Moderne Mechanik

Teil 2

Das Prinzip Impuls (en: *linear momentum*)

Ziele

Nach Durchsicht dieser Folien solltest du in der Lage sein,

- sowohl iterative als auch analytische Techniken anzuwenden, um die zukünftige Bewegung eines Systems vorherzusagen, das einer konstanten (Netto-) Kraft ausgesetzt ist,
- einen iterativen Ansatz zur Vorhersage des zukünftigen Impulses eines Objekts anzuwenden, das einer variierenden (Netto-) Kraft ausgesetzt ist,
- und eine Kraft zu berechnen, die von einer Feder auf ein Objekt ausgeübt wird, welches mit ihr verbunden ist.

Übersicht

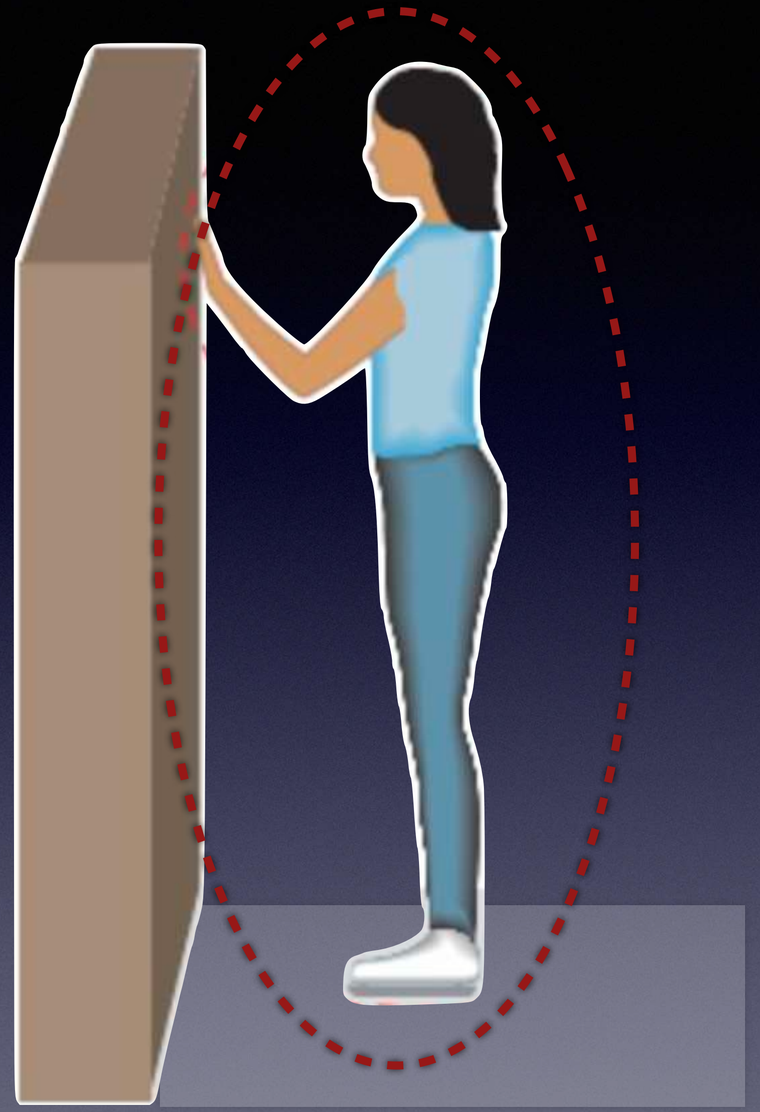
- Das Prinzip Impuls
- Schnittprinzip, -Diagramm
- Große Kräfte und kleine Zeitspannen
- Vorhersage der Zukunft
- Iterative Vorhersage bei konstanter Krafteinwirkung
- Analytische Vorhersage bei konstanter Krafteinwirkung
- Iterative Vorhersage bei veränderlicher Krafteinwirkung
- Iterative Berechnungen mit einem Computer
- Relativistische Bewegung
- Antworten (zu den „Kontrollpunkten“)
- Nachwort

Das Prinzip Impuls

In vielen realen Situationen ändert sich der Impuls (und damit zumeist auch die Geschwindigkeit) eines sich bewegenden Objekts aufgrund der Wechselwirkungen des Objekts mit seiner Umgebung ständig. Um die Bewegung eines solchen Systems vorherzusagen, müssen wir in der Lage sein, die Beziehung zwischen Interaktion und Impulsänderung mathematisch auszudrücken. Das „**Prinzip Impuls**“ stellt eine **quantitative Verbindung** zwischen der **Stärke der Interaktion** (Kraft) und der **Änderung des Impulses** her.

Das „**Prinzip Impuls**“ ist das erste von **drei Grundprinzipien der Mechanik**, die es zusammen ermöglichen, ein sehr breites Spektrum von realen Phänomenen vorherzusagen und zu erklären. Die anderen beiden Grundprinzipien, auf die wir stoßen werden, sind das der **Energie** und des **Drehimpuls**. Ein solch grundlegendes Prinzip ist ein leistungsfähiges Werkzeug, weil es **in jeder Situation gilt**. In seiner allgemeinsten Form drückt ein grundlegendes Prinzip die Idee aus, dass bestimmte Quantitäten erhalten, „konserviert“ werden; das heißt, dass sich der **Gesamtwert seiner Menge im Universum nicht ändert**. Um detailliert vorhersagen zu können, was mit einem System passieren wird, werden wir das Prinzip oft in einer Form verwenden, bei der die Änderung einer Größe, z. B. Impuls, mit den Details der Interaktion, welche die Änderung verursacht, in Verbindung gebracht wird.

Das Prinzip Impuls setzt eine Wechselwirkung quantitativ mit einer Impulsänderung in Beziehung. Um eine Impulsänderung zu analysieren, müssen wir die Objekte, deren Impulsänderung wir kennen möchten, genau angeben. Ein oder mehrere Objekte können als ein „**System**“ betrachtet werden. Alles, was nicht zu diesem System gehört, ist Teil der „**Umgebung**“. Ganz gleich, welches System wir wählen, durch anwenden des Impulsprinzips kann das Verhalten des Systems korrekt vorhergesagt werden.



Eine Schlittschuhläuferin stößt sich von einer Wand ab. Wenn wir die Läuferin als System wählen (gekennzeichnet durch die gestrichelte Linie), sind die Wand, das Eis, die Luft und die Erde Teil der Umgebung.

Das Prinzip Impuls ist auch als **zweites Newtonsches Gesetz** bekannt. Es wiederholt und erweitert Newtons erstes Gesetz in einer quantitativen, kausalen Form, die zur Vorhersage des Verhaltens von Objekten verwendet werden kann. Seine Gültigkeit wurde durch eine Vielzahl von Beobachtungen und Experimenten bestätigt.

„Die Impulsänderung eines Systems (die **Wirkung**) ist gleich der auf das System wirkenden resultierenden (Netto-) **Kraft** und der **Dauer** der Wechselwirkung (der **Ursache**). Das Zeitintervall muss so klein sein, dass die Kraft während dieses Zeitintervalls nahezu konstant ist.“

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t$$

„Wenn auf einen Körper eine (Netto-) Kraft einwirkt, ist die Beschleunigung des Körpers multipliziert mit seiner Masse gleich der (Netto-) Kraft.“

Zweites Newtonsches Bewegungsgesetz

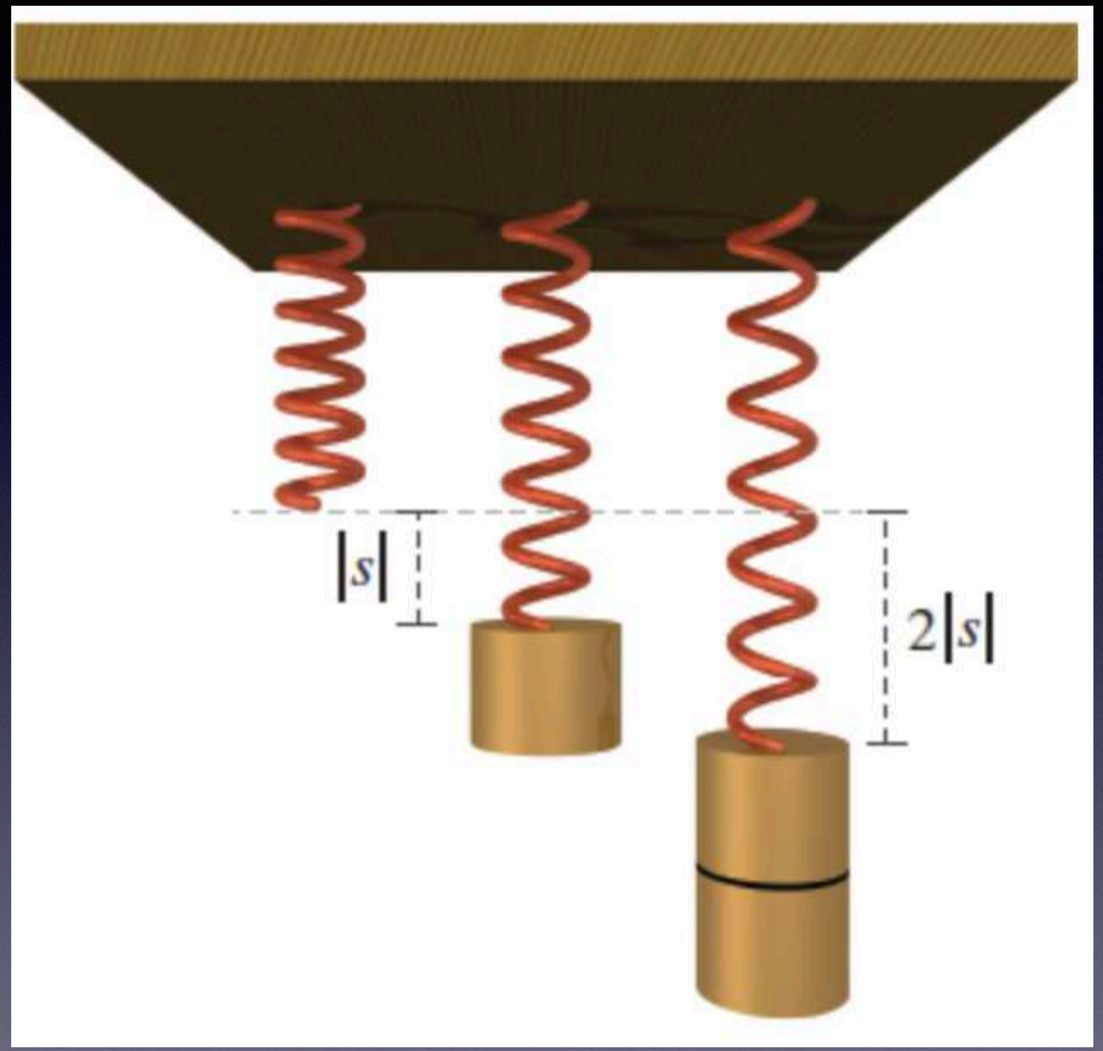
Wissenschaftler und Ingenieure verwenden das Konzept der „**Kraft**“, um die Wechselwirkungen zwischen zwei Objekten zu quantifizieren. Kraft ist ein **Vektor**, denn eine Kraft hat einen Betrag und wird in eine bestimmte Richtung ausgeübt. Beispiele für Kräfte sind:

- Die abstoßende elektrische Kraft zwischen zwei Protonen;
- Die anziehende Gravitationskraft, welche die Erde auf dich ausübt;
- Die Kraft einer zusammengedrückten Feder auf deine Hand;
- Die Kraft, welche die expandierenden Gase eines Raketentriebwerks auf ein Raumfahrzeug ausüben.

Eine einfache Möglichkeit, die Kraft zu messen, besteht darin, die Dehnung oder Kompression einer Feder zu verwenden. Hängen wir *ein* Gewicht an eine Feder, so wird die Feder um $s\,\mathrm{m}$ gedehnt. Hängen wir zwei solcher Gewichte an die Feder, so sehen wir, dass die Feder doppelt so stark gedehnt wird ($2s\,\mathrm{m}$).

