt 4

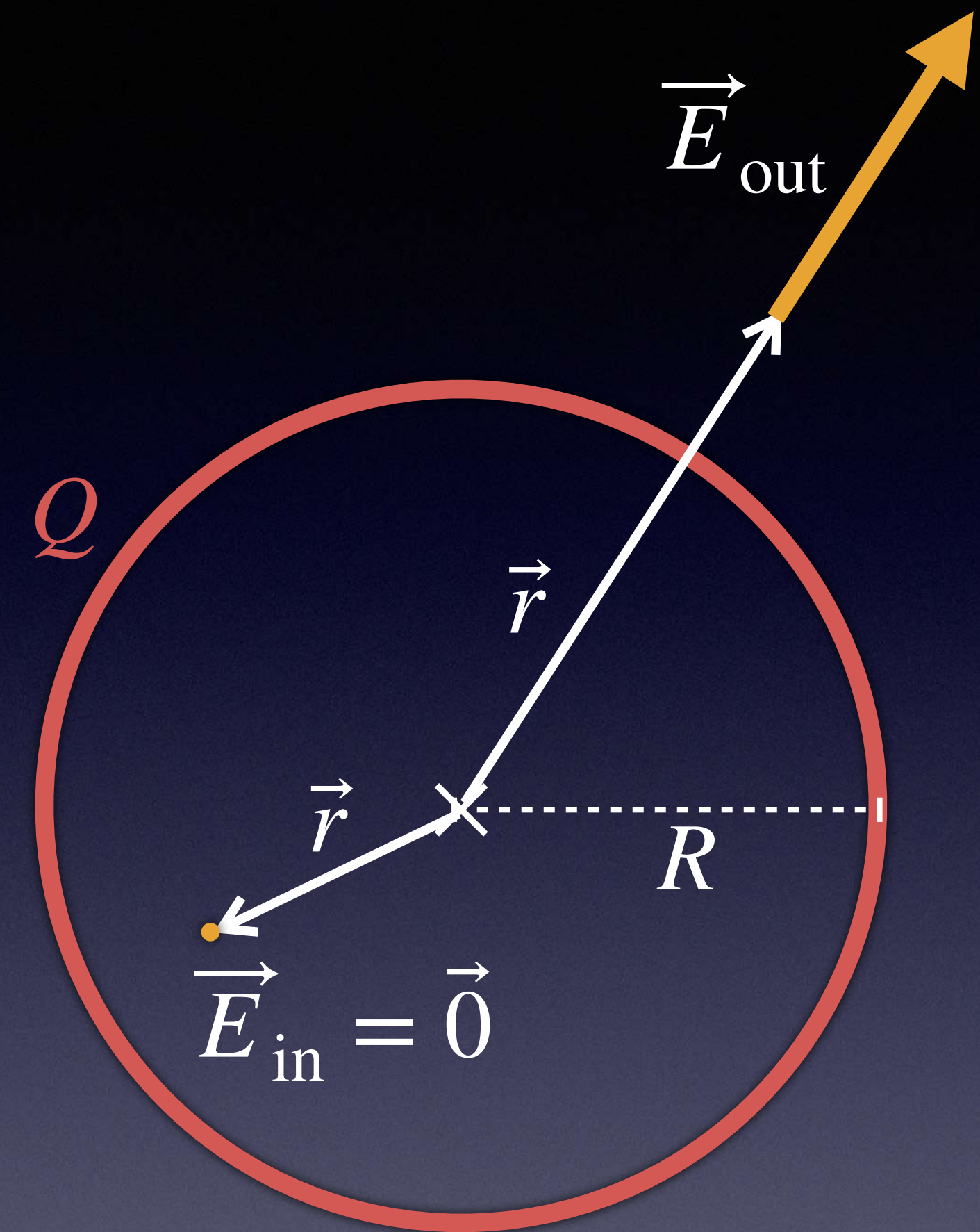
1. Übersteigt die Größe des elektrischen Feldes in der Luft ungefähr $3 \times 10^6 \text{ N/C}$, so bildet sich ein Funke aus. (1) Wie groß ist die maximale Ladung (Plus und Minus), die auf einen Kondensator mit zwei Scheiben mit $R = 50 \text{ cm}$ und $s = 1 \text{ mm}$ aufgebracht werden kann, ohne dass ein Funke entsteht (der einen Ladungsfluss von einer Scheibe zur anderen ermöglichen würde)? (2) Wie groß ist unter diesen Bedingungen die Stärke des Streufeldes unmittelbar außerhalb des Kondensators?

Wie in Kapitel 1 erwähnt, erzeugt eine Kugel mit gleichmäßig über ihre Oberfläche verteilter Ladung ein erstaunlich einfaches Muster des elektrischen Feldes. Ein kugelförmiges Objekt mit Radius R und gleichmäßig über seine Oberfläche verteilter Ladung Q erzeugt am Ort \vec{r} außerhalb der Kugelschale ein elektrisches Feld