Die **SI-Einheit** der Kraft ist das **Newton**, abgekürzt als **N**. Ein Newton entspricht ungefähr der Gravitationskraft der Erde auf einen kleinen Apfel. Wirkt auf ein Objekt der Masse von einem Kilogramm für die Dauer einer Sekunde die Kraft von einem Newton ein, so erhöht sich die Geschwindigkeit des Objekts um einen Meter pro Sekunde (bei kleinen Geschwindigkeiten).

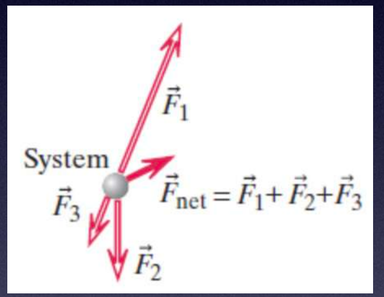
Animation zu Hookes Law
by University of Colorado, Boulder



Die Dehnung einer Feder ist ein Maß für die wirksame Kraft.

Die **resultierende (Netto-) Kraft**, die zu einem bestimmten Zeitpunkt auf ein System wirkt, ist die **vektorielle Summe <u>aller</u> Kräfte**, die zu diesem Zeitpunkt von allen Objekten in der Umgebung **<u>auf</u> das System ausgeübt** werden.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$



Die auf das System einwirkenden Kräfte werden als **externe Kräfte** bezeichnet. Es kann **systeminterne Kräfte** geben, die von einem Objekt des Systems auf ein anderes Objekt des Systems ausgeübt werden, aber solche internen Kräfte können den Impuls des Systems <u>nicht</u> verändern.

Das Ausmaß der auf ein Objekt einwirkenden Wechselwirkung umfasst sowohl die Stärke der Wechselwirkung, ausgedrückt als resultierende (Netto-) Kraft $\overrightarrow{F}_{\text{net}}$, als auch die Dauer Δt der Wechselwirkung. Eine größere Kraft oder eine längere Kraftanwendung führt zu einer größeren **Impulsänderung** (en: *change of momentum)*. Das Produkt aus einer Kraft und einem Zeitintervall wird auch als **Kraftstoß** (en: *impulse*) bezeichnet:

$$\text{Kraftstoss} = \overrightarrow{\text{F}}_{\text{net}}\Delta\text{t}, \text{ mit } \Delta t \text{ klein}$$

Die Impulsänderung eines Systems entspricht damit dem auf das System wirkenden Kraftstoß.

Kontrollpunkt 1

Ein Tennisball mit Impuls $\vec{p}_i = \langle -2.8, 0, 0 \rangle \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ wird ohne Betragsänderung seines Impulses an einer Wand reflektiert, so dass $\left|\vec{p}_f\right| = \left|\vec{p}_i\right|$ gilt. Seine Masse beträgt $m = 56 \ \mathrm{g}$.

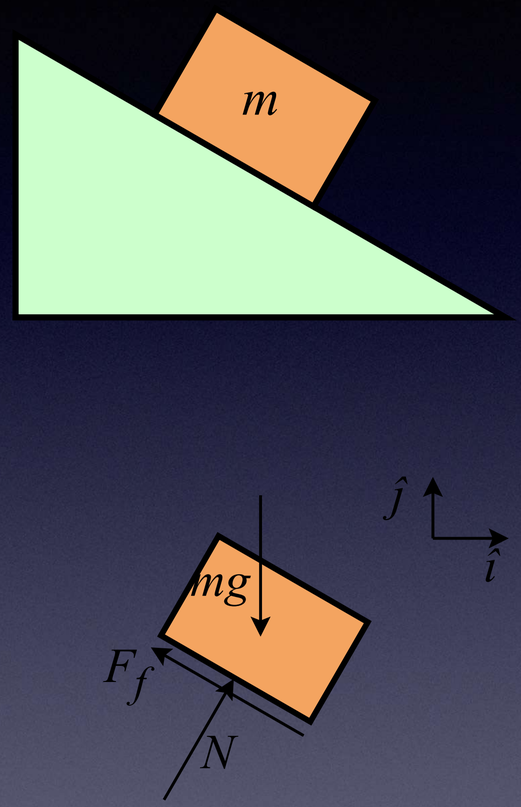
1. Wie groß war der durch die Wand ausgeübte Kraftstoß (Vektor)?

2. Wie groß war die Geschwindigkeit des Balls vor und nach dem Aufprall auf die Wand?

3. Gib eine plausible Schätzung für die Dauer Δt der Interaktion mit der Wand und skizziere den Gang deiner Überlegungen.

Schnittprinzip, -Diagramm

Das **Schnittprinzip** (en: *free-body principle/-diagram*) ist ein unbegrenzt anwendbares und grundlegendes Prinzip. Interessierende Objekte werden gedanklich aus ihrer Umgebung herausgelöst oder **freigeschnitten**, wesentliche Wechselwirkungen mit der Umgebung definiert und die Objekte so einer Analyse zugänglich gemacht. Die Schnittführung wird dabei der jeweiligen Aufgabenstellung angepasst. Das Objekt kann ein Festkörper, eine Flüssigkeit, ein Gas oder ein System aus solchen sein.



Block auf einer schiefen Ebene (oben) und Darstellung der auf den Block wirkenden externen Kräfte (unten). Quelle: Wikipedia.

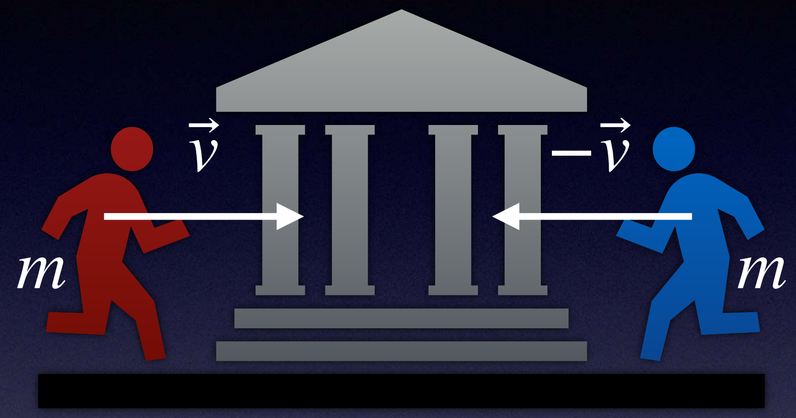
Kontrollpunkt 2

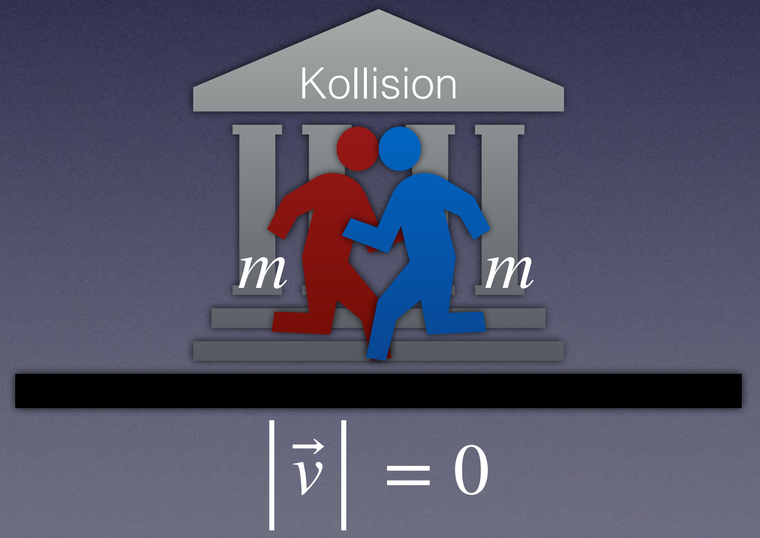
Zwei Studenten, die zu spät zu einer Vorlesung kommen, rennen so schnell sie können in entgegengesetzte Richtungen zur Uni. Unmittelbar vor dem Eingang zum Hörsaal stoßen sie frontal zusammen und kommen zum Stillstand. Wir wählen den *roten* Studenten als „System“:

1. Erstelle eine Liste der externen Kräfte, welche auf „das System“ zum Zeitpunkt der Kollision einwirken.

2. Welche können vernachlässigt werden oder heben sich gegenseitig auf?

3. Was wäre der Unterschied, falls beide Studenten zu *einem* System gehörten?





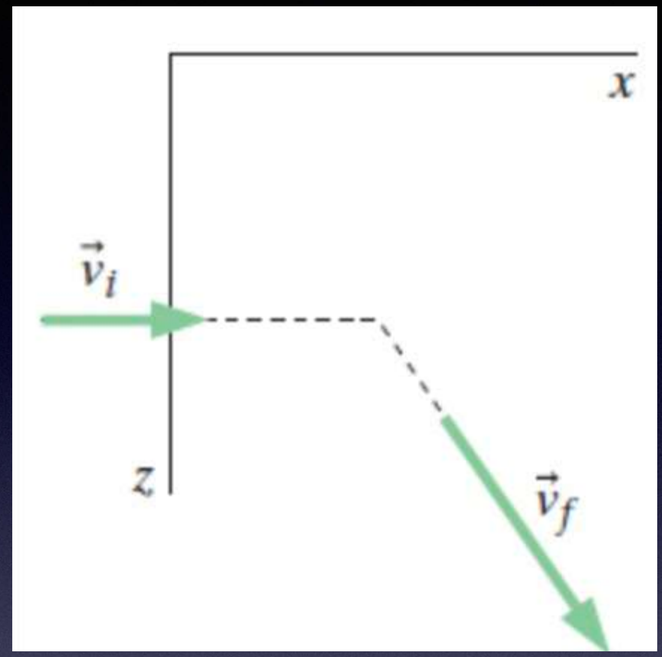
Quelle: Eigene Darstellung.

Große Kräfte und kleine Zeitspannen

Das Prinzip Impuls kann ein leistungsfähiges Werkzeug für die Analyse realer Ereignisse sein. Wir werden eine Situation betrachten, in der eine große Kraft für eine sehr kurze Zeit auf ein System einwirkt und den Impuls des Systems signifikant verändert. Dabei machen wir z. B. die vereinfachende Annahme, dass die auf das System einwirkende (Netto-) Kraft während der kurzen Zeit der Wechselwirkung konstant ist. Durch **Annahmen und Näherungen** schaffen wir das „**Modell**“ eines beliebigen physikalischen Systems. Die Erstellung und Verwendung von Modellen ist **eine zentrale Aufgabe der Physik**, und die Kriterien für ein „gutes“ physikalisches Modell hängen davon ab, wie wir das Modell verwenden wollen. Dabei geht es insbesondere auch darum zu **entscheiden**, **welche Wechselwirkungen** in das Modell eines realen physikalischen Systems **einbezogen** werden müssen und welche sinnvoller Weise **ignoriert** werden können.

Bei einem Hockeyspiel sehen wir einen $0.16\,\mathrm{kg}$ schweren Puck mit $\vec{v}_i = \langle 20,0,0 \rangle\ \mathrm{m/s}$ über das Eis gleiten. Ein Spieler trifft den Puck mit einem Hockeyschläger hart. Der Schläger bricht, und die Bewegungsrichtung des Pucks ändert sich in $\vec{v}_f = \langle 20,0,31.7 \rangle\ \mathrm{m/s}$. Von Belastungsexperimenten wissen wir, dass derartige Hockeyschläger bei einer Kraft von etwa $F_b = 1000\,\mathrm{N}$ brechen.

Im Folgenden wollen wir die Frage klären, wie lange der Puck ungefähr in Kontakt mit dem Hockeyschläger war.



Draufsicht auf die Bahn eines Pucks, der von einem Hockeyschläger getroffen wird. Unter der Annahme unseres üblichen Koordinatensystems mit *y*-Achse vertikal nach oben, liegt die Eisfläche in der *xz*-Ebene. Der Aufprall erfolgt dort, an der die Spur ihre Richtung ändert.

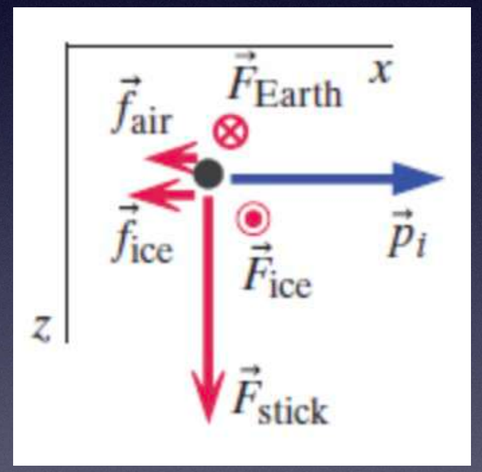
Dieses Problem lässt sich nicht einfach durch Einsetzen von Zahlen in eine Gleichung lösen. Stattdessen müssen wir, wie so oft, von einem grundlegenden Prinzip ausgehen und uns vorwärts arbeiten, bis sich die Lösung ergibt. Wir beginnen damit, das Prinzip Impuls aufzuschreiben, das die Änderung des Impulses $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ eines Systems mit dem Kraftstoß $\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t$ in Beziehung setzt. Wenn wir sowohl die Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ des Pucks als auch die auf ihn ausgeübte resultierende (Netto-) Kraft $\overrightarrow{F}_{\text{net}}$ ermitteln können, sind wir in der Lage, die Kontaktzeit Δt abzuleiten.

- System: (Hockey-) Puck
- Umgebung: Erde, Eis, Luft und Hockeyschläger
- Initiale Zeit: Erster Kontakt zwischen Hockey-Schläger und Puck
- Finale Zeit: Bruch des Hockey-Schlägers

$$\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = 0.16\left(\langle 20,0,31.7\rangle - \langle 20,0,0\rangle\right)\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = \langle 0,0,5.072\rangle\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$



Externe, auf den Puck während des Aufpralls des Hockey-Schlägers wirkende Kräfte. Der Standpunkt befindet sich oberhalb des Eises und blickt auf die *xz* -Ebene hinunter.

Wir erkennen, dass sich nur die *z*-Komponente für den Impuls des Pucks geändert hat. Also muss der Kraftstoß in dieselbe Richtung, die *z*-Richtung, gegangen sein.
Folgerungen und Annahmen:

1. Das bedeutet, dass die nach unten gerichtete Gravitationskraft der Erde und die nach oben gerichtete Kraft des Eises gleich groß und entgegengesetzt sind (keine Impulsänderung in y-Richtung);

2. Die Reibungskräfte von Luft und Eis vernachlässigt werden können (keine Impulsänderung in x-Richtung über die sehr kurze Kontaktzeit);

3. Damit verbleibt als externe Kraft die von dem Hockey-Schläger ausgeübte Kraft, und es gilt $\overrightarrow{F}_{\text{net}} \approx \overrightarrow{F}_{\text{stick}} = \langle 0,0,F_z \rangle$;

4. Für die Dauer des Kontakts nehmen wir $\left|\overrightarrow{F}_{\text{net}}\right| \approx \left|\overrightarrow{F}_{\text{stick}}\right| \approx F_b$ (Bruchgrenze) an.

Da der Kraftstoß ausschließlich in z-Richtung erfolgt, genügt es, die *z*-Komponente der Impulsänderung zu betrachten:

$$\Delta p_z = p_{f,z} - p_{i,z} = F_{\mathrm{net,z}} \Delta t \approx F_b \Delta t$$

Und damit erhalten wir für Δt folgende Näherung für die Dauer des Kontakts:

$$\Delta t \approx \frac{\Delta p_z}{F_b} = \frac{5.072}{1000}\,\mathrm{s} \approx 0.005\,\mathrm{s}$$

Ob das zuvor berechnete Ergebnis für die Kontaktzeit Δt „**richtig**“ im physikalischen Sinne ist, können wir nicht wissen. Allerdings können wir überprüfen, ob es wenigstens „**plausibel**“ ist. Und wir benutzen zur Einschätzung seiner Plausibilität nicht das Prinzip Impuls, sondern davon unabhängige Faktoren:

1. Die sehr kurze Kontaktzeit stimmt mit dem überein, was wir hören: ein scharfes, kurzes Krachen.

2. Zur weiteren Überprüfung überlegen wir, wie weit sich der Puck innerhalb von Δt bei konstanter Geschwindigkeit $\left|\vec{v}_i\right| = 20\,\mathrm{m/s}$ bewegt. Wir erhalten hierfür den Wert 10 cm (Länge gebogener Eishockey-Kellen ca. 35 cm).

Die Größenordnung des Wertes für Δt müsste damit „plausibel“ sein.

Für den Eishockey-Puck haben wir ein „**idealisiertes**“ **Modell** einer realen physikalischen Situation erstellt. Damit meinen wir Modelle, die einfache, klare, reduzierte Situationen beinhalten, und damit **frei von unübersichtlicher Komplexität** sind. Ein idealer Puck gleitet „ewig“ über eine glatte Eisfläche, aber ein echter Puck, der auf echtem Eis gleitet, kommt irgendwann zum Stillstand.

Das Verhalten idealisierter Modelle ermöglicht es uns, einfache Bewegungsmuster zu untersuchen und zu lernen, welche Faktoren dabei wichtig sind. Sobald wir diese Faktoren verstehen, können wir unsere Modelle überarbeiten und erweitern, indem wir mehr Wechselwirkungen und Komplexität einbeziehen, um zu sehen, welche Auswirkungen diese haben. Ein wichtiger Aspekt der physikalischen Modellierung ist, dass wir geeignete Annäherungen und Annahmen treffen, um die oft unübersichtliche, reale Situation so weit zu vereinfachen, dass wir grundlegende Prinzipien wie das Impulsprinzip anwenden können.

Kontrollpunkt 3

1. Weshalb wurden im Beispiel des Eishockey-Pucks nur die *z*-Komponenten von $\Delta\vec{p}$ und $\overrightarrow{F}_{\text{net}}$ bei der Ableitung von Δt verwendet?

Vorhersage der Zukunft

Der Impuls eines Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt hängt von seiner (Vor-) Geschichte ab, d. h. von den Wechselwirkungen, die es in der Vergangenheit erfahren hat. Das **Prinzip Impuls** bezieht sich jedoch nur auf den **momentanen Impuls** eines Objekts und seinen zukünftigen Wert, als Resultat der **Einwirkung** einer **momentanen resultierenden** (Netto-) **Kraft**. Die Tatsache, dass die gesamte Vorgeschichte eines Objekts, seine Interaktionen, in seinen momentanen Impuls eingeflossen sind, ist äußerst wichtig. Nur deshalb können wir einen beliebigen Zeitpunkt als Anfangszeitpunkt wählen und nur die Wechselwirkungen des Objekts mit seiner Umgebung zu diesem Zeitpunkt berücksichtigen, um seinen zukünftigen Impuls vorherzusagen. **Müssten wir alle Details aller vergangenen Wechselwirkungen eines Objekts kennen, wäre eine Vorhersage der zukünftigen Bewegung eines Objekts meist unmöglich!**

Kontrollpunkt 4

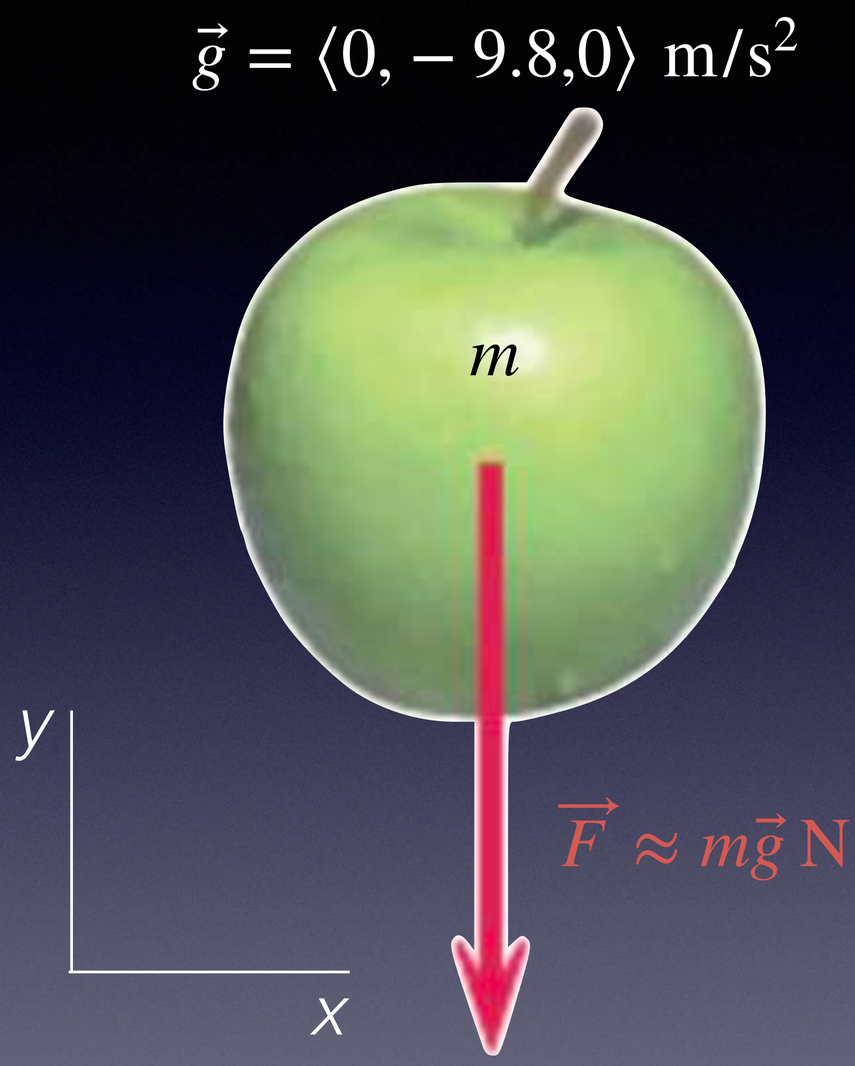
Eine Fallschirmspringerin springt aus einem Flugzeug und ihr Fallschirm öffnet sich. Eine Zeit lang fällt sie immer schneller. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird die auf sie und ihren Fallschirm wirkende nach oben gerichtete Widerstandskraft so groß, dass sie der nach unten gerichteten Gravitationskraft der Erde genau entgegengesetzt ist - resultierende (Netto-) Kraft ab jetzt Null:

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch (mehrere möglich) (1) Sie wird schweben, ohne sich nach oben oder unten zu bewegen. (2) Sie wird mit einer konstanten Geschwindigkeit fallen. (3) Sie befindet sich in einem Zustand der Schwerelosigkeit.

Iterative Vorhersage bei konstanter Krafteinwirkung

Das Prinzip Impuls besagt, dass, wenn sich der Impuls eines Systems ändert, eine resultierende (Netto-) Kraft ungleich Null auf das System ausgeübt worden sein muss. Der einfachste Fall ist dabei der einer **konstanten Kraft**: eine Kraft, deren **Größe** und **Richtung** sich **nicht ändert**, obwohl sich die Position und der Impuls des Systems kontinuierlich verändern. In der realen Welt gibt es nur sehr wenige Situationen, in denen die Kraft auf ein System wirklich konstant ist. Dennoch kann dieser Ansatz eine gute Näherung für einige reale Phänomene sein. Ein **Beispiel** für eine annähernd konstante Kraft ist die **Gravitationskraft**, die von der Erde auf ein Objekt **nahe der Erdoberfläche** ausgeübt wird.

Im Allgemeinen hängt die Gravitationswechselwirkung zwischen zwei Objekten von der Entfernung zwischen den Objekten ab, und ihre Größe und Richtung variieren mit der Position der Objekte. In der Nähe der Erdoberfläche gilt jedoch in etwa, dass ein Objekt von der Erde durch eine **Gravitationskraft** mit $9.8\,\mathrm{N/kg}$ angezogen wird. Wir können diese Kraft als **annähernd konstant in Größe und Richtung** betrachten, auch wenn sich das Objekt bewegt.