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

und an einem innerhalb der Kugelschale gelegenen Ort

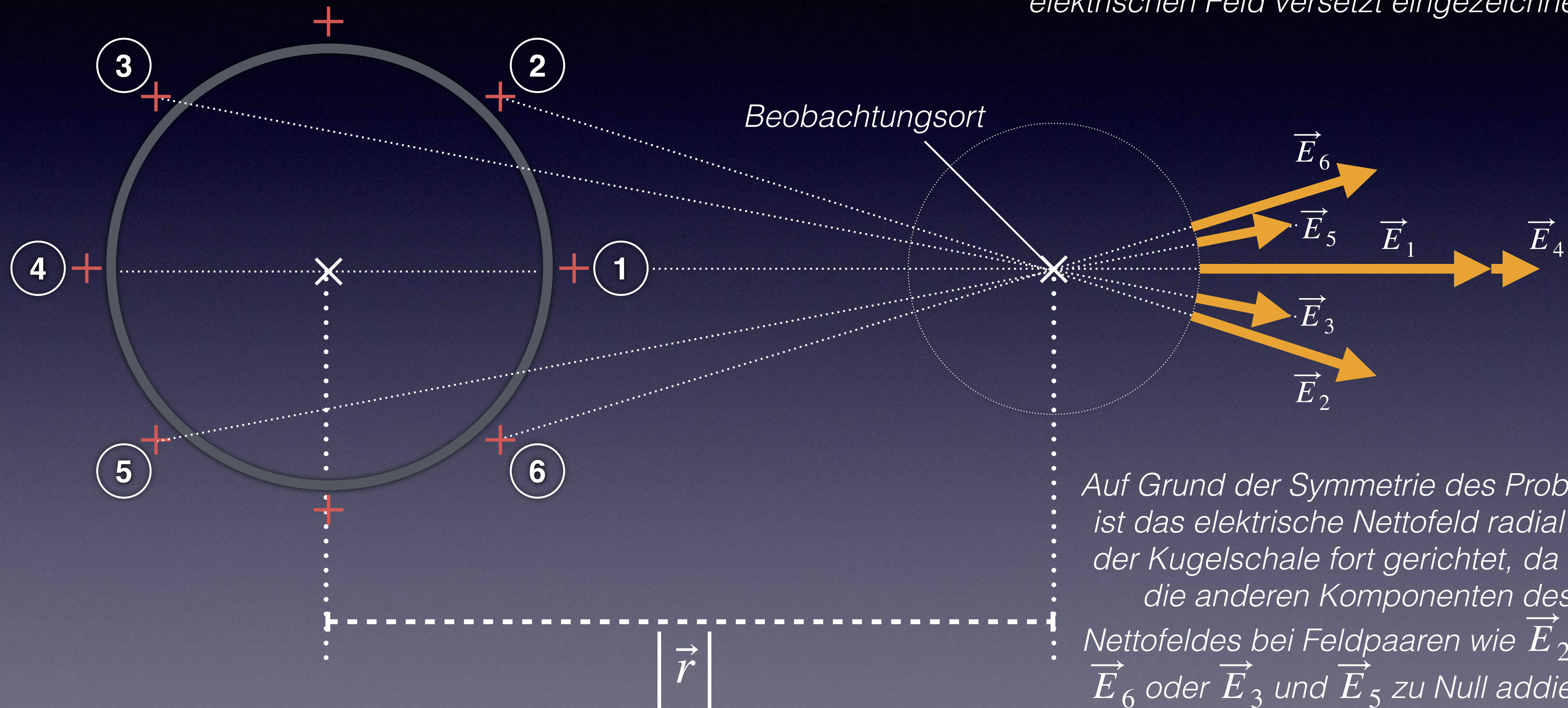
$$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{0}.$$



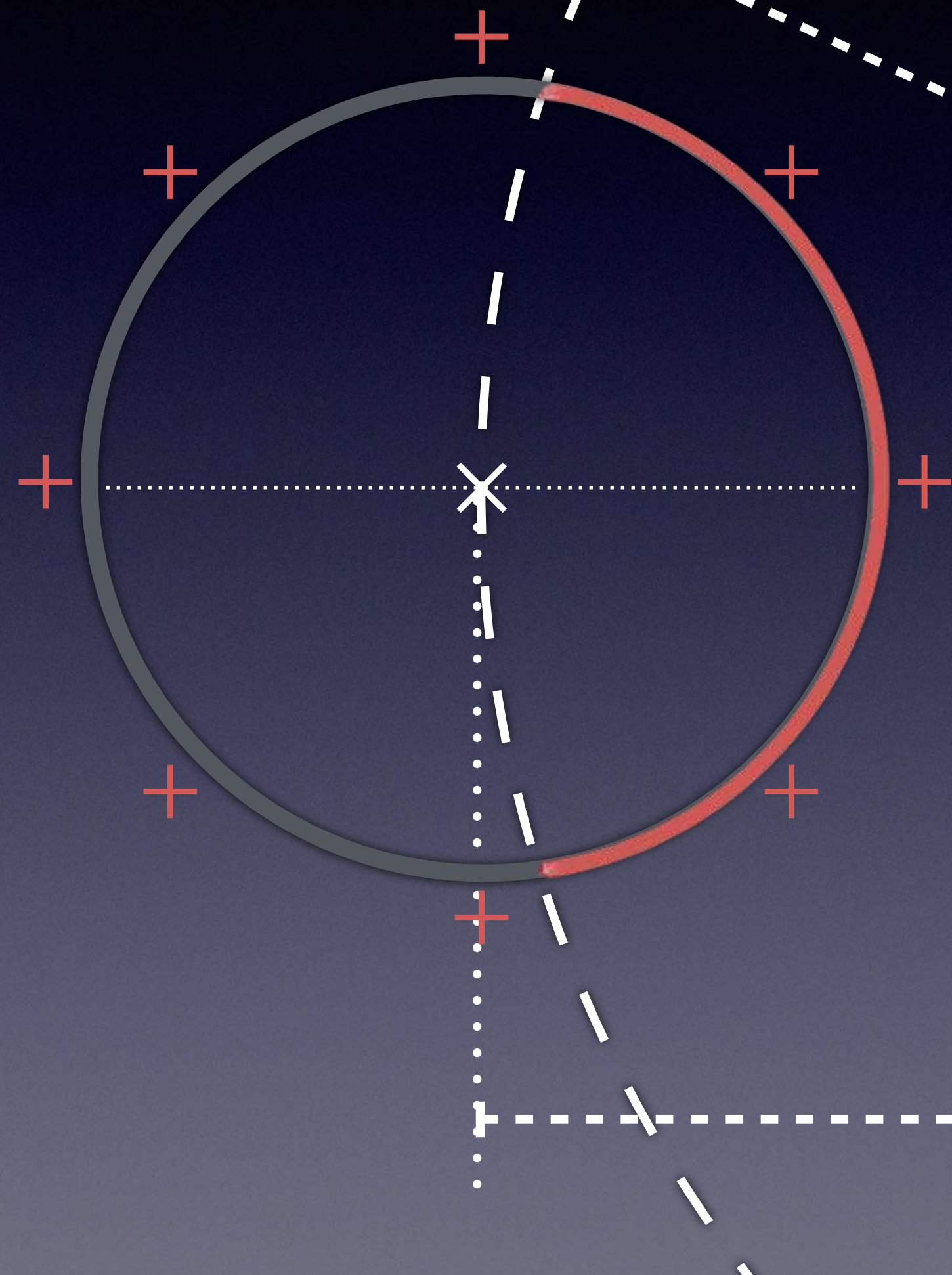
Man beachte, dass \vec{r} jeweils vom Zentrum der Kugelschale aus zu nehmen ist, und nicht etwa von einem nächstgelegenen Punkt auf der Schale selbst.