Die Anziehungskraft $\vec{F}$ der Erde auf einen Apfel.

Die allgemeinste Methode zur Vorhersage der Bewegung eines Objekts, das mit seiner Umgebung interagiert, ist die Verwendung eines iterativen Ansatzes. „**Iterieren**“ bedeutet „**wiederholen**“ oder „**erneut ausführen**“. Die Grundidee, die wir bei dieser Vorgehensweise verwenden werden besteht darin, das interessierende **Zeitintervall in viele sehr kleine Zeitintervalle aufzuteilen** und das **Prinzip Impuls iterativ** auf die aufeinander folgenden Intervalle **anzuwenden**. Die Zeitintervalle müssen dabei so klein sein, dass sich weder die Geschwindigkeit des Objekts noch die auf es wirkende resultierende (Netto-) Kraft in einem Zeitschritt signifikant ändert.

Initialisierung: $\vec{r}_0 = \text{Anfangsposition}, \vec{p}_0 = \text{Anfangsimpuls}, n = 0$

Einwirkende (Netto-) Kraft berechnen: $\vec{F}_{n,\text{net}}$

Impuls aktualisieren: $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n + \vec{F}_{n,\text{net}}\Delta t$

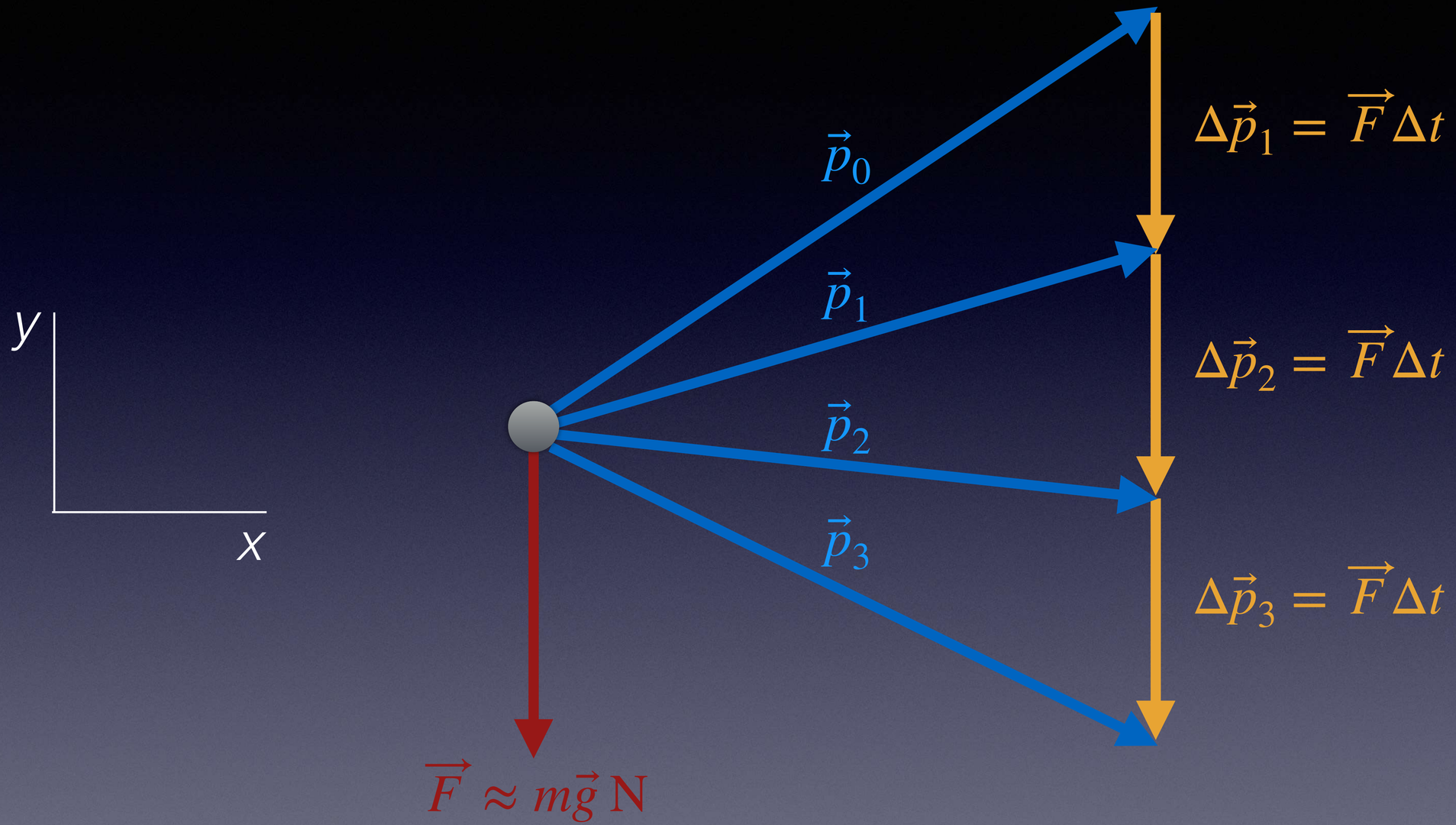


Iteration

Geschwindigkeit berechnen: $\vec{v}_{n+1} = \vec{p}_{n+1}/m$

Position aktualisieren: $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$

Iterationszähler aktualisieren: $n = n + 1$



Schrittweise Änderung des Impuls $\vec{p}$ unter Einwirkung einer konstanten (Netto-) Kraft $\vec{F}$. Quelle: eigene Darstellung.

Kontrollpunkt 5

1. Gegeben: Objekt mit Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, initialer Position $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle\ \mathrm{m}$ und initialem Impuls $\vec{p}_0 = \langle 10,10,0 \rangle\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$. Auf dieses Objekt wirke die konstante (Netto-) Kraft $\vec{F} = \langle 0, -10,0 \rangle\ \mathrm{N}$. (1) Berechne iterativ (wie zuvor skizziert) die Position des Objekts für $t = 2\,\mathrm{s}$ und verwende dabei den Zeitschritt $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. (2) Wie 1, jedoch mit $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$. (3) Wie 1 und 2, jedoch mit $\vec{v}_{n+1} = 0.5\left(\vec{p}_n + \vec{p}_{n+1}\right)/m$. (4) Interpretiere die Ergebnisse.

2. Ein Apfel fällt unter Wirkung der Gravitationskraft auf die Erde zu. Damit wächst sein Impuls kontinuierlich an. Weshalb bleibt der „Impuls im Universum“ trotzdem konstant?

Analytische Vorhersage bei konstanter Krafteinwirkung

Im Gegensatz zu einer iterativen Lösung liefert die **analytische Lösung** eines Problems eine **mathematische Funktion**, die den Wert der interessierenden Größe als **Funktion der Zeit** angibt. Falls eine solche Funktion existiert, kann man sie verwenden, um Position oder Geschwindigkeit eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt direkt zu berechnen, anstatt viele iterative Schritte durchzuführen, um zu dem gesuchten Wert zu gelangen. Es ist fast immer nicht möglich, eine analytische Lösung zu erhalten, so dass **iterative Methoden allgemeiner anwendbar** sind. Eine Situation, in der eine analytische Lösung existiert, ist der Fall einer konstanten (Netto-) Kraft. Wir werden diese analytische Lösung herleiten, um den Ansatz und die Art der Ergebnisse zu veranschaulichen.

In der zuvor beschriebenen iterativen Lösung für die Bewegung eines Objekts haben wir die folgende Näherung für $\vec{v}_{n+1}$ verwendet:

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{p}_{n+1}/m$$

Weshalb haben wir nicht die (abgewandelte) Definitionsgleichung für die mittlere Geschwindigkeit benutzt?

$$\vec{v}_{n+1} \equiv \vec{v}_{\text{avg}} \equiv \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Dazu müsste $\vec{r}_{n+1}$ schon bekannt sein, wofür allerdings wiederum $\vec{v}_{n+1}$ benötigt würde. Die Art der Berechnung von $\vec{v}_{n+1}$ hat Einfluss auf die Genauigkeit der iterativen Lösung. Dieses Problem tritt bei der analytischen Lösung nicht auf.

Der Begriff „analytisch“ beschreibt eine Lösung, die symbolisch (algebraisch) geschrieben werden kann. In den meisten Fällen ist es nicht möglich, eine analytische Lösung für die Bewegung eines Systems zu finden. Wenn jedoch die (Netto-) Kraft auf ein System konstant ist, gelingt es, eine analytische Lösung der Form

$$\vec{r}(t) = \ldots$$

zu finden. Der Einfachheit halber beginnen wir bei $t = 0$, wodurch t an Stelle von Δt geschrieben werden kann.

Für „gewöhnliche“ Geschwindigkeiten, also für $\gamma \approx 1$ erhalten wir:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \overrightarrow{F}_{\text{net}} t, \text{ Aktualisierung des Impuls}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m} t, \text{ Aktualisierung der Geschwindigkeit}$$

$$\vec{v}_{\text{avg}} \equiv 0.5\left(\vec{v}_i + \vec{v}_f\right) = \vec{v}_i + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m} t, \text{ mittlere Geschwindigkeit im Intervall } [0,t]$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_{\text{avg}} t = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m} t^2, \text{ Aktualisierung der Position}$$

Um zu verdeutlichen, dass wir über eine analytische Lösung verfügen, können wir die Gleichungen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit ausdrücken, vorausgesetzt die (Netto-) Kraft ist konstant:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m}t^2, \text{ Position}$$

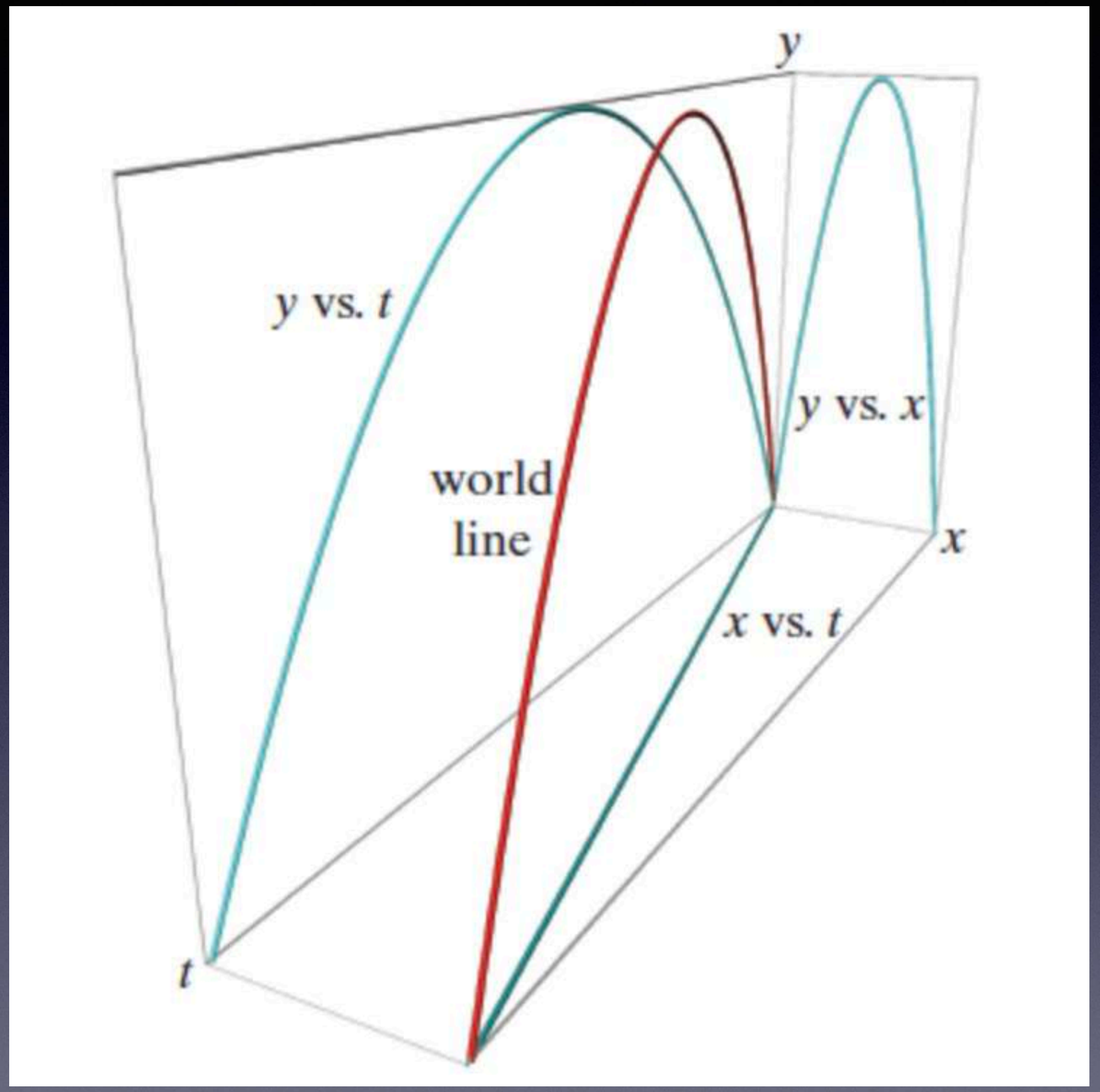
$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i + \frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m}t, \text{ Geschwindigkeit}$$