Dass die vorgenannten Ergebnisse korrekt sind, kann dadurch gezeigt werden, indem man ein Integral aufstellt und auswertet, wie wir es im Fall des Stabes, des Rings und der Scheibe getan haben. Die beteiligte Geometrie (Kugelschale) ist allerdings einigermaßen komplex, so dass wir die Vorgehensweise später nur grob beschreiben werden. In späteren Kapiteln werden wir uns mit alternativen Beweisen befassen, z. B. mit dem Gaußschen Gesetz (Divergenz-Theorem) oder mit dem elektrischen Potenzial.

Zunächst werden wir jedoch versuchen, ein qualitatives Verständnis dafür zu entwickeln, wie dieses überraschende Ergebnis zustande kommen kann.



Beachte, dass der Abstand vom Beobachtungsort zu einigen Regionen der Kugelschale kleiner als $|\vec{r}|$ ist, während der Abstand zu anderen Regionen größer als $|\vec{r}|$ ist. Aufgrund der Abstandsabhängigkeit $1/|\vec{r}|^2$ für Punktladungen trägt eine kleinere nahe gelegene Ladungsmenge genauso viel zum Nettofeld bei wie die größere Ladungsmenge, die weiter entfernt ist.



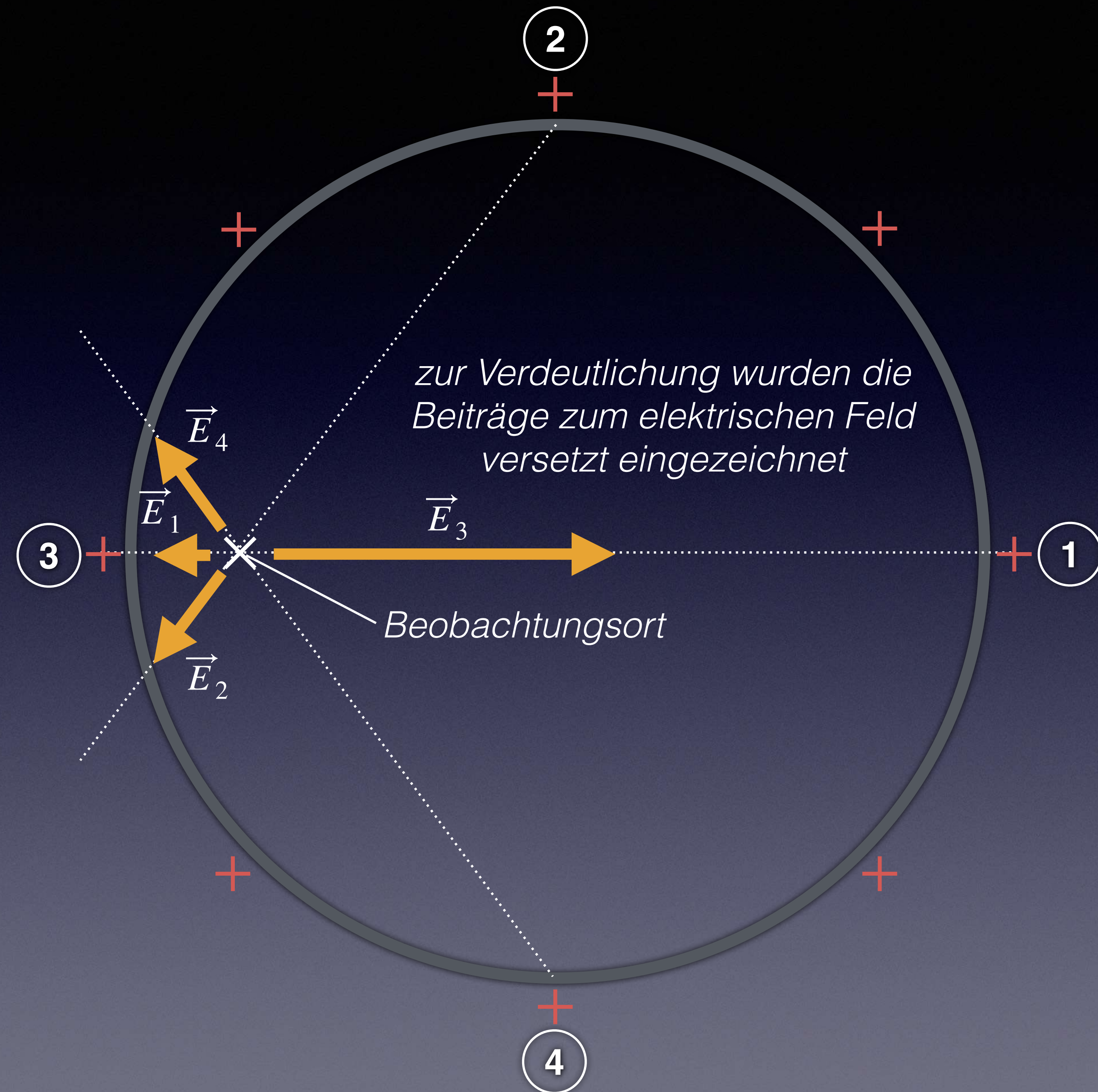
Es ist ein bemerkenswerter Aspekt der $1/|\vec{r}|^2$ -Abhängigkeit des Coulomb-Gesetzes, dass der Nettoeffekt all dieser Ladungen der einer Punktladung im Zentrum der Kugel entspricht. Dies ist kein offensichtliches Ergebnis!

Eine gleichmäßig geladene Kugelschale erzeugt nicht nur ein äußeres Feld, das demjenigen einer Punktladung entspricht, sondern die Kugelschale reagiert auch auf äußere Ladungen so, als ob sie eine Punktladung wäre.

Betrachte die Wechselwirkung zwischen einer geladenen Kugelschale und einer äußeren Punktladung. Die Schale übt eine Kraft auf die Punktladung aus, als ob beide Punktladungen wären. Nach dem Reziprozitätsprinzip für elektrische Kräfte muss daher die externe Punktladung eine gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf die Schale ausüben. Daher sieht eine gleichförmig geladene Kugelschale von außen genauso wie eine Punktladung aus, sowohl als Quelle eines elektrischen Feldes als auch bei der Reaktion auf äußere Felder.

Betrachten wir nun einen Ort innerhalb der Schale. Eine kleine Anzahl von Ladungen in der Nähe des Beobachtungsortes leistet einen großen Beitrag \vec{E}_3 zum Nettofeld, während eine große Anzahl von Ladungen \vec{E}_1 , \vec{E}_2 und \vec{E}_4 , die weit entfernt sind, jeweils kleine Beiträge zum Nettofeld leisten. Das elektrische Feld am Beobachtungsort, das durch die Ladungen auf der Kugeloberfläche entsteht, ist genau Null.

Dieses Ergebnis darf nicht beliebig verallgemeinert werden. Andere Ladungsverteilungen können ein elektrisches Feld ungleich Null im Inneren der Schale erzeugen. Nur das elektrische Feld, das von gleichmäßig auf der Kugeloberfläche verteilten Ladungen erzeugt wird, ist im Inneren der Kugel gleich Null.



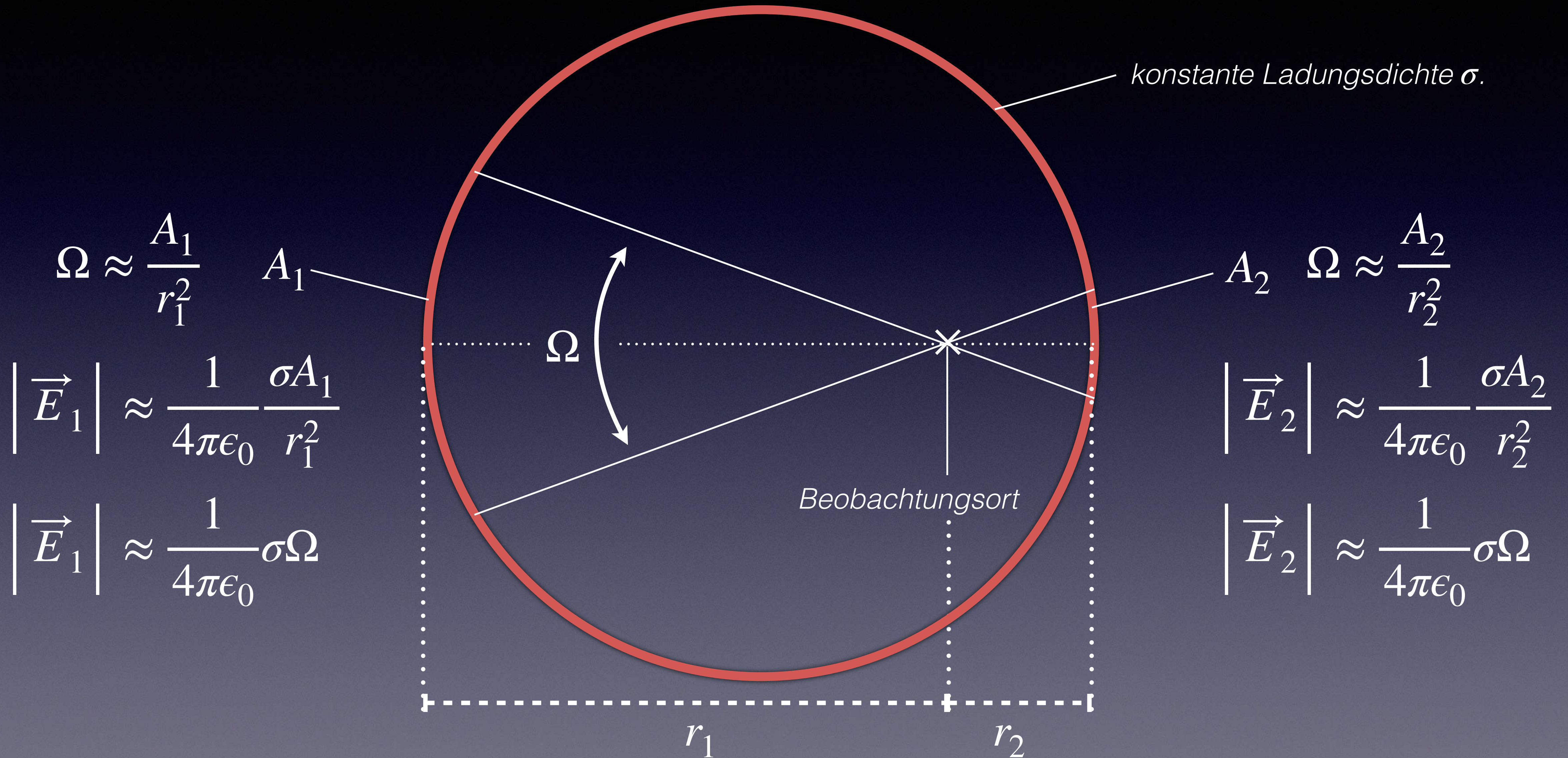
Die Tatsache, dass das elektrische Feld an jedem Ort innerhalb einer gleichmäßig geladenen Schale gleich Null ist, hat interessante Konsequenzen. Ist die gleichmäßig geladene Kugelschale beispielsweise mit Kunststoff gefüllt, so polarisieren die Ladungen auf der Oberfläche die Moleküle im Kunststoff nicht, eben weil das elektrische Feld im Inneren der Kugelschale Null ist. Selbst wenn sich ein Molekül sehr nahe an der geladenen Oberfläche der Kugel befindet, ist das Feld im Inneren der Kugel an dieser Stelle immer noch Null.