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\overrightarrow{F}_{\text{net}}}{m}, \text{ Beschleunigung (konstant)}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine **grafische Beschreibung der Bewegung** $\vec{r}(t)$ - rote Kurve, **Weltlinie** - in (hier) der *xy*-Ebene über die Zeit *t*. Die rote Kurve kann auf die verschiedenen Koordinatenebenen projiziert werden: Dann erhalten wir den Bewegungsablauf für $x = x\left(y\right)$, $x = x\left(t\right)$ und $y = y\left(t\right)$. Der Einfachheit halber wurde die *z*-Koordinate hier weggelassen.

Ganz allgemein sind Weltlinien ein Begriff aus der Relativitätstheorie und bezeichnen dort die Trajektorie eines Objekts in der vierdimensionalen Raumzeit.

Animation einer„Weltlinie“
by Web VPython



Die „Weltlinie“ der Flugkurve eines roten Balls und ihre Projektionen in die Koordinatenebenen.

Kontrollpunkt 6

1. Ein Fußball mit einer Masse von $0.45\,\mathrm{kg}$ befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der Oberfläche des Mondes am Ort $\vec{r}_i = \langle 0,0,0 \rangle\ \mathrm{m}$. Die Anziehungskraft des Mondes beträgt in der Nähe der Mondoberfläche $\vec{g} = \langle 0, -1.6,0 \rangle\ \mathrm{N/kg}$. Ein Astronaut kickt den Ball und verleiht ihm eine Anfangsgeschwindigkeit von $\vec{v}_i = \langle 15,15,0 \rangle\ \mathrm{m/s}$: (1) Welches sind die Koordinaten der höchsten Position, die der Ball erreicht? (2) Wie lange ist der Ball in der Luft, bevor er auf dem Boden aufschlägt? (3) Wie weit (horizontal) fliegt der Ball, bevor er auf dem Boden auftrifft?

Iterative Vorhersage bei veränderlicher Krafteinwirkung

Ein bekanntes Beispiel für eine **nicht konstante Kraft** ist diejenige, die von einer **gedehnten oder gestauchten Feder** ausgeübt wird. Die Größe dieser Kraft hängt von der Stärke der Dehnung oder Stauchung der Feder ab. Die Kraft ist entlang der Linie der Feder gerichtet.

Ein „**Kraftgesetz**“ beschreibt mathematisch, wie eine Kraft von der Situation abhängt. Für eine Feder wird experimentell festgestellt, dass die Kraft, die eine Feder auf einen an ihr befestigten Gegenstand ausübt, proportional zur Dehnung oder Stauchung im Vergleich zu ihrer Länge L_0 (Länge in unbelasteter, entspannter Ruhelage) ist.

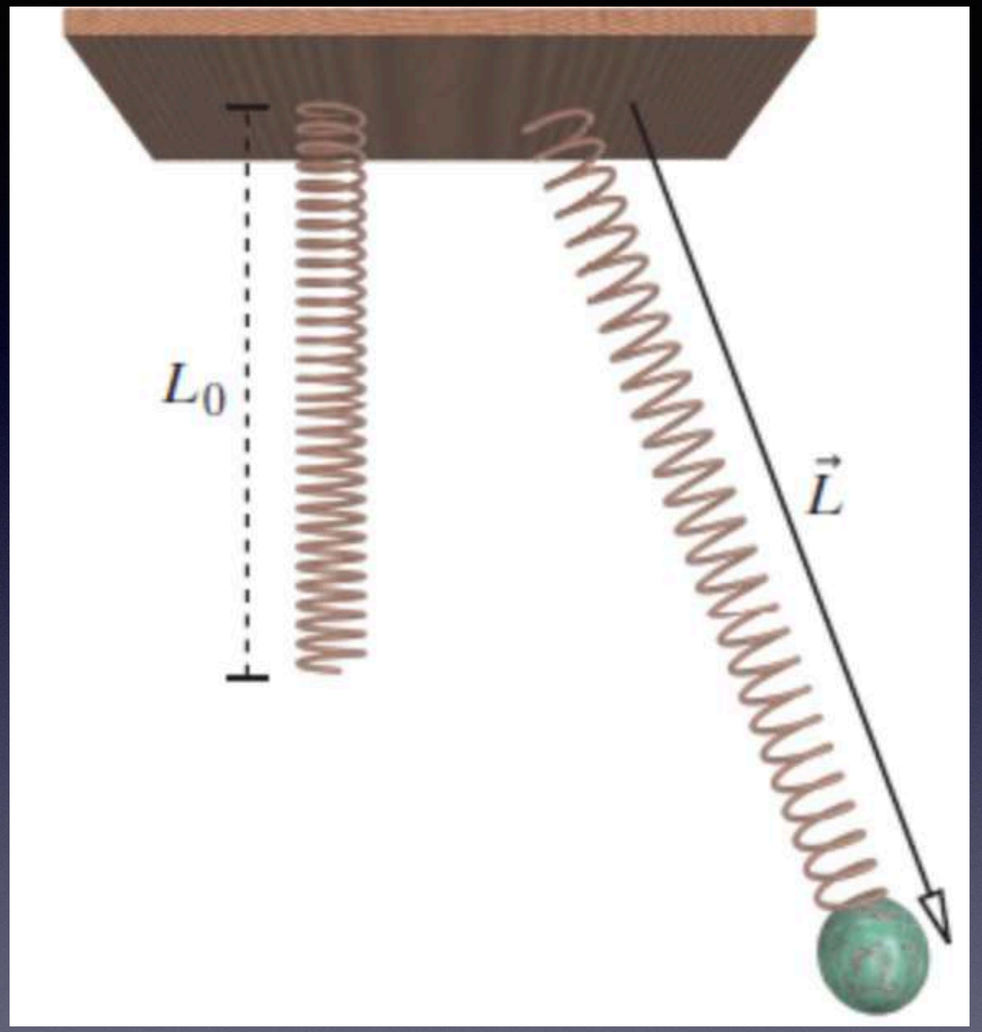
$$\vec{L} = \left|\vec{L}\right| \hat{L}$$

$$s = \left|\vec{L}\right| - L_0$$

$$\vec{F} = -k_s s \hat{L}$$

Die Längenänderung der Feder kann positiv (Dehnung) oder negativ (Stauchung) sein. Bei einer Dehnung wirkt $\vec{F}$ in Gegenrichtung von $\vec{L}$, bei einer Stauchung in Richtung von $\vec{L}$.

Animationen zu Hookes Law
by University of Colorado, Boulder



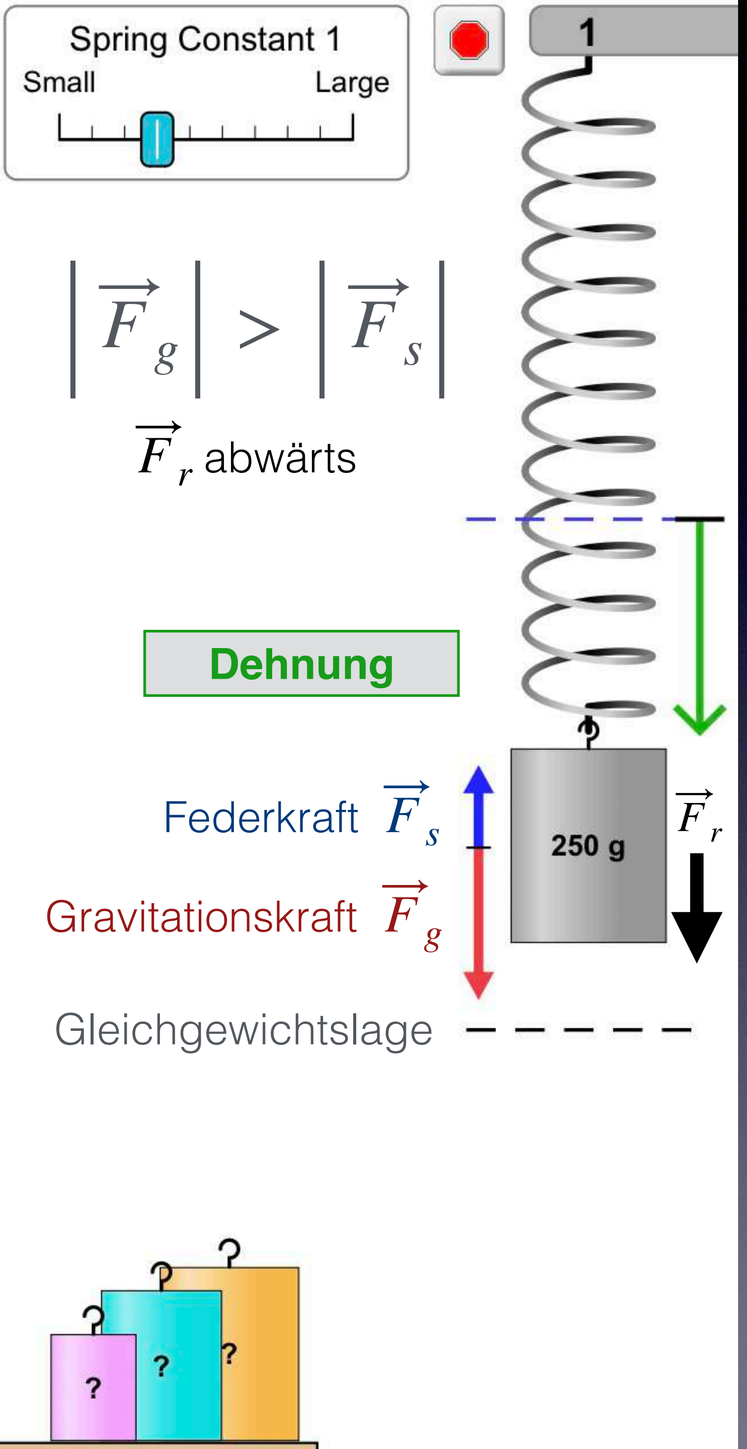
Fer Vektor $\vec{L}$ zeigt von dem Ort, an dem die Feder an der Decke befestigt ist, zum Ort der Masse. Der Pfeil ist zur Verdeutlichung im Diagramm versetzt. L_0 ist die Länge der entspannten Feder.