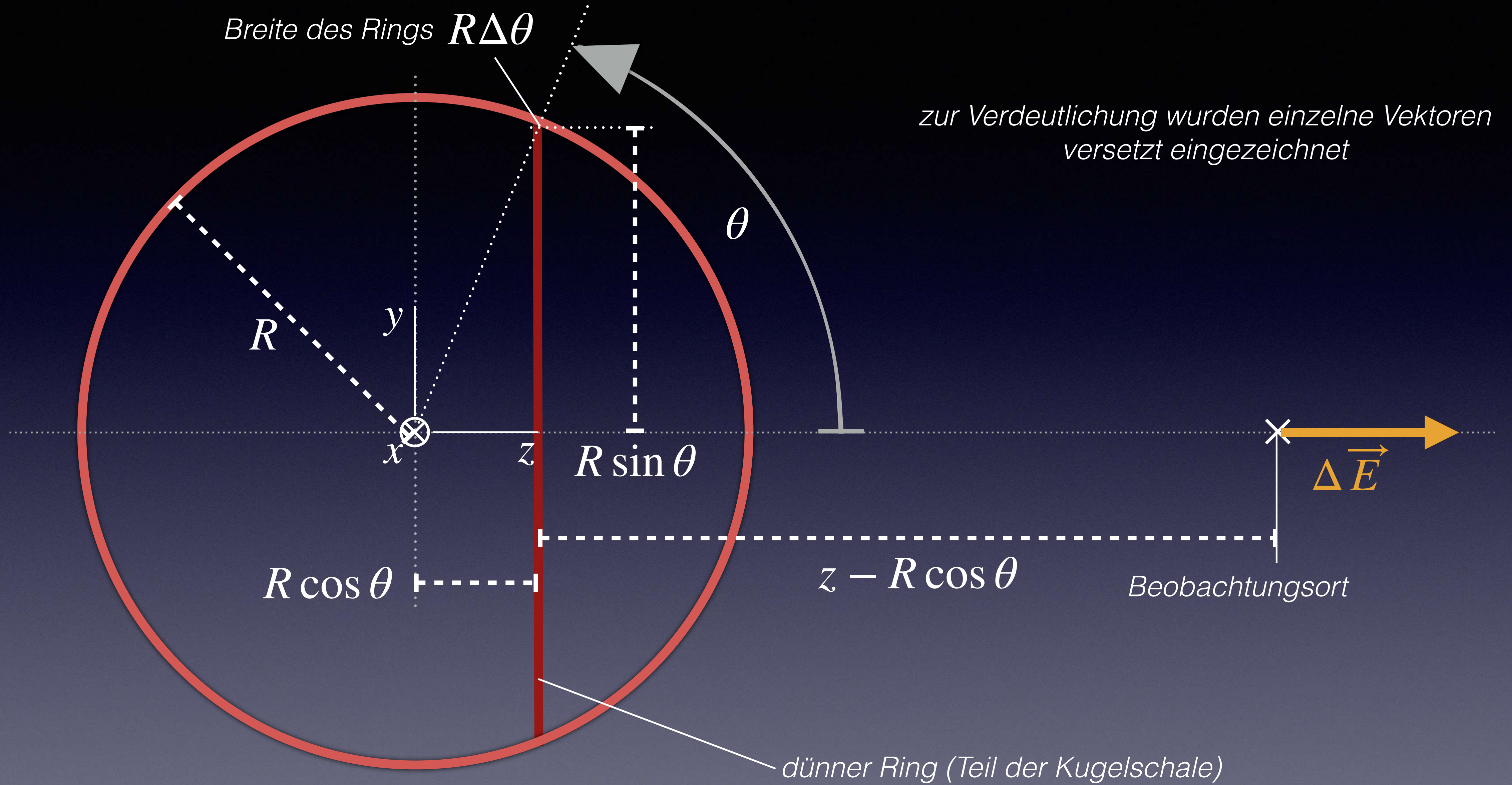
Da eine feste Metallkugel ein Leiter ist, ordnet sich jede überschüssige Ladung auf einer Metallkugel an der Außenfläche an. Im Inneren des Metalls gibt es (im Gleichgewicht) keine überschüssige Ladung und kein Feld. Das Feld im Inneren ist auch dann gleich Null, wenn äußere Ladungen das Metall polarisieren und die Ladung an der Außenfläche ungleichmäßig verteilt ist.

Das elektrische Feld ist direkt innerhalb der Oberfläche einer gleichmäßig geladenen Kugelschale gleich Null, aber das Feld ist außerhalb der Oberfläche ungleich Null. Man könnte sich fragen, wie das Feld direkt an der Oberfläche ist. Die physikalische Realität ist, dass das elektrische Feld direkt an der Oberfläche in Richtung und Größe sehr variabel ist, weil die einzelnen überschüssigen Punktladungen (Elektronen und Ionen) auf der Oberfläche i.d.R. viele Atomdurchmesser voneinander entfernt sind. Im vorangehenden Kapitel haben wir festgestellt, dass normalerweise nur etwa eines von einer Million Atomen auf einer Oberfläche eine zusätzliche Ladung aufweist. Erst wenn man einige Tausend Atomdurchmesser von der Oberfläche entfernt ist, also etwa 10^{-7} m, ist es angebracht, die Oberflächenladung als eine annähernd gleichmäßige, kontinuierliche Ladungsschicht zu betrachten. Erst dann beginnt das Feld dem einer Punktladung zu ähneln.

Nicht maßstäblicher Ω (Raumwinkel). Ω sehr, sehr klein.

Die Wirkung des Zuwachses der Ladungsmenge $\propto r^2$ (Fläche) wird durch der Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke $\propto 1/r^2$ kompensiert.





Der Beitrag eines jeden dünnen Rings zum (Netto-) Feld für einen Beobachtungsort auf der z-Achse ist:

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - R \cos \theta) \Delta Q}{\left(R^2 \sin^2 \theta + (z - R \cos \theta)^2 \right)^{3/2}} \langle 0,0,1 \rangle .$$

Die Ladung eines dünnen Rings beträgt:

$$\Delta Q \approx Q \frac{2\pi (R \sin \theta) (R \Delta \theta)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} Q \sin \theta \Delta \theta .$$

Beitrag eines dünnen Rings im Abstand $z - R \cos \theta$ zu E_z :

$$\Delta E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - R \cos \theta) \Delta Q}{\left(R^2 \sin^2 \theta + (z - R \cos \theta)^2\right)^{3/2}} .$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für ΔQ folgt

$$\Delta E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2} \frac{(z - R \cos \theta)}{\left(R^2 \sin^2 \theta + (z - R \cos \theta)^2\right)^{3/2}} \sin \theta \Delta \theta .$$

Lassen wir $\Delta \theta$ sehr klein werden, so können wir schließlich schreiben

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2} \frac{(z - R \cos \theta)}{\left(R^2 \sin^2 \theta + (z - R \cos \theta)^2\right)^{3/2}} \sin \theta d\theta .$$

Durch Integration erhalten wir E_z an einer Position z entlang der z -Achse:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2} \int_0^\pi \frac{(z - R \cos \theta)}{(z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta \, d\theta .$$

$$\text{Für } |z| > R: E_z = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} ;$$

$$\text{Für } |z| < R: E_z = 0 .$$

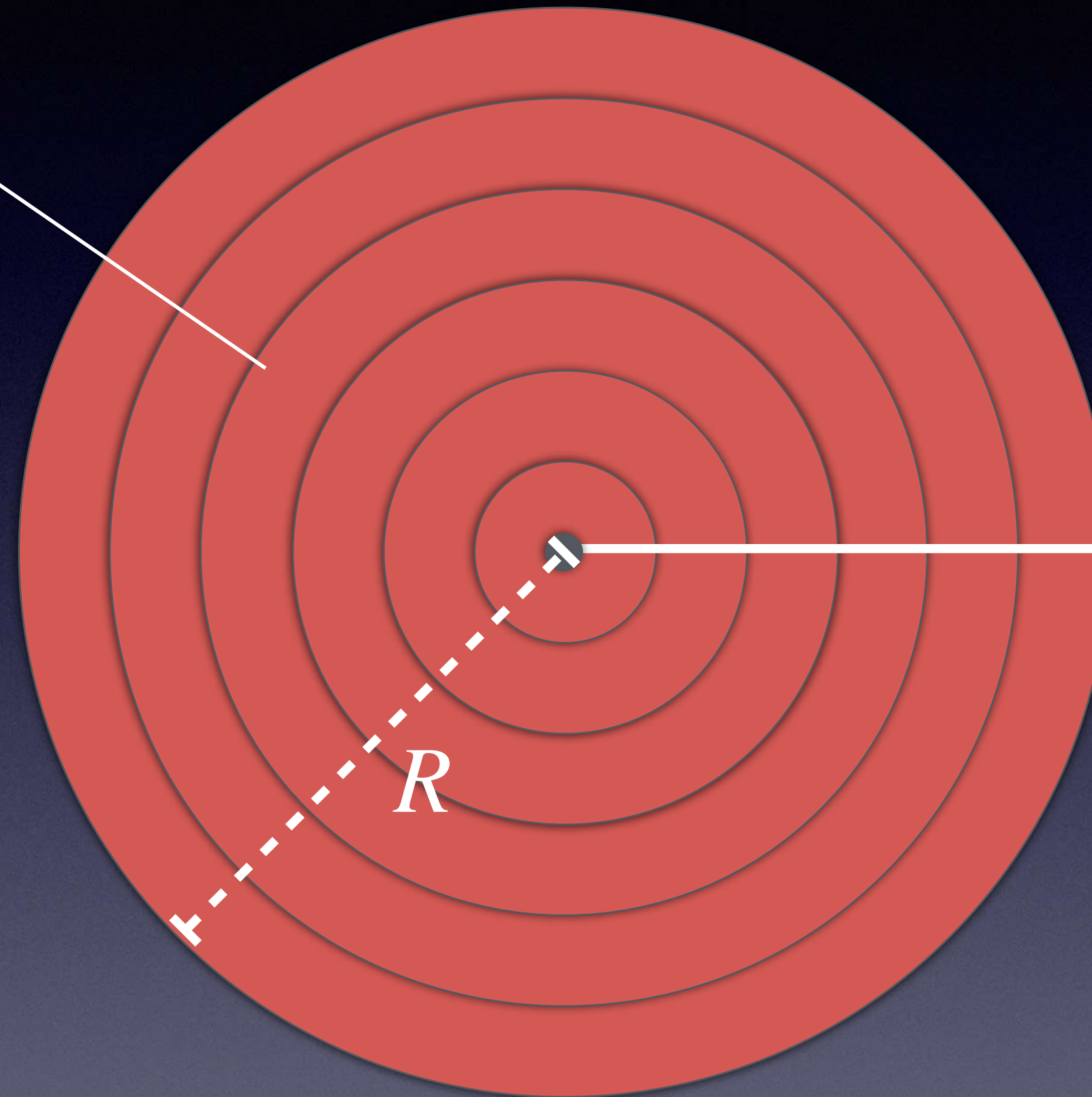
Für $|z| = R$ ist das Ergebnis nicht definiert (Nenner kann Null werden) und das elektrische Feld ist damit keine stetige Funktion. Später werden wir dieses Ergebnis noch einmal „eleganter“ herleiten.

Eine massive Kugel, die in ihrem
gesamten Volumen homogen
geladen ist

Bis hierher ging es bei allen von uns betrachteten Ladungsverteilungen um die Verteilung der Ladung auf der Oberfläche eines Objekts. Es gibt jedoch einige Fälle, in denen die Ladung in einem Objekt verteilt sein kann. Ein solcher Fall ist der Kern eines Atoms, der aus Protonen und Neutronen besteht, die in eine Kugel mit einem Radius in der Größenordnung von 10^{-15} m gepackt sind. Wir können die Ladungsdichte im Inneren des Kerns als annähernd gleichmäßig betrachten. Ein weiterer Fall ist die Elektronenwolke eines Atoms, in der die negative Ladung der Elektronen über einen kugelförmigen Bereich mit einem Radius in der Größenordnung von 10^{-10} m (wenn auch nicht unbedingt gleichmäßig) verteilt zu sein scheint.