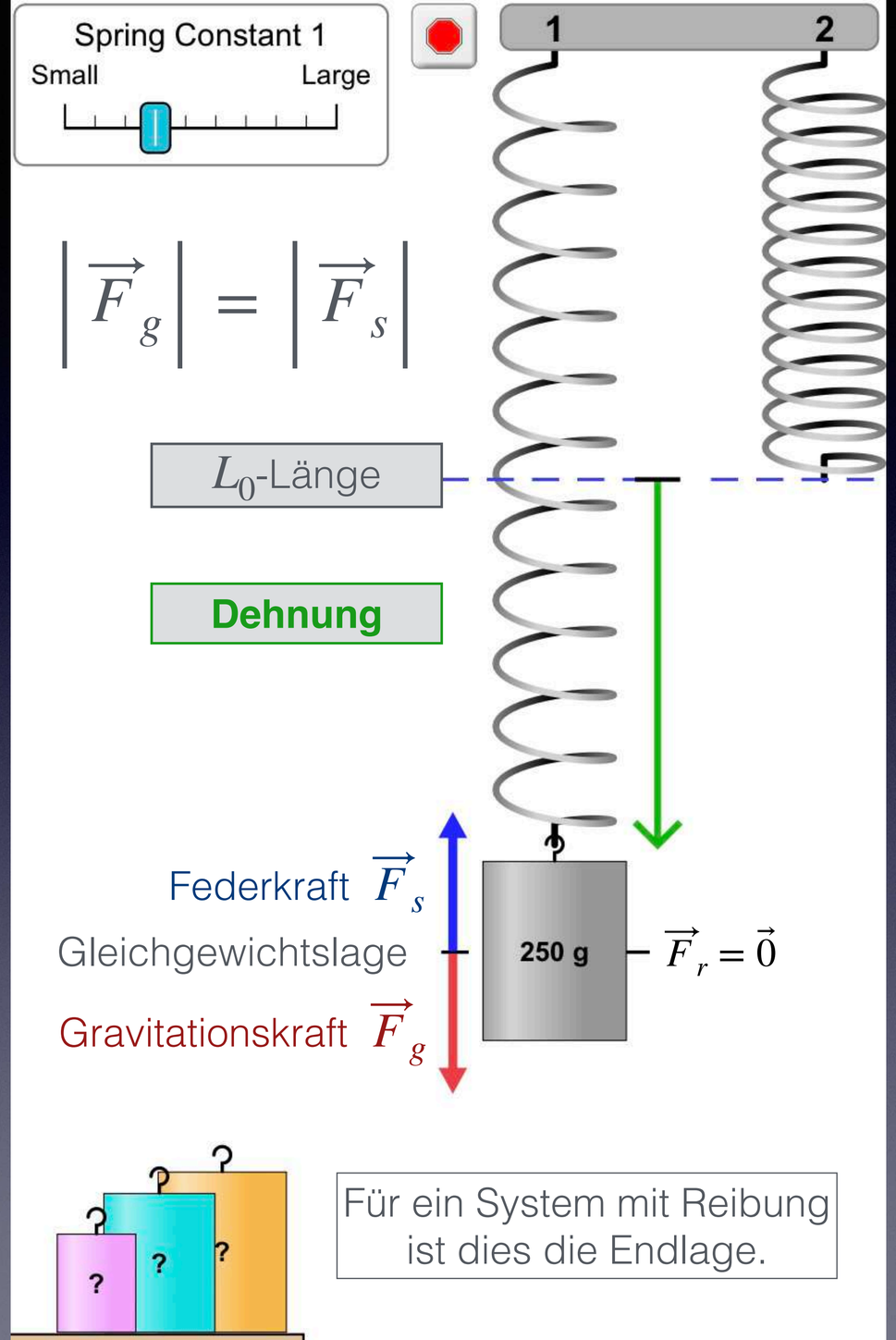
Kontrollpunkt 7

1. Angenommen, die Steifigkeit der in in der Grafik auf der vorangehenden Seite rechts dargestellten Feder beträgt $9\,\mathrm{N/m}$ und ihre entspannte Länge sei $21\,\mathrm{cm}$. Zu dem dargestellten Zeitpunkt befindet sich die grüne Masse an der Position $\langle 0.07, -0.33, 0 \rangle\ \mathrm{m}$ relativ zum Befestigungspunkt bei $\langle 0,0,0 \rangle\ \mathrm{m}$ der Feder. Wie groß ist die Kraft $\overrightarrow{F}$, welche die Feder in diesem Moment auf die grüne Masse ausübt?

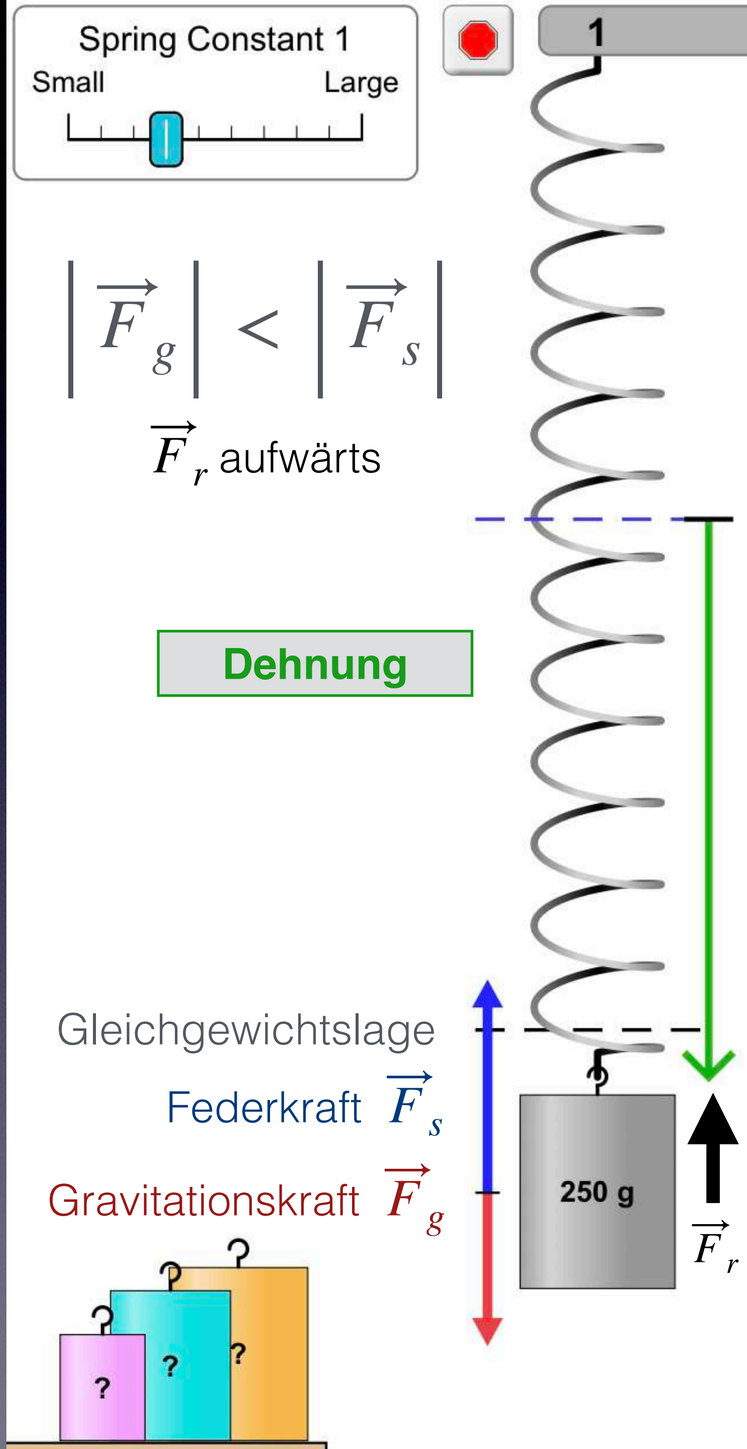
Animationen zu Massen und Federn
by University of Colorado, Boulder

Falls wir eine Masse am unteren Ende einer lotrecht hängenden Feder befestigen, ein wenig daran ziehen und sie dann loslassen, wird die Masse auf und ab schwingen. (Diese sich **wiederholende Bewegung** wird als „**periodisch**“ bezeichnet.) Wenn sich die Feder dehnt und zusammenzieht, ändert sich die von der Feder auf die Masse ausgeübte Kraft in Größe und Richtung. Außerdem wirkt eine konstante Gravitationskraft auf die Masse. Da sich die (Netto-) Kraft auf die Masse ständig ändert, können wir ihre Bewegung nicht in einem Schritt vorhersagen. Wir müssen das Prinzip Impuls **iterativ anwenden**, um Ort und Geschwindigkeit der angehängten Masse für jeden Zeitpunkt vorherzusagen.





Für ein System mit Reibung ist dies die Endlage.



Um die Bewegung der Masse berechnen zu können, müssen wir die Kenndaten der Feder L_0 und k_s kennen und wie folgt vorgehen:

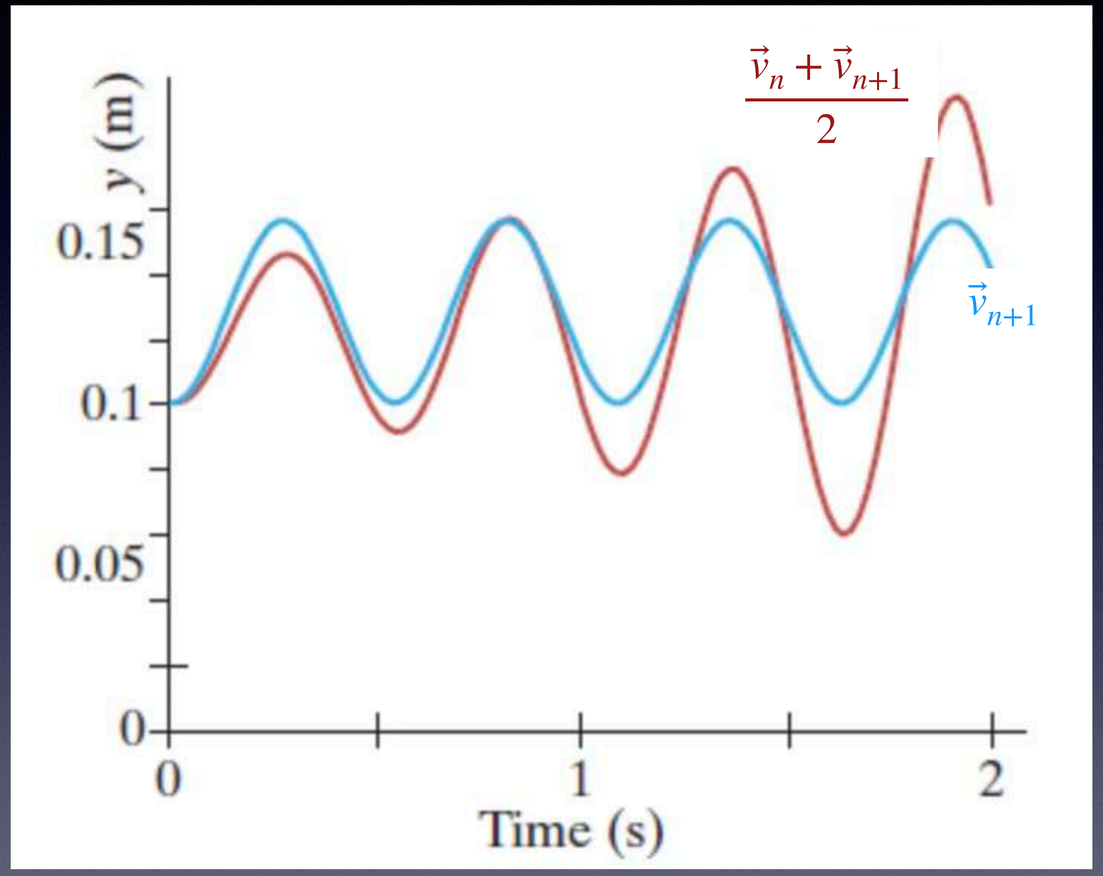
1. Anfangswerte: Position $\vec{r}_0$ und Impuls $\vec{p}_0$.