Wir betrachten dazu eine feste Kugel mit dem Radius R , deren Ladung Q gleichmäßig über ihr Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ verteilt ist.

aus Kugelschalen aufgebaute massive Kugel mit
durchgehend gleichmäßiger Ladungsdichte



Für $|\vec{r}| > R$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

Beobachtungsort

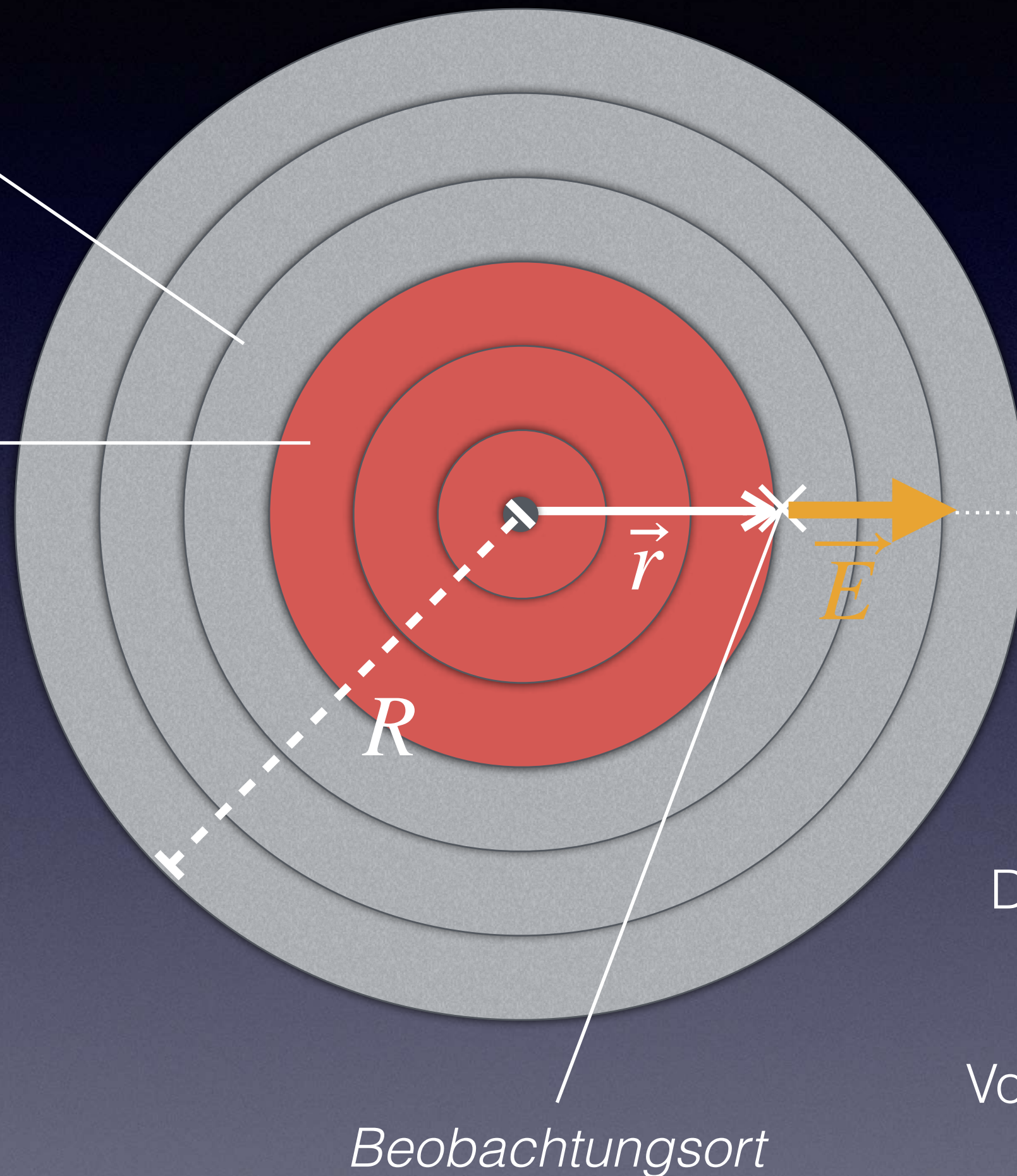
An einem Ort außerhalb der Kugel und
damit außerhalb aller Schalen sieht
jede Schale wie eine Punktladung im
Zentrum der Kugel aus.

für eine Position \vec{r} innerhalb der massiven Kugel tragen die (hier silbrigen) äußeren Schalen nichts zum elektrischen Feld bei

die inneren Schalen tragen gemäß ihrem Anteil an der Gesamtladung mit

$$\Delta Q = Q \frac{4/3\pi |\vec{r}|^3}{4/3\pi R^3}$$

zum Feld bei \vec{r} bei



Für $|\vec{r}| < R$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \frac{|\vec{r}|^3}{R^3} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} |\vec{r}| \hat{r}$$

Das elektrische Feld im Inneren der Kugel ist direkt proportional zu $|\vec{r}|$. Das größere Volumen $\propto |\vec{r}|^3$ gleicht die Feldabhängigkeit $\propto |\vec{r}|^{-2}$ mehr als aus. Für $|\vec{r}| = R$ erhalten wir wieder das Ergebnis einer Punktladung.

Infinitesimalrechnung und Integrale in der Wissenschaft

Durch das Bedürfnis, eine Methode jeweils zur Bestimmung von Flächen und Tangenten zu haben, lag schon im frühen 17. Jahrhundert die Analysis latent „in der Luft“. Zwar waren wesentliche Ideen schon zuvor formuliert worden, aber Isaac Newton (1642-1726) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) gebührt die Ehre, Differential- und Integralrechnung zu einer einzigen Berechnungsmethode („Kalkül“, lat. *Calculus*) mit Infinitesimalzahlen vereinheitlicht zu haben, woher noch heute im Englischen die Bezeichnung *infinitesimal calculus* und im Deutschen **Infinitesimalrechnung** kommt. Später verkürzte sich die englischsprachige Bezeichnung nur noch auf *calculus* und im Deutschen verwendet man für das größere Themengebiet die von Leonhard Euler (1707-1783) eingeführte Bezeichnung **Analysis**.^[27] *Infinitesimalrechnung* ist im Deutschen also eher die Bezeichnung für eine historische Rechenmethode, während die *Analysis* die daraus entstandene moderne Wissenschaft ist.