2. Iteration: Auslenkung $\overrightarrow{L}_n$, $\hat{L}_n$, $s_n = \left|\overrightarrow{L_n}\right| - L_0$, (Netto-) Kraft $\overrightarrow{F}_{n,\text{net}} = -k_s s_n \hat{L} + m\vec{g}$, Impuls $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n + \overrightarrow{F}_{n,\text{net}}\Delta t$, Geschwindigkeit $\vec{v}_{n+1} = \vec{p}_{n+1}/m$ und schließlich die neue Position $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$.

Dies ist exakt dieselbe Vorgehensweise wie bei der Berechnung der Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Kraft. Ausschließlich die Berechnung von $\overrightarrow{F}_{n,\text{net}}$ ist etwas aufwändiger.

Die Berechnung der Bewegung für ein einigermaßen realistisches Szenario sollte man einem Computer (-Programm) überlassen. Für die **Genauigkeit** des Ergebnisses ist insbesondere die Wahl des **Zeitschritts** Δt von entscheidender Bedeutung. Im Allgemeinen führt eine **Verringerung der Zeitschrittweite** Δt zu **genaueren Ergebnissen**, da dann die Annahme, dass $\overrightarrow{F}_{\text{net}}$ innerhalb des Zeitschritts annähernd konstant ist, eine gute Näherung ist. Für zu großes $\Delta t/T$ (Periode T) erhält man sehr rasch unrealistische Resultate. Es gibt keine allgemein gültige Regel für die Wahl eines „optimalen“ Zeitschritts. Ein Ansatz, um zu entscheiden, ob du einen geeigneten Wert für Δt gewählt hast, besteht darin, Δt deutlich zu verringern und zu sehen, ob sich die vorhergesagte Bewegung deutlich sichtbar verändert.

Bei der Aktualisierung der Position haben wir $\vec{v}_{n+1}$ und nicht $(\vec{v}_n + \vec{v}_{n+1})/2$ verwendet. In diesem Fall führt die Verwendung des arithmetischen Mittels (rote Kurve) zu einer weniger genauen Vorhersage: Die Oszillation wird in der realen Welt nicht immer größer werden! Hier sehen wir ein Beispiel dafür, dass das arithmetische Mittel nicht unbedingt die beste Methode ist, um die Durchschnittsgeschwindigkeit in einer iterativen Berechnung zu schätzen. In Kursen für Fortgeschrittene über computergestützte Modellierung lernt man hierzu spezielle numerische Techniken kennen. Für unsere Zwecke belassen wir es bei unserem sehr einfachen Ansatz.



Zwei Kurven mit z. B. der *y*-Position einer an einer Feder hängenden Masse. Wird $\vec{v}_{n+1}$ für die Neuberechnung der Position verwendet (blaue Kurve), so erhält man genauere Ergebnisse als bei Verwendung von Mittelwerten (rote Kurve).

Weshalb verwenden wir nicht die Infinitesimalrechnung, um die Bewegung physikalischer Systeme vorherzusagen. Erstens: Tatsächlich verwenden wir die Infinitesimalrechnung in ihrer grundlegendsten Form. Wir **addieren Schritt für Schritt** eine große Anzahl kleiner **Impulsänderungen** eines Objekts und eine große Anzahl kleiner **Verschiebungen** des Objekts über einen langen Zeitraum. Dies entspricht der **numerischen Auswertung eines Integrals**:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{p}_i \approx \int_i^f d\vec{p} = \int_i^f \overrightarrow{F}_{\text{net}} dt$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{r}_i \approx \int_i^f d\vec{r} = \int_i^f \vec{v}_{\text{avg}} dt$$

Wenn wir diese Summen mit **endlichen Zeitschritten** berechnen, nennen wir den Prozess **numerische Integration**. Die **Auswertung eines bestimmten Integrals** entspricht einer **unendlichen Anzahl von infinitesimal kleinen Zeitschritten** in einer **Summation.**

Zweitens: Die Bewegung der **meisten physikalischen Systeme** ist so **komplex**, dass sie nur durch **numerische Integration** vorhergesagt werden kann. Nur in einigen wenigen Spezialfällen liefert die Infinitesimalrechnung ein allgemeines Ergebnis. So kann eine analytische Lösung für die eindimensionale Bewegung des an einer Feder mit geringer Eigen-Masse befestigten Objekts abgeleitet werden. In nur geringfügig komplizierteren Situationen ist eine analytische Lösung jedoch oft nicht mehr möglich. Im Gegensatz dazu kann ein schrittweises Verfahren leicht auf viele Objekte in drei Dimensionen ausgedehnt werden. Es ist auch möglich, die Auswirkungen der verschiedenen Arten von Reibung und Dämpfung in eine iterative Berechnung einzubeziehen. Das ist der Grund, weshalb hier die schrittweise Vorhersagemethode verwendet wird: weil es sich um eine **leistungsfähige Technik** handelt, die in der modernen **Wissenschaft** und im **Ingenieurwesen** immer mehr an Bedeutung gewonnen hat, auch dank der **Verfügbarkeit leistungsfähiger Computer**.

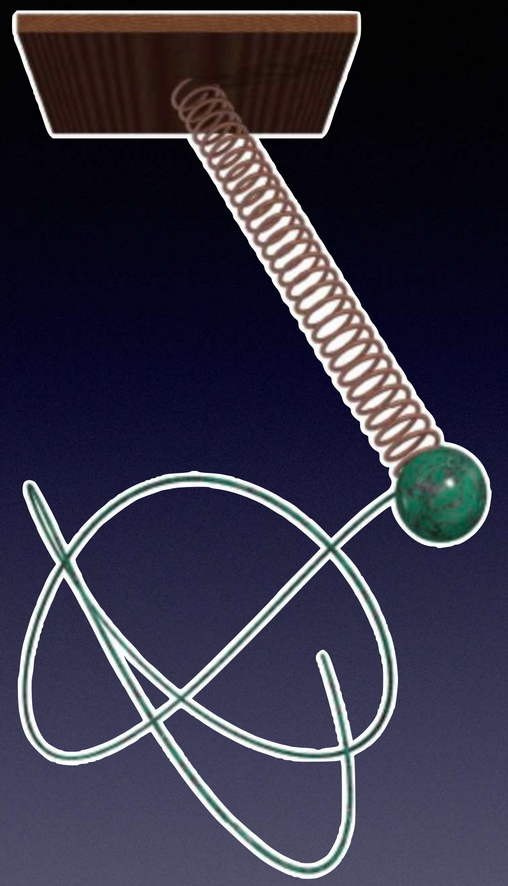
Kontrollpunkt 8

1. Bislang haben wir für die Federkraft $\vec{F} = -k_s s\hat{L}$ verwendet. Dabei ist die Kraft proportional zur Streckung s. Nach Anregung schwingt ein solches System sinusförmig mit konstanter Frequenz (harmonischer Oszillator). Beschreibe die Unterschiede und möglichen Folgen, falls wir $\vec{F} = -k_s s\left(1 + \frac{l}{k_s}s\right)\hat{L}$ mit $l \approx 0.2$ verwenden?

Iterative Berechnungen mit einem Computer

Das Iterationsschema ist zwar sehr einfach, aber die manuelle Durchführung ist trotzdem mühsam. Es lohnt sich, einen Computer zu programmieren, der diese Berechnungen wiederholt durchführt.

Allerdings: **Weder ein Computer noch dein Taschenrechner liefern „exakte“ Ergebnisse**. Gründe: Erstens, über den **Zeitschritt** Δt halten wir $\vec{F}_{\text{net}}$ konstant. Das ist in aller Regel nicht exakt richtig. Für sehr kleines Δt kann diese Annahme dennoch sehr gute Ergebnisse liefern. Zweitens, können reelle Zahlen (die in der Regel als „**Gleitkommazahlen**“ bezeichnet werden) nicht unendlich genau dargestellt werden. Obwohl der **Rundungsfehler** mit der Anzahl der Schritte zunimmt, kann man feststellen, dass die Berechnungen mit mehr und kleineren Schritten genauer sind.



Eine Momentaufnahme aus einer Computer-Simulation zur Berechnung und Animation der Bewegung eines Masse-Feder-Systems in 3D. Man erkennt, wie komplex die Bewegungen selbst eines solch einfachen Systems sein können. Dafür gibt es keine analytische Lösung.

Bei Handrechnung geht man in aller Regel einen Kompromiss zwischen der Genauigkeit und der für viele Iterationen benötigten Zeit ein. Da Computer im Vergleich dazu recht schnell sind, sollten bei einer Computer-Simulation viele kleinere Zeitschritte verwendet werden. Handelt es sich um eine **periodische Bewegung**, wie im Falle eines schwingenden Masse-Feder-Systems, ist es wichtig, einen **Zeitschritt** zu verwenden, der **viel kürzer ist als die Periode** der Bewegung. Eine Standardmethode zur **Überprüfung der Genauigkeit** einer Computer-Simulation besteht darin, den **Zeitschritt** zu **verringern** und die **Berechnung** zu **wiederholen**. Wenn sich die **Ergebnisse nicht wesentlich ändern**, war der ursprüngliche Zeitschritt ausreichend klein.

In unserem **Iterationsverfahren** verwenden wir die sogenannte **Euler-Cromer-Methode**, die die Genauigkeit dieser Vorhersagen erheblich verbessert. Das Hauptmerkmal dieser Methode ist die Reihenfolge der Schritte:

1. Berechnung der (Netto-) Kraft anhand der aktuellen Positionen,

2. Verwenden dieser Kraft zur Aktualisierung (Kraftstoß) des (System-) Impulses,

3. Aktualisierung der Position mit dem neuen (System-) Impuls.

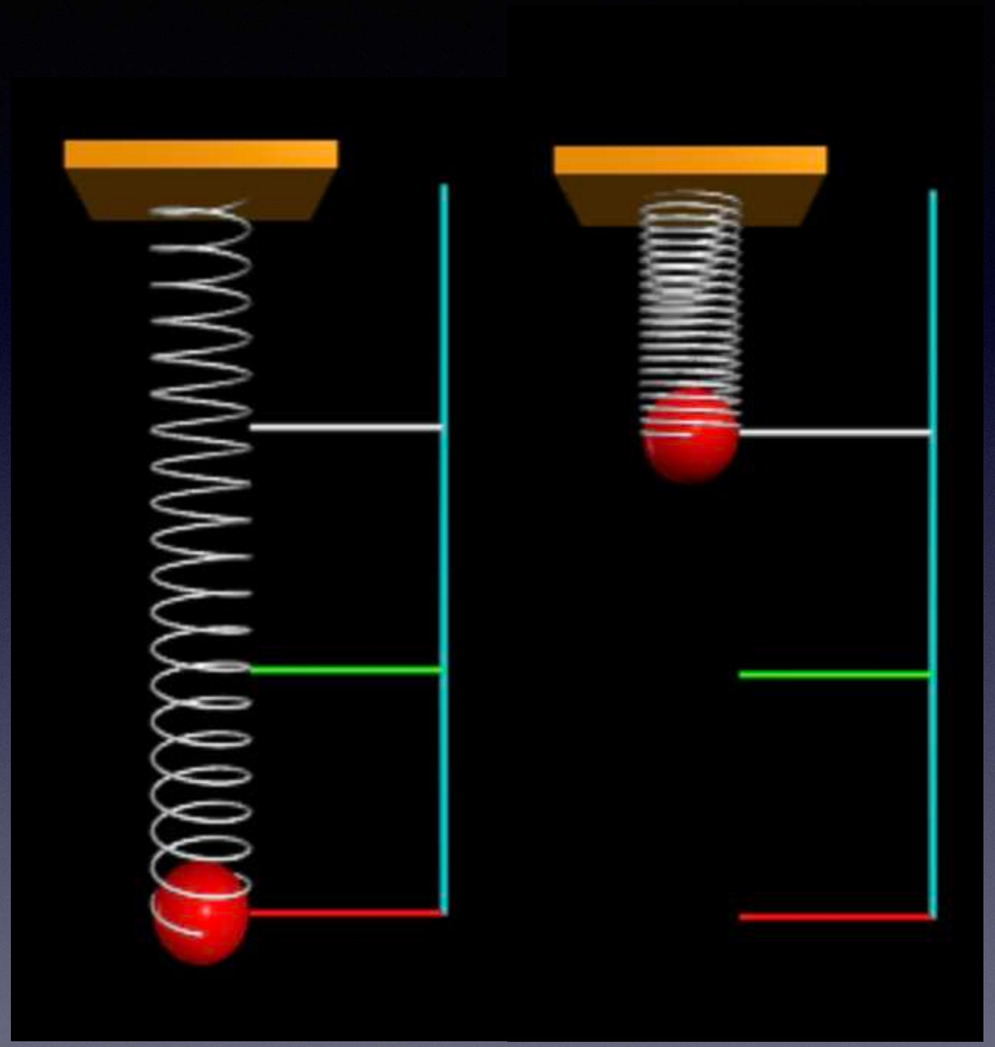
Werden diese Berechnungen in einer **anderen Reihenfolge** durchgeführt, sind die Vorhersagen wesentlich **ungenauer**. Wie von Cromer gezeigt (A. Cromer, *Stable solutions using the Euler Approximation*, American Journal of Physics, 49, 455 (1981)) **erhält dieses Schema die Energie** für oszillierende Probleme.