In der reinen Mathematik versteht man unter einer infinitesimalen Größe eine beliebige kleine Annäherung an Null. In der Naturwissenschaft ist dies jedoch nicht unbedingt sinnvoll. Im Fall des gleichmäßig geladenen dünnen Stabs macht es zum Beispiel physikalisch keinen Sinn, für dy einen Wert kleiner als einen Atomdurchmesser d_a zu wählen. Es würde die Berechnung der Summe enorm erschweren, falls wir die detaillierte Verteilung der Ladungsträger in jedem Atom berücksichtigen müssten. Alles, was erforderlich ist, ist, dass dy klein genug im Vergleich zu den signifikanten Dimensionen der Situation (Länge des Stabes L und Abstand zum Stab $|\vec{r}|$) ist. Es genügt, dass jeder Abschnitt Δy des Stabes eine Punktladung hinreichend genau annähert und auch mit einem Blick auf die mögliche Präzision von Messungen und Analysen „klein genug“ ist. Das in der Mathematik gebräuchliche dy wäre dann eine Art Idealisierung von Δy .

Wir sollten uns dessen bewusst sein, dass das Ergebnis eines Integrals nicht exakt, sondern nur „annähernd exakt“ ist. Denn auf der mikroskopischen Ebene ist die tatsächliche Ladungsverteilung nicht gleichmäßig verteilt.

Im vorangehenden Kapitel dieser Folien haben wir z.B. festgestellt, dass auf einem geladenen Stück Klebeband die einzelnen Elektronen oder Ionen auf atomarer Ebene ziemlich weit voneinander entfernt sind. Wenn man jedoch viele Atomdurchmesser $|\vec{r}| \gg d_a$ von einem „gleichmäßig“ geladenen Stab entfernt ist, liefert das mathematische Integral eine ausgezeichnete Annäherung an das tatsächliche elektrische Feld.

Es gibt außerdem noch einen weiteren Aspekt, weshalb unsere Analyse nur annähernd zutrifft. Wenn ein Stab ein Isolator ist und durch Reiben mit einem Tuch aufgeladen wurde, ist die Ladungsverteilung selbst im makroskopischen Maßstab nur annähernd gleichmäßig, da der Ladungstransfer nicht genau kontrolliert werden kann. Handelt es sich bei dem Stab um ein Metall, so wird sich die Ladung eher an den Enden anhäufen, als dass sie gleichmäßig verteilt wird. Dennoch kann die Modellierung eines geladenen Stabes als gleichmäßig geladener Stab in der Praxis ein nützliches Modell sein. Wir müssen „nur“ stets bedenken, dass unsere analytische Lösung nur näherungsweise gilt, also nicht exakt ist.

Numerische Integration mit einem Computer

In einem vorangehenden Abschnitt haben wir einen algebraischen Ausdruck für das elektrische Feld eines gleichmäßig geladenen dünnen Stabes, eines Hohlzylinders, eines dünnen Rings, einer Scheibe, einer Hohlkugel sowie einer massiven Kugel an Beobachtungsorten in der Mittelebene oder einer Symmetrieachse gefunden. Diese Ausdrücke gelten jedoch nicht für abseitig gelegene Beobachtungspositionen. Mit einem Computerprogramm können wir einigermaßen einfach und hinreichend genau das elektrische Feld an beliebigen Beobachtungsorten im Umfeld des Objekts berechnen.

Einige Beispiele

Punktladungen und Felder
by [University of Colorado, Boulder](#)

Elektrisches Feld eines dünnen Rings
by [Web VPython](#)

Komposition des elektrischen Feldes einer Scheibe aus den Feldern dünner Ringe
by [Web VPython](#)

Komposition des externen Feldes einer Hohlkugel aus den Feldern dünner Ringe
by [Web VPython](#)

Komposition des internen Feldes einer Hohlkugel aus den Feldern dünner Ringe
by [Web VPython](#)

Elektrisches Feld in der Nähe einer dünnen Scheibe
by [Web VPython](#)

Die Verwendung von Python-Listen erleichtert Berechnungen mit vielen Ladungen und Beobachtungsorten. Diese Technik wird in zwei VPython-Videos vorgestellt:

1. „*Using Lists in VPython*“, Teil 1 (<http://vpython.org/video07.html>),
und
2. „*Using Lists in VPython*“, Teil 2 (<http://vpython.org/video08.html>).

Sieh dir diese Videos an und realisiere damit (einfache) Programme zur Berechnung des elektrischen Feldes einfacher Objekte.

Antworten
(zu den „Kontrollpunkten“)

K1.1: $E_x \approx 1.13 \times 10^4 \text{ N/C}$.

K2.1: z-Achse sei Symmetrieachse. (1) $E_z \approx 4.55 \times 10^4 \text{ N/C}$, nach rechts gerichtet. (2) $F_z \approx -2.27 \times 10^{-4} \text{ N}$, nach links gerichtet. (3) $E_z = 0 \text{ N/C}$.

K3.1: (1) $E_z \approx 2.683 \times 10^6 \text{ N/C}$. (2) $E_z \approx 2.659 \times 10^6 \text{ N/C}$. (3) $E_z \approx 2.656 \times 10^6 \text{ N/C}$. (4) $E_z \approx 2.696 \times 10^6 \text{ N/C}$.

K4.1: (1) $Q \approx 2.08 \times 10^{-5} \text{ C}$. (2) $E \approx 3 \times 10^3 \text{ N/C}$.

Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

Ende

Folien zusammengestellt von Günther Lang

Es folgt: Teil 4 - Elektrisches Potenzial