Basierend auf dem zuvor geschilderten Iterationsschema wurde die Bewegung der an einer vertikal aufgehängten Feder befestigten Masse simuliert. Die extremen Positionen sind in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Für diesen (1D-) Fall existiert eine analytische Lösung. Für die Periode erhält man folgenden Ausdruck:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}}$$

T wächst mit zunehmender Masse m an und nimmt zu größeren k_s-Werten hin ab.

Animation zu Feder mit Masse
on glowscript.org by GL



Maximale (links) und minimale Auslenkung (rechts) der an einer vertikal aufgehängten Feder befestigten Masse. Position im Gleichgewicht (grün).

```
Web VPython 3.2
box(pos=vector( 0,5,0 ), color=color.orange, size=vector(5,0.5,5) )
c0=curve( vector(1,0,0), vector(5,0,0) )
c1=curve( pos=[vector(1,-5,0), vector(5,-5,0)], color=color.green )
c2=curve( pos=[vector(1,-10,0), vector(5,-10,0)], color=color.red )
C3=curve( pos=[vector(5,5,0), vector(5,-10,0)], color=color.cyan )
ball = sphere( color=color.red, radius=1 )
ball.pos = vector( 0,0,0 )
ball.vel = vector( 0,0,0 )
ball.mas = 0.1
ball.f_n = vector( 0,0,0 )
ball.f_g = vector( 0,0,0 )
ball.f_s = vector( 0,0,0 )
ball.mom = vector( 0,0,0 )
g = vector( 0,-10,0 )
dt = 0.05
spring     = helix( pos=vector(0,5,0), axis=vector(0,-1,0), coils=20, length=5 )
spring.k_s = 0.2
spring.l_0 = 5.0
spring.l   = 5.0
spring.s   = 0.0
spring.hat = spring.axis
while True:
    rate(20)
    spring.l     = mag( ball.pos-spring.pos )
    spring.s     = spring.l - spring.l_0
    ball.f_g     = ball.mas*g
    ball.f_s     = -spring.k_s*spring.s*vector(0,-1,0)
    ball.f_n     = ball.f_g+ball.f_s
    ball.mom     = ball.mom+ball.f_n*dt
    ball.vel     = ball.mom/ball.mas
    ball.pos     = ball.pos+ball.vel*dt
    spring.length = mag( ball.pos - spring.pos )
```

Man beachte, dass dieser Code aktuell nur für eine rein vertikale Bewegung formuliert wurde.

Eine Verallgemeinerung für beliebige Vektoren $\vec{L}$ sollte aber möglich sein.

Relativistische Bewegung

Die Anwendung des Prinzips Impuls auf ein **Objekt**, das sich mit einer **Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit** c bewegt, ist algebraisch etwas komplizierter, aber konzeptionell genau dasselbe wie das, was wir zuvor für Objekte mit niedriger Geschwindigkeit getan haben:

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n + \overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = \gamma_n m\vec{v}_n + \overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t$$

$$\vec{v}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\left|\vec{p}_{n+1}\right|}{mc}\right)^2}} \frac{\vec{p}_{n+1}}{m}$$

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$$

Kontrollpunkt 9

1. Ein Proton der Masse $m = 1.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ bewegt sich mit der sehr hohen Geschwindigkeit $\vec{v}_i = \langle 2.88 \times 10^{8}, 0, 0 \rangle\ \mathrm{m/s}$ (Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$) in einem Teilchenbeschleuniger. Eine konstante elektrische Kraft $\vec{F}_{\mathrm{net}} = \langle 5 \times 10^{-12}, 0, 0 \rangle\ \mathrm{N}$ wird auf das Proton ausgeübt, um es weiter zu beschleunigen. (1) Wie hoch ist die Geschwindigkeit $\vec{v}_f$ des Protons nach $20\,\mathrm{ns}$? (2) Wie groß ist der prozentuale Zuwachs an Impuls? (3) Wie groß ist der prozentuale Zuwachs an Geschwindigkeit?

Antworten
(zu den „Kontrollpunkten“)

- K1.1: Mit $\vec{p}_f = -\vec{p}_i$ ist $\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = -2\vec{p}_i = \langle 5.6,0,0\rangle\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$.
- K1.2: $\vec{v}_i = \vec{p}_i/m = \langle -50,0,0\rangle\ \text{m/s}$, $\vec{v}_f = \vec{p}_f/m = \langle 50,0,0\rangle\ \text{m/s}$.
- K1.3: Geht man von einem Ball-Durchmesser $d = 0.07\,\text{m}$ aus, so sollte $\Delta t \approx d/\left|\vec{v}_i\right| \approx 1.4\,\text{ms}$ sein, also deutlich kleiner als eine hundertstel Sekunde.
- K2.1: Schwerkraft, Stützkraft Boden, Stoßkraft aus Zusammenprall, Luftwiderstand.
- K2.2: Schwerkraft und Stützkraft heben sich auf. Luftwiderstand ist beim Zusammenprall vernachlässigbar.
- K2.3: Die Krafteinwirkung aus dem Zusammenprall könnte nicht berechnet werden, da sie eine rein systeminterne Wechselwirkung wäre.

- K3.1: Impulsänderung (Kraftstoß) $\overrightarrow{F}_{\text{net}}\Delta t = \langle 0{,}0{,}5.072\rangle\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ wies nur eine *z*-Komponente auf.

- K4.1: (1) und (3) sind falsch. Die Fallschirmspringerin fällt mit konstanter Geschwindigkeit der Erde entgegen.

n	Impuls in kg m/s²	Geschwindigkeit in m/s	Position in m
1	<10,0,0>	<10,0,0>	<10,0,0>
2	<10,-10,0>	<10,-10,0>	<20,-10,0>
1	<10,-10,0>	<10,-10,0>	<20,-20,0>

K5.1: Ergebnisse für (1) $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ (blau) und (2) $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$ (rot) für $t = 2\,\mathrm{s}$. $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$.

n	Impuls in kg m/s²	Geschwindigkeit in m/s	Position in m
1	<10,0,0>	<10,5,0>	<10,5,0>
2	<10,-10,0>	<10,-5,0>	<20,0,0>
1	<10,-10,0>	<10,0,0>	<20,0,0>

K5.1: (3) Ergebnisse für $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ (blau) und $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$ (rot) für $t = 2\,\mathrm{s}$. $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + 0.5\left(\vec{v}_n + \vec{v}_{n+1}\right)\Delta t$.

- K5.1: (4) Für den Fall $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_{n+1}\Delta t$ hängt das Ergebnis für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ deutlich vom benutzten Zeitschritt Δt ab. Je größer der Zeitschritt, desto „rascher“ fällt das Objekt. Demgegenüber ist für $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + 0.5\left(\vec{v}_n + \vec{v}_{n+1}\right)\Delta t$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ vom Zeitschritt Δt unabhängig.

- K5.2: Der Apfel übt auf die Erde eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Anziehungskraft aus. Damit „fällt“ die Erde dem Apfel entgegen, allerdings nur unmerklich langsam. Dabei ändert sich der Impuls der Erde so, das der gesamte Impuls unverändert bleibt.

Anmerkungen: Für den Sonderfall einer konstanten (Netto-) Kraft liefert $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + 0.5\left(\vec{v}_n + \vec{v}_{n+1}\right)\Delta t$ das exakte Ergebnis, da sich die Geschwindigkeit linear mit der Zeit ändert. Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht. Wichtig bleibt bei Verwendung von $\vec{v}_{n+1}$, einen kleinen Zeitschritt Δt zu verwenden, um ein hinreichend genaues Ergebnis zu erzielen.

- K6.1: Es gilt $\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i + \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}t$. Am höchsten Punkt der Bahnkurve muss die *y*-Komponente der Geschwindigkeit Null werden. Somit gilt: $v_y = v_{y,i} + F_{y,\text{net}}t_h/m = 0$. Daraus folgt $t_h = -\frac{mv_{y,i}}{F_{y,\text{net}}} = \frac{v_{y,i}}{g}$,

  also $t_h = 9.375\,\text{s}$. Für die Bahnkurve gilt $\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}t^2$. (1) Höchste Position für $t = t_h$: $\vec{r}_h \approx \langle 140.6, 70.3, 0\rangle\ \text{m}$. (2) In der Luft (Flugdauer t_f): $t_f = 2t_h = 18.75\,\text{s}$. (3) Aufschlagpunkt $\vec{r}_f$ (wegen Symmetrie zwischen Auf- und Abstieg): $\vec{r}_f \approx \langle 281.2, 0, 0\rangle\ \text{m}$, somit beträgt die horizontale Flugstrecke $\approx 281.2\,\text{m}$.

- K7.1: $\hat{L} \approx \langle 0.2075, -0.9782, 0 \rangle$ m; $s \approx 0.1273$ m; $\overrightarrow{F} = -k_s s \hat{L} \approx \langle -0.2377, 1.1207, 0 \rangle$ N.

- K8.1: Die Federkraft ändert sich nichtlinear mit der Auslenkung s. Für eine zunächst sinusförmige Bewegung mit konstanter Frequenz ergeben sich wegen s^2 Oberschwingungen. Ferner verschiebt sich der Mittelpunkt der Schwingung gegenüber der Ruhelage.

- K9.1: $\left|\vec{v}_i/c\right| = 0.96$; $\gamma \approx 3.57$; $\left|\vec{p}_i\right| \approx 1.75 \times 10^{-18}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$; $\left|\vec{p}_f\right| \approx 1.85 \times 10^{-18}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$; $\left|\vec{p}_f\right|/(mc) \approx 3.62$; (1) $\left|\vec{v}_f/c\right| \approx 0.968$; (2) $\left(\left|\vec{p}_f\right| - \left|\vec{p}_i\right|\right)/\left|\vec{p}_i\right| \times 100 \approx 5.7\,\%$; (3) $\left(\left|\vec{v}_f\right| - \left|\vec{v}_i\right|\right)/\left|\vec{v}_i\right| \times 100 \approx 0.8\,\%$.

Nachwort

Die Folien versuchen eine Einführung in die Physik aus der Perspektive des 20. Jahrhunderts zu geben. Physiker erstellen Modelle der natürlichen Welt, die auf einer kleinen Anzahl grundlegender physikalischer Prinzipien und auf einem Verständnis der mikroskopischen Struktur der Materie beruhen, und sie wenden diese Modelle an, um ein sehr breites Spektrum physikalischer Phänomene zu erklären und vorherzusagen.

Abfolge und Inhalt dieser Folien lehnen sich ganz eng an das Buch *Matter and Interactions* von Ruth W. Chabay und Bruce E. Sherwood an (4. Auflage, November 2017, 1040 Seiten, eText, Wiley & Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-02908-3). Abbildungen, soweit nicht anders erwähnt, entstammen ebenfalls diesem Buch.

Ende

Folien zusammengestellt von Günther Lang

Es folgt: Teil 3 - Die fundamentalen Wechselwirkungen